HANDBUCH

DER THEORIE

DER LINEAREN

FERENTIALGLEICHUNGEN

VON

PROFESSOR DR LUDWIG SCHLESINGER,

PRIVATDOCENTEN AN DER UNIVERSITÄT ZU BERLIN

IN ZWEI BÄNDEN

ZWEITEN BANDES ERSTER THEIL

MIT FIGUREN IM TEXT.



HANDBUCH

DER THEORIE

DER LINEAREN

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VON

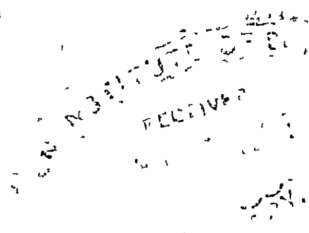
PROFESSOR DR. LUDWIG SCHLESINGER,

PRIVATDOCENTEN AN DER UNIVERSITÄT ZU BERLIN

IN ZWEI BÄNDEN.

ZWEITEN BANDES ERSTER THEIL

MIT FIGUREN IM TEXT





LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G TEUBNER

1897.

Vorbemerkung.

Die Fülle des zu bearbeitenden Materials hat eine Theilung des zweiten Bandes nothwendig gemacht. Der vorliegende erste Theil behandelt die Gruppentheorie, die Umkehrprobleme im Allgemeinen, und diejenigen speciellen Theorieen, die sich an die Integration einer linearen Differentialgleichung durch bestimmte Integrale mit Hülfe der Euler'schen Transformirten angliedern lassen. Der zweite Theil wird die Theorie der eindeutig umkehrbaren Dreiecksfunctionen (insbesondere der elliptischen Modulfunction), der allgemeinen Fuchs'schen Functionen und die linearen Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Coefficienten zum Gegenstande haben.

Für die Anordnung und Darstellung des Stoffes sind, ebenso wie für die Form der Litteraturangaben, die im Vorworte zum ersten Bande dargelegten Gesichtspunkte massgebend geblieben.

Einige Nachträge und Berichtigungen zum ersten Bande sind am Schlusse des vorliegenden Theiles zusammengestellt.

Ausser den im Vorworte zum ersten Bande genannten Herren waren diesmal noch die Herren Oberlehrer Dr. G. Wallenberg und Cand. H. Lemke so freundlich, mich bei der Revision der Druckbogen zu unterstützen; es ist mir eine angenehme Pflicht, ihnen auch an dieser Stelle den wärmsten Dank für ihre Bemühungen auszusprechen.

Berlin, im October 1896.

Ludwig Schlesinger.

Berichtigungen

S 9, Zeile 22 v o ist zwischen „seine“ und „Grenzstellen“ einzuschalten „sämmtlichen“

S 265 fehlt vor der ersten Gleichung die Bezeichnung (1)

S 292, Zeile 15 v o statt „des folgenden Abschnittes“ lies „der folgenden Kapitel“

Inhaltsverzeichniss und Litteraturnachweis.

Inhaltsverzeichniss — Litteraturnachweis.

Neunter Abschnitt.

Allgemeine Theorie der bei linearen Differentialgleichungen auftretenden Gruppen.

Erstes Kapitel.

131 Der allgemeine Gruppenbegriff S 1
132 Gruppen mit endlicher Basis Gruppe der Differentialgleichung . . S 4

Galois, Liouville's Journal, Band 11, S 417 ff;
Cauchy, Journal de l'École Polyt cah 17, S 1 ff; Exercices d'Analyse, Band III (1844), S 151 ff,
Jordan, Traité des Substitutions (Paris 1870), S 22 ff; Crelle's Journal Band 84, S 90; Cours d'Analyse, Band 3 (1887), S 193;
Poincaré, Acta Mathematica, Band 4, S 201 ff
vergl Klein, Erlanger Programm (1872), S 5 ff (Mathem Annalen, Band 43, S 63 ff);
Cayley, English Cyclopaedia (1860), S 536,
Dyck, Math. Annalen, Bände 20, 22;
Weber, Elliptische Functionen (1891), S 173 ff

133 Allgemeines über Punktmengen Abzählbare und continuirliche Gruppen . . . S 7

G Cantor, Mathem Annalen, Band 5, S 129 ff, Band 15, S 1 ff; Band 17, S 114 ff; Band 21, S 545 ff; Band 23, S 453 ff;
Weierstrass, Monatsberichte der Berliner Akad 1880, S 719 ff,
Lie, Theorie der Transformationsgruppen, Bd 1 (1888), S 3 ff;
Poincaré, a a O;
vergl Mittag-Leffler, Acta Math, Band 4, S 2, 3,
Biermann, analyt Functionen (1887), S 64 ff;
Klein, a. a O; Einleitung in die höhere Geometrie, II (autogr. Vorlesung, Göttingen 1893)

Zweites Kapitel.

134. Begriff der continuirlichen Transformationsgruppe . . . S. 13.	Lie, Transformationsgruppen, Band 1, S. 14 ff.; vergl. Vessiot, Annales de l'École Normale, Serie III, Band 9, S. 199 ff.
135. Die allgemeine lineare homogene Gruppe. Erweiterung. Differentialinvarianten. Infinitesimale Transformation. . . . . . S. 15	Lie, a. a. O., S. 556 ff.; S. 523 ff.; Picard, Annales de Toulouse, Band 1, S. 4 ff.; Vessiot, a. a. O., S. 202.
136. Analogie mit algebraischen Gleichungen. Rationale Differentialfunctionen der Elemente eines Fundamentalsystems . . . . . S. 19	Appell, Annales de l'École Normale, Serie II, Band 10, S. 408 ff.; Picard, a. a. O., S. 7; Vessiot, a. a. O., S. 213 ff.; vergl. Klein, höhere Geometrie II, S. 268, 269.

Drittes Kapitel.

137. Lie'sche Sätze über Transformationsgruppen. Anzahl der wesentlichen Parameter und infinitesimale Transformationen . . . . . S. 23 138. Sätze über Transformationsschaaren, die gewissen partiellen Differentialgleichungen genügen . . . S. 26	Lie, a. a. O., S. 318; S. 312; S. 7; S. 168; S. 314; S. 39, 40; S. 68, S. 147.
139. Vollständige Systeme. Continuirliche Gruppen werden durch infinitesimale Transformationen erzeugt. S. 31.	Jacobi, Crelle's Journal, Band 60, S. 23 ff.; Clebsch, ebenda, Band 65, S. 257 ff.; Lie, a. a. O., S. 85; S. 148; S. 158; S. 315; S. 169.
140. Zusammensetzung einer r-gliedrigen Gruppe. Ausgezeichnete Untergruppen. Fundamentaleigenschaft der betrachteten allgemeinen Transformationsgruppen . . . . . S. 35	Lie, a. a. O., S. 297; S. 208; S. 261; S. 319, 320; vergl. Klein, Vorl. über das Ikosaeder (1884), S. 7; Vessiot, a. a. O., S. 202.
141. Allgemeiner Begriff der Invarianten einer continuirlichen Gruppe. Transitivität und Intransitivität . S. 38 142. Invarianten einer gemischten Gruppe. Differentialinvarianten . . . S. 42	Lie, a. a. O., S. 95; S. 212, 213; S. 324, S. 524; S. 540; S. 548; Cauchy, Exercices, Band 3, a. a. O.; Jordan, Traité des Substitutions, S. 29; vergl. Vessiot, a. a. O., S. 202.

Viertes Kapitel.

143. Algebraische Untergruppen der allgemeinen linearen Gruppe. Infinitesimale Transformationen. Algebraische Differentialgleichungen für rationale Differentialfunctionen . S. 45. 144. Eigenschaften der algebraischen Differentialgleichungen, denen die rationalen Differentialfunctionen Genüge leisten . . . . S. 49 145. Rationale Differentialfunctionen, die zu derselben Gruppe gehören S. 52.	Picard, a. a. O., S. 7 ff.; Vessiot, a. a. O., S. 218 ff.
146. Allgemeine Sätze über Differentialgleichungen. Satz, der dem Theoreme des Lagrange analog ist. . S. 55	Koenigsberger, allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen (1882), S. 1; S. 5 ff.; Vessiot, a. a. O., S. 225 ff.

Fünftes Kapitel.

147 Resolventen Insbesondere solche, die ausgezeichneten Untergruppen entsprechen Empfindliche Function. Picard'sche Resolvente . S. 58	Picard, a a. O, S 2 ff, Vessiot, a. a O, S 228 ff; vergl Beke, Mathem. Annalen, Band 46, S 557 ff
148 Einige Sätze aus Galois' Theorie der algebraischen Gleichungen. S 61.	Galois, a a O., S. 421 ff.; Kronecker, Crelle's Journal, Band 92, S 82 ff. (Festschrift etc, Berlin, 1882).
149 Differentialgleichung niedrigster Ordnung für die empfindliche Function . . . . . S 64	Picard, a a O.; Koenigsberger, a. a O; Vessiot, a. a. O
150 Transformationsgruppe einer linearen Differentialgleichung. Methode zur Herstellung derselben. Formale Unveränderlichkeit . . S 67 151 Fundamentalsatz von Picard und Vessiot Die Transformationsgruppe ist nur abhängig von der Differentialgleichung . . . S 71.	Picard, a a O; Comptes Rendus 1895 II, 2 Dezember; Vessiot, a a O, S 230 ff; vergl Klein, höhere Geometrie, II, S 299 ff, (Mathem Annal Band 45, S 149).
152 Rationalitätsbereich Gattungen Aequivalenz einer speciellen linearen Differentialgleichung mit der allgemeinen unter Adjunction einer gewissen Gattung . . . . . S 74	Kronecker, a a. O., Vessiot, a a O; vergl Klein, a a O; Bolza, Bulletin of the New-York Mathem Society, Band 2, S. 94 ff

Sechstes Kapitel

153 Bedeutung der Transformationsgruppe für das Integrationsproblem Reduction der Transformationsgruppe durch Adjunction . S 78.	Vessiot, a a. O., S 235; S 224; vergl Klein, a a O., S 297
154. Adjunction des allgemeinen Integrals einer Differentialgleichung Normalzerlegungen der Transformationsgruppe . . . . S 80	Vessiot, a a O, S 202; S. 204 ff; Lie, Transformationsgruppen, Band 3 (1893), S 704.
155 Lineare Differentialgleichungen, durch deren Adjunction sich die Transformationsgruppe reducirt Reciprocitätssatz Hülfsdifferentialgleichungen mit einfacher Gruppe Integration durch Quadraturen . . S 83	Vessiot, a a O, S 235 ff, S. 241 ff
156 Bedingung für die Integrabilität einer linearen Differentialgleichung durch Quadraturen Integrable Gruppen Die allgemeine lineare Differentialgleichung ist nicht durch Quadraturen lösbar . . . S 87.	Lie, Transformationsgruppen, Band 1, S 262; S 589; S 560; Band 3, S 680 ff, Vessiot, a a O, S 243 ff

Siebentes Kapitel

157 Probleme, die sich auf die Transformationsgruppe beziehen Algebraische Beziehungen zwischen Integralen und deren Ableitungen Der Fall algebraischer Integrale . . S 98	Vessiot, a a O; Fuchs, Sitzungsberichte der Berl Akad, 1882 II, S 703; Acta Mathematica, Band 1, S. 321 ff; Appell, Annales de l'École Normale, Serie II, Bd 10, S. 417 ff Lie, Leipziger Berichte 1891, S 253 ff.

158. Algebraisch integrirbare lineare Differentialgleichungen. Für dieselben ist die Transformationsgruppe endlich. S. 96 159. Beziehungen zwischen der Transformationsgruppe und der Gruppe einer linearen Differentialgleichung. Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe . . . . S. 99	Vessiot, a. a. O., S. 248; S. 264; Gino Fano, Rendiconti della Accad. dei Lincei, Band 4[I], S. 294
160. Satz über die Monodromiegruppe. Anwendung auf den Fall der algebraischen Integrabilität und auf die Frage der Reductibilität. Reductibilität der Monodromiegruppe S. 102 161. Reductibilität der Transformationsgruppe. Fuchs'sche Klasse. S. 105.	Jordan, Bulletin de la Soc. Mathém., Band 2, S. 102 ff., Cours d'Analyse, Band 3, S. 193; S. 202; Poincaré, Acta Mathem., Band 4, S. 201, Beke, Mathemat. Annalen, Band 45, S. 278 ff.; vergl. Klein, höhere Geometrie, II, S. 361.

Zehnter Abschnitt.

Specielle Probleme der Gruppentheorie. Invarianten.

Erstes Kapitel.

162. Riemann's Problemstellung. Existenzbeweise . . . . S. 108.	Riemann, Inaugural-Dissertation (Göttingen 1851), Art. 20; Ges. Werke (2. Aufl. 1892), S. 379 ff., vergl. Weierstrass, Werke, Band 2 (1895), S. 49 ff.
163. Differentialgleichungen mit denselben Verzweigungspunkten und denselben Fundamentalsubstitutionen. Cogrediente Functionssysteme und Differentialgleichungen. Beziehungen zwischen solchen . . S. 110	Riemann, Ges. Werke, S. 380 ff.; Fuchs, Sitzungsberichte 1888[II], S. 1275; Poincaré, Acta Mathem., Band 5, S. 212; vergl. Riemann, Crelle's Journal, Band 54, S. 133 ff.
164. Sätze über reductible Differentialgleichungen . . . . S. 115.	Fuchs, a. a. O.; Frobenius, Crelle's Journal, Band 76, S. 256 ff. Hamburger, ebenda, Band 111, S. 121 ff. Heffter, ebenda, Band 116, S. 162 ff.
165. Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten. Der Artbegriff. Sätze von Fuchs. Die Transformationsgruppen von Differentialgleichungen derselben Art . . . . S. 118	Poincaré, a. a. O., Fuchs, a. a. O.; Frobenius, a. a. O.
166. Differentialgleichungen der Fuchsschen Klasse. Allgemeine Bemerkungen . . . . S. 123.	Siehe die Citate zu den Nrn. 158, 159

Zweites Kapitel.

167. Systeme von Subdeterminanten der Determinante eines Fundamentalsystems. Associirte Differentialgleichungen. Der Franke'sche Satz S. 125	Fuchs, Sitzungsberichte 1888[I], S. 1115 ff.; Forsyth, Philosophical Transactions, Band 179, S. 420 ff.; Franke, Crelle's Journal, Band 61, S. 350 ff.; Borchardt, Werke (1888), S. 479 ff. vergl. Cels, Annales de l'École Norm., Serie III, Band 8, S. 341 ff.;

	Grünfeld, Crelle's Journal, Band 115, S. 328 ff.; Gutzmer, Habilitationsschrift (Halle, 1896)
168. Die Fundamentalgleichungen der associirten Differentialgleichungen. Geometrische Deutung. Integralcurve S. 129 169. Geometrische Deutung der Integrale der associirten Differentialgleichungen. Contragredienz . . . . . . S. 133	Rados, Mathem. és Physikai Lapok, Band 3, S. 15 ff.; Beke, ebenda, S. 286 ff.; Halphén, Mémoires présentés etc., Band 28, S. 115 ff.; Borel, Annales de l'École Norm., Ser. III, Band 9, S. 63 ff.; Gino Fano, Rendiconti, Band 4^{I}, S. 1 ff.; Forsyth, a. a. O.; Clebsch, Göttinger Abhandl., Band 17 (Mathem. Annalen, Band 5, S. 427 ff.) vergl. Klein, Nicht-Euklid'sche Geometrie, II (autogr. Vorlesungen, Göttingen 1890), S. 130 ff.
170. Algebraische Beziehungen zwischen den Elementen eines Fundamentalsystems der höheren Associirten. Princip der Dualität . . S. 138	Fuchs, Sitzungsberichte 1888 I, S. 1117 ff.; S. 1123 ff.; Appell, a. a. O., S. 415 ff.; Forsyth, a. a. O., S. 454 vergl. Plücker, Neue Geom. des Raumes (1868), § 1; Clebsch, a. a. O., Veronese-Schepp, Grundzüge der Geom. (1894), S. 571 ff.
171. Beziehungen zwischen den Adjungirten der associirten Differentialgleichungen . . . . S. 142	vergl. Borchardt, a. a. O.; Franke, a. a. O.

Drittes Kapitel.

172. Transformation der Differentialgleichung. Canonische Form. S. 145	Fuchs, Acta Mathem., Band 1, S. 346; Vukičević, Inaugural-Dissertation (Berlin 1894), S. 9; Lie, Christiania Videnskab. Forhandlinger 1883, Nr. 12, Transformationsgruppen, Band 1, S. 5 ff.
173. Integralquotienten. Associirte Differentialgleichungen für die canonische Form . . . S. 148 174. Verallgemeinerung des Begriffes der associirten Differentialgleichungen. Associirte Arten und Gruppen . . S. 151	Siehe die Citate zu den Nrn. 167—170
175. Differentialgleichungen gerader Ordnung. Untersuchungen von Fuchs. Betrachtung einer gewissen quadratischen Form. Differentialgleichungen, die mit ihren Adjungirten zur selben Art gehören . . . . S. 157	Fuchs, Sitzungsberichte 1888 I, S. 1121 ff.; S. 1124 ff.; S. 1273 ff.

Viertes Kapitel.

76. Verfahren zur Entscheidung der Frage, ob eine vorgelegte lineare Differentialgleichung reductibel ist oder nicht . . . . S. 164.	Appell, a. a. O. S. 404 ff.; Beke, Mathem. Annalen, Band 45, S. 281 ff.

177. Kriterium dafür, ob die logarithmische Ableitung einer Lösung einer gegebenen linearen Differentialgleichung rational ist . S. 167 — vergl. Beke, a. a. O.; siehe auch die Citate zu den Nrn. 95—98 (Bd. I)

178. Besondere Behandlung der Fuchsschen Classe. Satz von Heffter über das Auftreten ganzer rationaler Integrale . . . . S. 171. — Liouville, Journal de l'École Polyt., cah. 22, S. 154 ff.; Fuchs, Crelle's Journal, Band 81, S. 101 ff.; Band 106, S. 283; Heffter, ebenda, Band 106, S. 273 ff.

Fünftes Kapitel.

179. Genauere Betrachtung der Integralquotienten. Projective Substitutionen und Gruppen. Isomorphismus. Beziehungen zwischen homogenen, unimodularen und projectiven Gruppen S. 175. — Fuchs, Acta Mathem., Band 1, S. 339 ff.; Lie, Transformationsgruppen, Band 1, S. 579, S. 420; Engel, Leipziger Berichte 1892, S. 280 ff.; Jordan, Traité des Substitutions, S. 56 ff.; Klein, Ikosaeder, S. 8.

180. Differentialgleichung für die Integralquotienten. Transformation der unabhängigen Variabeln. Differentialgleichungen gerader Ordnung. Die Schwarz'sche Ableitung. . S. 180. — Halphén, Mémoires présentés etc., Band 28, S. 116 ff.; Forsyth, a. a. O., S. 440; Schwarz, Crelle's Journal, Band 75, S. 299 ff.; Cayley, Cambridge Philosoph. Transact., Band 8 I, S. 5 ff.

181. Allgemeines über Invarianten. Algebraische Formen. Aequivalenz linearer Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung. Invarianten dieser Aequivalenz. Gewicht. S. 185. — Laguerre, Comptes Rendus 1879 I, S. 116; S. 224; Brioschi, Bulletin de la Soc. Mathém., Band 7, S. 105; Halphén, a. a. O.; Fuchs, Acta Mathem., Band 1, S. 324 ff.; Forsyth, a. a. O.; vergl. Study, Methoden zur Theorie der tern. Formen (1889).

182. Bestimmung der Form der Invarianten. Infinitesimale Transformation einer Differentialgleichung in eine aequivalente . . . . . . S. 191. — Halphén, a. a. O., S. 118 ff.; Forsyth, a. a. O., S. 392 ff.

183. Explicite Form der linearen Invarianten vom Gewichte 3, 4, 5, 6, 7 und des linearen Theiles derselben für beliebiges Gewicht . . . S. 195. — Laguerre, a. a. O., S. 226; Cockle, Quarterly Journal, Band 14, S. 346; Halphén, a. a. O., S. 118 ff.; Fuchs, a. a. O.; Forsyth, a. a. O., S. 392; S. 398, S. 403 ff.; Brioschi, Acta Mathem., Band 14, S. 235; vergl. Wallenberg, Crelle's Journal, Band 113, S. 1 ff.; Vukičević, a. a. O.

Sechstes Kapitel.

184. Quadrinvarianten. Absolute Invarianten. Differentialgleichung für eine aus den Integralen gebildete Form S. 200. — Forsyth, a. a. O., S. 407 ff.; Brioschi, a. a. O., S. 238 ff.; Appell, a. a. O., S. 414 ff.; Fuchs, Crelle's Journal, Band 81, S. 129 ff.; vergl. Wallenberg, a. a. O., S. 9 ff.

185. Differentialgleichung, der eine Form $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades der Integrale einer Differentialgleichung zweiter Ordnung — Fuchs, a. a. O.; Acta Mathem., Band 1, S. 321 ff.; Brioschi, a. a. O., S. 235 ff.

genügt. Neue Gestalt der Invarianten. Differentialgleichungen mit verschwindenden Invarianten. . . . . S. 203.	
186. Homogene Relationen zwischen den Integralen. Algebraische Integrale. Specielle Relationen zweiten Grades S. 207.	Fuchs, Sitzungsberichte 1882 II, S. 703 ff.; Acta Mathem., Band 1, S. 321 ff.; Brioschi, Bulletin de la Soc. Mathém., Band 7, S. 105 ff.; Goursat, ebenda, Band 11, S. 169 ff.; Wallenberg, a. a. O., S. 11 ff., Rosenkranz, Schlömilch's Zeitschrift, Band 35, S. 82 ff.
187. Satz über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten und algebraischer Integralcurve. Monodromiegruppe im Falle algebraischer Coefficienten . S. 211.	Fuchs, Acta Mathem., Band 1, S. 330, Sitzungsberichte 1890 I, S. 469 ff.; Wallenberg, a. a. O.; Lipmann Schlesinger, Inaugural-Dissertation (Kiel 1888); M. Meyer, desgl. (Berlin 1893); Vukičević, a. a. O., S. 6 ff.
188. Fall einer rationalen und einer elliptischen Integralcurve. Die Monodromiegruppe ist endlich. S. 215.	Wallenberg, a. a. O., S. 14 ff.; Gino Fano, Rendiconti, Band 4 I, S. 9 ff.; vergl. Schwarz, Crelle's Journal, Band 87, S. 139 ff.; Klein, ellipt. Modulfunctionen, Band 1 (1890), S. 561 ff., Band 2 (1892), S. 237 ff.
189. Differentialgleichungen, für welche gewisse Invarianten verschwinden. Ausnahmefälle . . S. 218.	Halphén, a. a. O., Acta Mathematica, Band 3, S. 325 ff.; Wallenberg, a. a. O.; vergl. Vukičević, a. a. O., S. 22 ff.
190. Die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen sind rationale Zahlen. Allgemeiner Satz über Differentialgleichungen mit algebraischer Integralcurve. . . . . S. 222.	Fuchs, Acta Mathem., Band 1, S. 322; S. 330 ff.; Brioschi, ebenda, Band 14, S. 237; Wallenberg, a. a. O., S. 36 ff., des Verfassers Inaugural-Dissertation (Berlin 1887), S. 38.

Elfter Abschnitt.

Formulirung und allgemeine Discussion der Umkehrprobleme.

Erstes Kapitel.

191. Differentialgleichungen dritter und vierter Ordnung mit einer homogenen Relation zwischen den Integralen. Covarianten. Hesse'sche Covariante. Werthe der unabhängigen Variabeln für einen Punkt der Integralcurve S. 227.	Fuchs, Crelle's Journal, Band 81, S. 98; Acta Mathem., Band 1, S. 322 ff.; des Verfassers Inaug.-Dissertation, S. 23 ff. vergl. Hesse, Crelle's Journal, Band 42, S. 117, Band 56, S. 263; Gordan u. Nöther, Mathem. Annalen, Band 10, S. 548.
192. Erledigung der Ausnahmefälle. Ternäre Relation. Quadratische Relation mit nicht verschwindender Discriminante . . S. 232.	Fuchs, a. a. O., S. 330 ff., Goursat, a. a. O., S. 149 ff.; Halphén, a. a. O.; Picard, Comptes Rendus 1884 II, S. 905, des Verfassers Dissertation S. 24 ff.
193. Ternäre quadratische Relation. Abwickelbare Fläche vierter Ordnung S. 237.	Goursat, Comptes Rendus 1889 I, S. 282 ff.; des Verfassers Dissertation, a. a. O.; vergl. Cayley, Quarterly Journal, Band 6, S. 108 ff.

Zweites Kapitel

194 Differentialgleichungen, deren unabhängige Variable eine eindeutige Function des Ortes der Integralcurve ist . . . . S. 243 — Fuchs, Acta Mathem., Band 1, S. 334 ff., vergl. Rosenkranz, a. a. O., S. 129 ff.

195 Algebraisch integrirbare lineare Differentialgleichungen Satz von Fuchs . . . S. 247. — Fuchs, a. a. O.; des Verfassers Dissertation, S. 3 ff.; vergl. Klein, Ikosaeder, S. 113 ff.

196 Differentialgleichungen zweiter Ordnung Umkehrungsfunction des Integralquotienten Nothwendige Bedingungen für die Eindeutigkeit der Umkehrungsfunction . . . . S. 250 — Fuchs, Göttinger Nachrichten, 1880, S. 172 ff., Crelle's Journal, Band 89, S. 158 ff., Band 90, S. 71 ff.; vergl. Poincaré, Acta Math., Band 1, S. 232; S. 273, Band 4, S. 228 ff.

197 Neue Auffassung der scheinbar singulären Stellen Das Fuchs'sche Beispiel . . . . S. 255 — Poincaré, Acta Mathem., Band 5, S. 216; Fuchs, a. a. O.; Göttinger Nachrichten, 1880, S. 445

198 Bedeutung der Unbestimmtheitsstellen der Umkehrungsfunction bei der Aufstellung der hinreichenden Bedingungen für die Eindeutigkeit S. 259 — Fuchs, a. a. O.; Abhandl. der Göttinger Societät vom Jahre 1881, Nr. 9 ff.; vergl. Jacobi, Crelle's Journal, Band 13, S. 57 ff.; Hermite, Crelle's Journal, Band 40, S. 261 ff.; Kronecker, Sitzungsberichte, 1881[II], S. 1179 ff.

Drittes Kapitel

199 Eigenschaften projectiver Substitutionen einer Variabeln Canonische Form und Eintheilung derselben S. 265 — Klein, Mathem. Annalen, Band 14, S. 122 ff., Band 21, S. 171; Modulfunctionen, Band 1, S. 163 ff.; Poincaré, Acta Math., Band 1, S. 1 ff. Band 3, S. 49 ff.

200 Allgemeines über Punktmengen Bahncurven elliptischer Substitutionen Weierstrass' Auffassung eines analytischen Gebildes . . S. 270. — G. Cantor, siehe die Citate zu Nr. 133, vergl. Klein, Modulfunctionen, Band 1, S. 170 ff.

201 Grenzstellen, die einem analytischen Gebilde nicht zuzuzählen sind Gebilde, die nach einer Seite hin eindeutig sind Isolirte Punktmengen und isolirtwerthige Functionen S. 274 — Weierstrass, Abhandl. der Berliner Akademie 1876, S. 58 ff.; Vorlesungen über Functionentheorie (nicht veröffentlicht), Abel, Oeuvres, Band 2 (1881), S. 254, Jacobi, a. a. O., Werke, Band 2 (1882), S. 516; Fuchs, Sitzungsberichte 1885[I], S. 5 ff.; Casorati, Acta Mathematica, Band 8, S. 345 ff., G. Cantor, siehe die Citate zu Nr. 133, Abhandl. des Verfassers, Crelle's Journal, Band 110, S. 130 ff.; vergl. Klein, Mathem. Ann., Band 15, S. 148

202. Discontinuirliche projective Gruppen einer Variabeln Begrenzung der Continua, wo die Gruppe eigentlich discontinuirlich ist. Infinitesimale Substitution . . . . S. 278. — Poincaré, Acta Mathematica, Band 1, S. 11 ff.; Band 3, S. 57 ff.; Klein, Mathemat. Annalen, Band 21, S. 176 ff.

203 Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit discontinuirlicher Gruppe. Die Umkehrungsfunction des Integralquotienten ist isolirtwerthig S 281	Siehe die Citate zu Nr 196; Klein, Mathemat Annalen, Band 40, S 133 ff; Abhandl des Verfassers, Crelle's Journal, Band 110, S 130 ff.; S. 265 ff
204 Die Umkehrungsfunction des Integralquotienten ist eindeutig Existenzbereich dieser Function . . S 286	Fuchs, Crelle's Journal, Band 90, S 72 ff; Poincaré, Acta Mathematica, Band 3, S 63 ff; Klein, Mathemat Annalen, Band 21, S 176 ff; Ritter, ebenda, Band 40, S 4 ff

Viertes Kapitel

205 Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung Discontinuirliche projective Gruppen in mehreren Veränderlichen Beispiel solcher Gruppen durch Betrachtung hyperelliptischer Integrale . . . . . . S 289	Jacobi, a. a O; Clebsch u Gordan, Abel'sche Functionen (1866), S 130 ff; Kronecker, Sitzungsberichte 1884 II, S 1282 ff. Riemann, Crelle's Journal, Band 71, S 197 Weierstrass, Monatsberichte der Berl. Akad 1876, S 680 ff, C. Neumann, Vorles über Abel'sche Integrale (1865), S 390 ff
206 Lösung des Umkehrproblems durch die Weierstrass'sche Thetafunction Jacobi'sches Umkehrproblem Elliptische Functionen . . . . S 295	Weierstrass, Programm des Braunsberger Gymnasiums, 1848/49; Crelle's Journal, Band 47, S 289 ff; Riemann, ebenda, Band 54, S 137 ff, S 116, C Neumann, a a O, S. 508 ff

Fünftes Kapitel.

207 Die in den Coefficienten einer linearen Differentialgleichung auftretenden Parameter als Functionen der Fundamentalinvarianten Auftreten von scheinbar singulären Stellen . . . . S 299	Poincaré, Acta Mathematica, Band 4, S 216 ff.
208 Differentialgleichungen zweiter Ordnung ohne scheinbar singuläre Stellen Abbildung der Ebene der unabhängigen Variabeln durch den Integralquotienten. . S 303	Poincaré, a a O, Acta Mathematica, Band 5, S 219 ff; Fuchs, Crelle's Journal, Band 90, S 72, Ritter, a a O, S 8 ff
209 Die Winkelsumme bei einem Cyklus von Ecken Andere Zerschneidung der Ebene der unabhängigen Variabeln S 307.	Poincaré, Acta Mathematica, Band 1, S. 21 ff; S 231 ff, Band 4, S 219 ff vergl Ritter, a a O
210 Reguläre Theilung entsprechend der Gruppeneigenschaft Erlaubte Abänderungen Die Parameter in den Coefficienten sind eindeutige Functionen der Parameter der Monodromiegruppe. . . . . S 312	Fuchs, a a O; Poincaré, Acta Mathematica, Band 1, S 16 ff, S 39 ff; Band 4, S 219 ff; Klein, Mathemat Annalen, Band 19, S 565 ff; Band 21, S 187 ff; Modulfunctionen, Band 1, S 574 ff; Dyck, Mathem Ann, Band 20, S 7 ff;
211. Fall realer Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen Geometrische Darstellung der Para-	Poincaré, Acta Mathematica, Band 4, S 219; Ritter, a. a. O, S 10,

meter der Gruppe. Bestimmung der Differentialgleichung, wenn die Gruppe gegeben ist. Fundamentalbereich Eigenschaften der die Gruppe zulassenden Functionen Fortsetzung S 318	Klein, Mathemat Annalen, Band 14, S 313ff, Band 21, S 161ff.; Modulfunctionen, Band 1, S 492

Sechstes Kapitel.

212 Methode von Schwarz und Carl Neumann Poisson'sches Integral und alternirendes Verfahren S 323.	Poisson, Journal d'École Polyt cah 19, S 155. C Neumann, das logarithmische und Newton'sche Potential (1877), S 160ff; Vorles. über Abel'sche Integrale (2 Aufl, 1884), S. 388ff.; Schwarz, Crelle's Journal, Band 74, S 218ff, Züricher Vierteljahrsschrift, Band 15, S 113ff; S. 272ff; Monatsberichte der Berl Akad. 1870, S 767ff, vergl Klein, Modulfunctionen, Band 1, S 508ff
213 Construction kreisförmiger Bereiche um die Ecken des gegebenen Fundamentalbereiches . . . . . . S 327 214 Existenzbeweis durch zweimalige Anwendung des alternirenden Verfahrens . . . . . S. 332	Klein, bei Ritter, Mathem Annalen, Band 40, S. 8ff
215. Allgemeine Sätze uber Functionen, die bei den Substitutionen der Gruppe ungeändert bleiben Aufstellung der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung . . . . S 335. 216. Form der Differentialgleichung Fall zweier singulärer Punkte im Endlichen Discontinuirliche Gruppen Weitere Probleme . . . S 343.	Schottky, Crelle's Journal, Band 83, S 305ff; Poincaré, Acta Mathematica, Band 1, S 228, Band 4, S 220; Ritter, a a O, S 11, Riemann, Abhandlungen der Göttinger Societät, Band 13, Art 14ff; Schwarz, Crelle's Journal, Band 75, S 301ff.

Siebentes Kapitel

217 Formulirung eines neuen Problems Differentialgleichungen, die zu derselben Familie gehören . S 347	Poincaré, Acta Mathematica, Band 5, S 211ff;
218 Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die zur selben Familie gehören Satz von Poincaré . . S 351	Vogt, Thèses (Paris 1889), S 55ff Poincaré, a. a O., S 217ff
219 Bestimmung einer Differentialgleichung der Familie mit der Minimalzahl von scheinbar singulären Punkten S 354 220 Die Reducirte der Familie. Allgemeine Bemerkungen . . . . S 359	Poincaré, a. a O, S 219ff; Vogt, a a O, S 59ff
221 Differentialgleichung für die Integralquotienten einer linearen Differentialgleichung dritter Ordnung S 362.	Forsyth, a. a O, S 443ff.

Achtes Kapitel.

222. Differentialgleichungen und Functionssysteme, die zur selben Classe gehören Sätze von Riemann S 365	Riemann, Werke (1892), S 380ff vergl Klein, Math Annalen, Band 46, S 83

223 Bestimmung einer Differentialgleichung der Classe, deren determinirende Gleichungen zwischen Null und Eins gelegene Wurzeln haben . S 369 — Fuchs, Sitzungsberichte 1892^I, S 1118ff; 1893^II, S 978ff; Heffter, Crelle's Journal, Band 116, S. 164ff.

224. Sätze über Differentialgleichungen, die zu derselben Classe gehören S 374
225 Differentialgleichungen mit nur einfachen ausserwesentlichen singulären Stellen Constantenzählungen für die homogene Monodromiegruppe. S 378
226 Differentialgleichungen derselben Classe, deren determinirende Fundamentalgleichungen übereinstimmen S 383
— Riemann, a. a. O., S 382ff; vergl Poincaré, Acta Mathematica, Band 4, S 216ff; Klein, a a O; hypergeometrische Function (autogr Vorlesung, Göttingen 1894), Theil I (Math Ann, Band 45, S 149).

227. Formulirung zweier verschiedener Probleme, die für die Riemann'sche P-Function zusammenfallen Contigue Functionen . . . . S 388 — Poincaré, a a O; Klein, a. a O; hypergeom Function, S. 249ff; Riemann, Abhandlungen der Göttinger Societät, Band 7, ebenda Band 13, S. 37ff

Neuntes Kapitel

228 Differentialgleichungen, deren Monodromiegruppe von einem in den Coefficienten auftretenden Parameter unabhängig ist Sätze von Fuchs S. 394. — Fuchs, Sitzungsber. 1888^II, S 1278ff.

229 System von linearen Differentialgleichungen, welches rationale Particularlösungen besitzen muss S 397 — Fuchs, ebenda, 1894^II, S 1118, S 1123ff.

230 Differentialgleichungen gerader (2m^{ter}) Ordnung Satz von Fuchs über die Reductibilität der m^{ten} Associirten . . . S 399 — Fuchs, ebenda, 1888^II, S 1282ff

Zwölfter Abschnitt.

Theorie und Anwendungen der Euler'schen Transformirten.

Erstes Kapitel

231 Neue Herleitung der Laplace-schen Transformirten. Anwendung der dabei befolgten Methode Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument . . . S 405 — Arbeiten des Verfassers, Comptes Rendus 1895^I, S 1396; Crelle's Journal, Band 116, S. 97ff; Mellin, Acta Societatis Fennicae, Band 21, Nr 6; vergl die Citate zu Nr 113 (Band I) und zur folgenden Nummer.

232 Satz von Abel für lineare Differentialgleichungen und Anwendung desselben auf die hyperelliptischen Integrale dritter Gattung . S 408 — Abel, Oeuvres, Band 2 (1881), S 47ff, S 43ff; Jacobi, Crelle's Journal, Band 32, S 188, S 189ff; Weierstrass, Braunsberger Programm 1848/49, S 4ff; Fuchs, Crelle's Journ., Band 76, S 177ff; Sitzungsberichte 1892^II, S 1123; Frobenius, Crelle's Journal, Band 78, S 93ff.

233. Definition der Euler'schen Transformirten einer linearen homogenen Differentialgleichung. Integration durch Quadraturen. Doppelschleifen . . . S. 414

234. Differentialgleichungen, deren Integrale im Unendlichen nicht unbestimmt sind. Vereinfachung der Euler'schen Transformirten und des Vertauschungssatzes . . . . . S. 419.

235. Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe, deren Ordnung mit dem Grade des Coefficienten der höchsten Ableitung übereinstimmt . . S. 422

Euler, Institutiones calculi integralis, Band 2 (1827), S. 230 ff.;
Pincherle, Memorie della R. Accad. di Bologna, Serie 5, Band 2, S. 523 ff.;
Mellin, a. a. O.;
Arbeit des Verfassers, Crelle's Journal, Band 116, S. 101 ff.;
Jordan, Cours d'Analyse, Band 3 (1887), S. 242 ff.;
Pochhammer, Math. Annalen, Band 35, S. 470 ff.;
Nekrassoff, ebenda, Band 38, S. 513 ff.

Zweites Kapitel.

236. Die Fuchs'sche Methode der veränderlichen Integrationswege. Aenderung der Integrationsschleifen bei geschlossenen Umläufen des Parameters . . . S. 427

237. Aenderung der Schleifenintegrale bei geschlossenen Umläufen der im Integranden als Parameter auftretenden Variabeln. Bestimmung der Coefficienten der Substitutionen, welche die Lösungen der linearen Differentialgleichung erfahren . . . . S. 432.

Fuchs, Crelle's Journal, Band 71, S. 91 ff.;
Hossenfelder, Math. Ann., Band 4, S. 202 ff.;
Goursat, Acta Mathem., Band 2, S. 1 ff.;
Jordan, a. a. O., S. 247 ff.;
Pochhammer, Crelle's Journal, Band 104, S. 152 ff.; Mathematische Annalen, Band 37, S. 500 ff.;
Nekrassoff, a. a. O., S. 538 ff.;
Pincherle, a. a. O.;
Arbeiten des Verfassers, Crelle's Journal, Band 116, S. 114 ff., Band 117, S. 150 ff.

238. Lineare Combinationen der Schleifenintegrale, die Lösungen der Differentialgleichung liefern. Herstellung eines Fundamentalsystems . . S. 436.

239. Differentialgleichungen, die zu derselben Classe gehören . . S. 441.

240. Besondere Fälle von Differentialgleichungen derselben Classe S. 444.

Poincaré, American Journal, Band 7, S. 222 ff.;
Arbeiten des Verfassers, Crelle's Journal, Band 116, S. 125 ff., Band 117, S. 152 ff.;
vergl. Pincherle, a. a. O., S. 540;
Nekrassoff, a. a. O., S. 536.

Drittes Kapitel.

241. Behandlung einer beliebigen Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe. Die Coefficienten der Uebergangssubstitutionen. Reihenentwickelungen der Integrale . . . S. 448

Arbeit des Verfassers, Crelle's Journal, Band 116, S. 117 ff.; S. 128 ff.;
vergl. Pochhammer, ebenda, Band 71, S. 345 ff.

242. Euler'sche Integrale erster Gattung. Die determinirenden Fundamentalgleichungen der Differentialgleichung (E). Beziehungen zwischen den Coefficienten der Uebergangssubstitutionen . . . . S. 451

Arbeit des Verfassers, a. a. O.;
vergl. Hankel, Schlömilch's Zeitschr., Band 9, S. 12 ff.;
Jordan, a. a. O., S. 259;
Pochhammer, Mathem. Annalen, Band 35, S. 495 ff.;
Klein, hypergeom. Function, S. 113.

243. Die Tissot-Pochhammer'sche Differentialgleichung. Substitutionen, die Umläufen um die singulären Punkte entsprechen. Differentialgleichungen, die zur selben Classe gehören. Die Fundamentalsubstitutionen

Pochhammer, Crelle's Journ., Band 71, S. 316 ff.; Band 73, S. 135 ff.;
Hossenfelder, a. a. O., S. 197 ff.;
Fuchs, Crelle's Journal, Band 72, S. 255 ff.; Sitzungsberichte 1888 II, S. 1285;

sind von den singulären Punkten unabhängig. . . . . S. 455. — Jordan, a. a. O., S. 241 ff.; Arbeiten des Verfassers, Crelle's Journal, Band 116, S. 131; Band 117, S. 161; vergl. Tissot, Liouville's Journal, Band 17, S. 182 ff.

244. Besondere Fälle der Tissot-Pochhammer'schen Differentialgleichung. Gauss'sche Differentialgleichung. Darstellung ihrer Lösungen durch bestimmte Integrale. Beziehungen zu der Darstellung durch Gauss'sche Reihen . . . . S. 459.
245. Euler's Darstellung der Gauss-schen Reihe durch ein bestimmtes Integral. Uebergangssubstitutionen für die Gauss'sche Differentialgleichung; Relationen zwischen den Coefficienten dieser Substitutionen. S. 462.
— Euler, a. a. O., Sect. I, Cap. X, Problema 130; Gauss, Commentationes Soc. Gotting. rec., Band 2, Art. 27; Jacobi, Crelle's Journal, Band 56, S. 149 ff.; Kummer, ebenda, Band 15, S. 141 ff.; Riemann, Abhandl. der Göttinger Societät, Band 7, Art. VIII; Schläfli, Mathem. Annalen, Band 3, S. 286 ff.; Goursat, Annales de l'École Normale, Serie II, Band 10, Supplem., S. 3 ff.; Jordan, a. a. O.; Pochhammer, Mathemat. Annalen, Band 35, S. 490 ff.; S. 517 ff.

Viertes Kapitel.

246. Fälle, wo die Euler'sche Transformirte der Tissot-Pochhammer-schen Differentialgleichung ein algebraisches Integral besitzt. Differentialgleichung für die Periodicitätsmoduln gewisser specieller und der allgemeinen Abel'schen Integrale. S. 467. — Fuchs, Crelle's Journal, Band 71, S. 91 ff.; Band 73, S. 324 ff.; Broecker, Inaugural-Dissertation (Berlin 1893); vergl. Abel, Mémoires présentés etc., Band 7, S. 232 ff.

247. Differentialgleichung für die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale. Fundamentalsubstitutionen. Differentialgleichungen, die zu derselben Classe gehören. Unabhängigkeit der Fundamentalsubstitutionen von den singulären Punkten. S. 472. — Fuchs, Crelle's Journal, Band 71, S. 113 ff.; S. 100 ff.; S. 103 ff.; Sitzungsberichte 1888$^{\text{II}}$, S. 1285 ff.; 1891$^{\text{I}}$, S. 164 ff.; Arbeit des Verfassers, Crelle's Journal, Band 117, S. 164.

248. Legendre'sche Differentialgleichung für die Periodicitätsmoduln des elliptischen Integrals erster Gattung. Darstellung der Periodicitätsmoduln. S. 476.
249. Fundamentalsubstitutionen der Legendre'schen Differentialgleichung. Darstellung von K und $K'i$ durch die canonischen Fundamentalsysteme. S. 481.
— Legendre, Traité des fonctions elliptiques, Band 1 (1825), S. 62 ff.; Jacobi, Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum (1829), S. 74; Kummer, a. a. O., S. 144 ff.; Fuchs, Crelle's Journal, Band 71, S. 118; S. 121 ff.; Band 83, S. 15 ff.; vergl. Tannery, Annales de l'École Normale, Serie II, Band 8, S. 175 ff.; Goursat, a. a. O., S. 40 ff.; Hermite, Cours (autogr. Vorlesung, Paris 1891), S. 213 ff.; Klein, Modulfunctionen, Band 1, S. 27 ff.

250. Differentialgleichung für die Periodicitätsmoduln des elliptischen Integrals zweiter Gattung. Darstellung der Classenbeziehung zu der Differentialgleichung für die Periodicitätsmoduln des Integrals erster Gattung. Die Legendre'sche Relation . . S. 484. — Legendre, a. a. O., S. 60 ff.; Jacobi, a. a. O.; Kummer, a. a. O.; Fuchs, Crelle's Journal, Band 83, S. 30 ff.; vergl. Klein, a. a. O.

Fünftes Kapitel

251. Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale. Die Haedenkamp-Fuchs'sche Relation . S 489	Fuchs, Crelle's Journal, Band 71, S 128ff; vergl Weierstrass, Braunsberger Programm 1848/49, S 3
252. Differentialgleichung für die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung vom Range Zwei. Fundamentalsubstitutionen. Reductibilität der zweiten Associirten . . . . . S 491	Fuchs, Crelle's Journal, Band 71, S 119; Sitzungsberichte 1889$^{\mathrm{II}}$, S 718ff; Königsberger, Mathemat Annalen, Band 1, S. 165ff,
253. Entwickelungen für die Lösungen der Differentialgleichung, der die Periodicitätsmoduln des Integrals erster Gattung genügen, in der Umgebung der singularen Punkte S 495.	Fuchs, Sitzungsberichte 1889$^{\mathrm{II}}$, S 717ff; 1890$^{\mathrm{I}}$, S 21ff
254. Entwickelungen für die Lösungen der Differentialgleichung, der die Periodicitätsmoduln des anderen Integrals erster Gattung genügen, in der Umgebung der singulären Punkte S 502	

Sechstes Kapitel.

255. Die Weierstrass'schen Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung vom Range Zwei S. 505	Fuchs, Sitzungsberichte 1889$^{\mathrm{II}}$, S 715ff
256. Herleitung der Weierstrass'schen Relationen aus dem Satze von der Vertauschung von Parameter und Argument . . S 509.	Weierstrass, a a O, Fuchs, Crelle's Journal, Band 76, S 179ff, Sitzungsber 1892$^{\mathrm{II}}$, S 1123ff.
257. Untersuchungen von Fuchs, die an den allgemeinen Abel'schen Vertauschungssatz anknüpfen. Die erste Fuchs'sche Gleichung S 513	Fuchs, Crelle's Journal, Band 76, S 179ff; Sitzungsberichte 1892$^{\mathrm{II}}$, S 1114.
258. Die zweite Fuchs'sche Gleichung S. 518	Fuchs, Crelle's Journal, Band 76, S 188ff
259. Bedeutung der Fuchs'schen Gleichungen als Relationen zwischen den Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen und gewissen bestimmten Integralen . . . . S 521	Fuchs, Sitzungsber 1892$^{\mathrm{II}}$, S 1115ff; S 1121ff.

Nachträge und Berichtigungen zum ersten Bande . . S 525

Neunter Abschnitt.

Allgemeine Theorie der bei linearen Differentialgleichungen auftretenden Gruppen.

Erstes Kapitel.

131 Der allgemeine Gruppenbegriff.

Die analytische Natur der durch eine homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$(A) \qquad P_n(x)y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_0(x)y = 0$$

definirten Functionen wird, im Sinne der von Riemann in die Analysis eingeführten Principien, bestimmt durch die Art ihres Verhaltens in der Umgebung der singulären Stellen. Wenn die Coefficienten von (A) z. B. ganze rationale Functionen sind und wenn wir, wie im achten Abschnitte, mit $a_1, a_2, \cdots a_\varrho$ die im Endlichen gelegenen wesentlichen, mit $a_{\varrho+1}, a_{\varrho+2}, \cdot a_\sigma$ die ausserwesentlichen singulären Stellen der Differentialgleichung bezeichnen, so beherrschen wir vollständig die analytische Beschaffenheit des allgemeinen Integrals von (A), wenn wir im Stande sind, für ein durch seine Anfangswerthe gegebenes Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots y_n$ die Fundamentalsubstitutionen $A_1, A_2, \cdots A_\varrho$ anzugeben, die das Fundamentalsystem $[y_x]$ bei einfachen positiven Umläufen der unabhängigen Variabeln x um die wesentlichen singulären Stellen $a_1, a_2, \cdots a_\varrho$ erfährt.

In der That gewährt uns die Kenntniss dieser Fundamentalsubstitutionen eine vollständige Einsicht in den gesammten Werthevorrath, dessen die Elemente des Fundamentalsystems $[y_x]$ in einem beliebigen Punkte der x-Ebene fähig sind.

Denken wir uns nämlich die x-Ebene durch Aussonderung der Punkte $a_1, a_2, \cdot\cdot a_\varrho$ in einen $(\varrho+1)$-fach zusammenhängenden Bereich T und diesen durch ϱ von den Punkten $a_1, a_2, \cdot a_\varrho$ nach dem Unendlichen hin gelegte Querschnitte $l_1, l_2, \cdot\cdot l_\varrho$ wieder in einen

einfach zusammenhängenden Bereich T' verwandelt, so sind die Integrale $y_1, y_2, \cdots y_n$ innerhalb T eindeutig determinirt, und der gesammte Werthevorrath dieser Integrale wird erhalten, indem wir auf die innerhalb T eindeutig bestimmten Werthe derselben alle möglichen in der Form

$$(1) \qquad S = A_{\iota_1}^{\lambda_1} A_{\iota_2}^{\lambda_2} \cdots A_{\iota_\mu}^{\lambda_\mu}$$

darstellbaren Substitutionen anwenden, wo die

$$\iota_1, \iota_2, \cdots \iota_\mu$$

alle Combinationen mit beliebiger Wiederholung der Zahlen $1, 2, \ldots \varrho$, die

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_\mu$$

alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchlaufen (vergl. Nr. 102, Bd. I, S. 369). Die Gesammtheit der Werthesysteme

$$(2) \qquad S[y_\varkappa]$$

geniesst nun eine ausgezeichnete Eigenschaft.

Greifen wir nämlich irgend ein bestimmtes derselben, etwa

$$(3) \qquad A[y_\varkappa]$$

heraus, so ist dies auch wieder ein innerhalb T' eindeutig definirtes Fundamentalsystem. Die zu demselben gehörigen Fundamentalsubstitutionen lauten (vergl. Nr. 121, Bd I, S. 439)

$$AA_\varkappa A^{-1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots \varrho)$$

und der gesammte Werthevorrath von $A[y_\varkappa]$ geht aus dem innerhalb T eindeutig definirten Werthesystem durch Anwendung der Substitutionen

$$(4) \qquad ASA^{-1}$$

hervor, die aber in ihrer Gesammtheit offenbar mit der Gesammtheit der Substitutionen S identisch sind. Andererseits ist der Werthevorrath von $A[y_\varkappa]$ auch mit dem Werthevorrath von $[y_\varkappa]$ identisch, wir können also sagen:

Wir erhalten allemal dieselbe Gesammtheit von Werthesystemen (2), wenn wir auf ein beliebiges derselben die sämmtlichen Substitutionen (1) anwenden.

Als Eigenschaft der Substitutionen (1) lässt sich dies so ausdrücken, *dass die Composition beliebig vieler dieser Substitutionen stets immer wieder eine schon in der Gesammtheit (1) enthaltene Substitution ergiebt.*

Die angegebene Eigenschaft des Werthevorraths (2) wird seit *Galois* dadurch ausgedrückt, dass man sagt, dieser Werthevorrath

bilde eine **Gruppe**; die correspondirende Eigenschaft der Substitutionen (1), die den Uebergang zwischen den einzelnen „Elementen" der Gruppe (2) vermitteln, bezeichnet man nach Cauchy, indem man die Gesammtheit (1) ein System conjugirter Substitutionen nennt. In der neueren Zeit wird diese letztere Bezeichnung seltener angewandt, man spricht gewöhnlich auch von einer Gruppe von Substitutionen. Dabei ist noch hervorzuheben, dass der Gruppenbegriff bei Galois und Cauchy nur für solche Zusammenfassungen von Werthesystemen beziehungsweise Operationen vorkommt, die wie die Permutationen einer endlichen Anzahl unbestimmter Grössen nur aus einer endlichen Anzahl von Elementen bestehen. Um die weitere Entwickelung der Gruppentheorie, besonders auch um die Darlegung ihrer Beziehungen zur Theorie der linearen Differentialgleichungen, hat sich Herr C. Jordan bedeutende Verdienste erworben. Allgemein lässt sich der Gruppenbegriff wie folgt fassen.

Man sagt von dem Inbegriffe gewisser Operationen $\omega, \omega', \omega'', \cdots$ sie seien einer Composition fähig, wenn sich aus irgend zweien derselben, etwa ω, ω', in eindeutiger Weise wieder eine Operation bilden lässt, die dann als die componirte Operation $\omega\omega'$ bezeichnet wird. Für diese Composition möge das associative Gesetz

$$\omega(\omega'\omega'') = (\omega\omega')\omega''$$

gültig sein, während die Gültigkeit des commutativen nicht erforderlich ist

Wenn dann jede durch Composition zweier Operationen der Gesammtheit $\omega, \omega', \omega'', \cdots$ entstehende Operation selbst in dieser Gesammtheit enthalten ist, so bilden die $\omega, \omega', \omega'', \cdots$ eine Gruppe.

Denkt man sich die Operationen einer solchen Gruppe Ω auf ein Object o angewandt, so erhält man eine Reihe anderer Objecte

$$(5) \qquad \omega o, \quad \omega' o, \quad \omega'' o, \cdots\cdots ,$$

und es entstehen allemal Objecte, die dieser Reihe angehören, wenn wir auf irgend ein Object derselben die Operationen der Gruppe anwenden. Wir werden uns nur mit solchen Gruppen zu beschäftigen haben, die so beschaffen sind, dass zu jeder Operation ω derselben eine Substitution ϖ der Gruppe gefunden werden kann, die nach ω auf das Object o angewandt, dasselbe reproducirt, für welche also

$$\varpi\omega o = o,$$

oder wie wir kurz schreiben wollen

$$\varpi\omega = 1$$

ist. Diese Operation $\varpi = \omega^{-1}$ heisst dann die zu ω inverse, und $\varpi\omega$ die identische Operation Wenn die Gruppe nur aus einer endlichen Anzahl von Operationen besteht, so enthält sie nothwendig zu jeder Operation die inverse und folglich auch die identische Operation Für eine aus unendlich vielen Operationen bestehende Gruppe ist das Auftreten der inversen Operationen keine nothwendige Folge des Gruppenbegriffs, sondern es muss ausdrücklich gefordert werden Wir setzen im Folgenden stets voraus, dass diese Forderung erfüllt sei.

Dann enthält die Reihe (5) auch das Object o selbst, und sie reproducirt sich vollständig, wenn wir auf irgend ein Object von (5) die sämmtlichen Operationen der Gruppe Ω anwenden.

Denken wir uns nun an Stelle von o ein anderes Object o' eingeführt, welches aus o durch eine gewisse Operation $\bar{\omega}$ hervorgehen mag,

$$o' = \bar{\omega} o,$$

von der übrigens dahingestellt bleibt, ob sie der Gruppe Ω angehört oder nicht. Wenden wir auf o die sämmtlichen Operationen ω der Gruppe Ω an, so ist

$$\bar{\omega}\omega o = \bar{\omega}\omega\bar{\omega}^{-1} o',$$

d h der Anwendung von ω auf o entspricht die Anwendung der Operation

$$\bar{\omega}\omega\bar{\omega}^{-1}$$

auf das Object o'. Wir sagen von dieser Operation, dass sie aus ω durch Transformation mit $\bar{\omega}$ hervorgegangen sei (vergl. Nr. 31, Bd. I, S. 101). Die Gesammtheit der aus allen Operationen von Ω durch Transformation mit $\bar{\omega}$ hervorgehenden Operationen bildet dann offenbar wiederum eine Gruppe Ω', sie bezieht sich ebenso auf das Object o', wie sich Ω auf das Object o bezieht; wir nennen diese beiden Gruppen Ω, Ω' einander ähnlich und sagen Ω' gehe aus Ω durch Transformation mit der Operation $\bar{\omega}$ hervor.

Mit Hülfe dieser Bezeichnungen können wir die Eigenschaft einer Gruppe mit einander paarweise inversen Operationen durch den Satz ausdrücken: Eine so beschaffene Gruppe reproducirt sich, wenn man dieselbe mit irgend einer in ihr enthaltenen Operation transformirt

132. **Gruppen mit endlicher Basis. Gruppe der Differentialgleichung.**

In den eingangs angestellten, auf die Differentialgleichung (A) bezüglichen Betrachtungen ist das Object o nichts anderes wie das Fundamentalsystem $[y_\varkappa]$, die Operationen ω sind die Substitutionen, die

dieses Fundamentalsystem bei allen möglichen Umläufen von x erfährt, die von denselben gebildete Gruppe Ω soll (vergl. Nr. 130) als die Gruppe der Differentialgleichung (A) bezeichnet werden.

Diese Gruppe erfüllt offenbar die Forderung, dass ihre Operationen paarweise zu einander invers sind, denn mit jeder einem gewissen Umlaufe von x entsprechenden Substitution S ist auch die dem in entgegengesetztem Sinne beschriebenen Umlaufe entsprechende Substitution S^{-1} in der Gruppe enthalten. Die oben zur Erläuterung des Gruppencharakters herangezogene Eigenschaft, dass die Gesammtheit der Substitutionen (4) mit der Gesammtheit der Substitutionen S selbst identisch sei, erscheint also jetzt als Folge des Auftretens der zu jeder Substitution inversen in der Gruppe Ω.

Wählen wir an Stelle von $[y_\varkappa]$ ein anderes Fundamentalsystem $[z_\varkappa]$, welches mit $[y_\varkappa]$ durch die Substitution

$$[z_\varkappa] = B[y_\varkappa]$$

verknüpft ist, so erfährt $[z_\varkappa]$ bei den Umläufen von x die Substitutionen der aus Ω durch Transformation mit B entstehenden Gruppe, die wir durch das Symbol

$$B\Omega B^{-1}$$

darstellen wollen, und die also ebensowohl wie Ω selbst als die Gruppe der Differentialgleichung (A) angesehen werden kann.

Man kann auch die Gesammtheit der Umläufe, die die Variable x in der Fläche T vollzieht, als eine Gruppe ansehen, wenn man einen solchen Umlauf als Operation auffasst, die auf einen Punkt x der Ebene, der dann als Object fungirt, ausgeübt wird. Man kann dann sagen, die zu dem Fundamentalsystem $[y_\varkappa]$ gehörige Gruppe Ω sei aus dieser Gruppe der Umläufe transformirt mittelst einer Operation, die darin besteht, dass wir das Werthesystem der $[y_\varkappa]$ berechnen, welches zu dem Punkte x der Ebene gehört. Diese Operation ist also nichts anderes wie die Integration der Differentialgleichung (A).

Die Gruppe der Umläufe sowohl, wie die aus den Substitutionen (1) gebildete Gruppe Ω besitzt aber noch eine ausgezeichnete Eigenschaft. Wir erhalten nämlich alle Substitutionen dieser Gruppe, wenn wir die ϱ Fundamentalsubstitutionen der Differentialgleichung und ihre inversen auf alle möglichen Arten mit einander componiren, ebenso entsteht die Gruppe der Umläufe von x innerhalb T durch wiederholte Ausführung der einfachen positiven und negativen Umkreisungen um die Punkte $a_1, a_2, \cdot\ \cdot\ a_\varrho$.

Allgemein können wir uns vorstellen, dass man von einer gewissen endlichen Anzahl von Operationen

(6) $$\omega_1, \quad \omega_2, \cdots \omega_p$$

ausgeht und diese auf alle möglichen Arten mit einander componirt; die Gesammtheit der auf diese Weise entstehenden Operationen bildet dann offenbar eine Gruppe Wenn in dem Systeme (6) zu jeder der darin vorkommenden Operationen auch ihre inverse enthalten ist, so genügt die aus (6) entspringende Gruppe der Forderung, dass ihr auch die inversen Operationen sämmtlicher in der Gruppe vorkommenden Operationen angehören. Es kann aber die Gruppe diese Forderung erfüllen, auch ohne dass das System (6) die inversen Operationen aller darin vorkommenden $\omega_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \quad p)$ in sich schliesst; dieser Fall tritt nämlich ein, wenn z. B. die zu einem $\omega_\varkappa$ inverse Operation $\omega_\varkappa^{-1}$ durch Composition der Operationen (6) erzeugt werden kann.

Wenn eine Gruppe durch Composition aus dem Systeme einer endlichen Anzahl von Operationen entspringt, so nennen wir dieses System eine Basis oder ein System erzeugender Operationen der Gruppe, und sagen von der Gruppe selbst, sie besitze eine endliche Basis. Die Basis einer solchen Gruppe ist nicht eindeutig bestimmt, sondern es kann verschiedene Systeme, die ihrerseits eine verschiedene Anzahl von Operationen enthalten können, geben, welche als Basis aufgefasst dieselbe Gruppe erzeugen. Hat man eine Basis vorgelegt, so kann dieselbe überflüssige Elemente enthalten, indem nämlich einzelne in der Basis auftretende Operationen schon durch Composition der übrigen erzeugt werden können. Enthält die Basis kein in diesem Sinne überflüssiges Element, so wollen wir sie eine reducirte Basis nennen.

Für die Gruppe der Differentialgleichung (A) erhalten wir also stets eine Basis, wenn wir ein System von Fundamentalsubstitutionen nebst ihren inversen betrachten Ist der Punkt $x = \infty$ eine wesentliche singuläre Stelle von (A) und bezeichnet A_0 die Substitution, welche das Fundamentalsystem $[y_\varkappa]$ bei einem einfachen positiven Umlaufe von x um den unendlich fernen Punkt erfährt, so bilden auch die $\varrho + 1$ Substitutionen

(7) $$A_0, A_1, \cdot \cdot A_\varrho$$

eine Basis der Gruppe der Differentialgleichung, denn da (vergl Nr. 122)

$$A_0 = (A_1 A_2 \cdot \cdot A_\varrho)^{-1} = A_\varrho^{-1} A_{\varrho-1}^{-1} \cdot \cdot A_1^{-1}$$

ist, so hat man

$$A_\varkappa^{-1} = A_{\varkappa+1} \cdot \cdot \cdot A_\varrho A_0 A_1 \cdot \quad A_{\varkappa-1}.$$

Ist $x = \infty$ keine wesentliche singuläre Stelle, also $A_0 = 1$, so bilden die ϱ Fundamentalsubstitutionen selbst schon eine Basis Wir bemerken

aber gleich hier, dass die Basis (7), auch wenn A_0 nicht die identische Substitution bedeutet, nicht nothwendig eine reducirte sein muss.

Wir hatten den allgemeinen Gruppenbegriff formulirt, nachdem wir an der Gesammtheit der Substitutionen, die ein Fundamentalsystem bei allen möglichen Umläufen der unabhängigen Variabeln erfährt, den Gruppencharakter beobachtet hatten. Die Gesammtheit dieser Substitutionen, die Gruppe der Differentialgleichung, kann nun auch aufgefasst werden als der Inbegriff aller linearen Substitutionen, die ein Fundamentalsystem mit seinen sämmtlichen Zweigen verknüpfen Wenn wir jetzt allgemein den Inbegriff aller Substitutionen betrachten, die ein beliebiges Fundamentalsystem nicht nur in seine Zweige, sondern überhaupt in alle anderen möglichen Fundamentalsysteme überführen, so gelangen wir zu einer neuen Gruppe, die in ihrem Charakter von der Gruppe Ω der Differentialgleichung wesentlich verschieden ist

Der Uebergang von $[y_\varkappa]$ zu einem beliebigen anderen Fundamentalsysteme wird vermittelt durch die allgemeinste lineare Substitution

$$(8) \qquad y'_\iota = \sum_{\varkappa=1}^{n} \alpha_{\iota\varkappa} y_\varkappa \qquad (\iota = 1, 2, \ldots n),$$

deren Coefficienten willkürliche nur der Ungleichheitsbedingung

$$(9) \qquad |\alpha_{\iota\varkappa}| \neq 0 \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

unterworfene Constanten sind. Die Gesammtheit aller dieser linearen Substitutionen bildet offenbar auch eine Gruppe, da die Composition zweier derselben wieder eine lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante liefert Diese Gruppe enthält auch die identische Substitution, und ihre Operationen sind paarweise invers, überdies enthält sie natürlich auch sämmtliche Operationen von Ω, oder wie wir sagen wollen, sie enthält die Gruppe Ω selbst. Es besteht aber zwischen der Natur der Gruppe Ω und der der Gruppe, die durch die Gesammtheit der Substitutionen (8) gegeben wird, ein tiefgreifender Unterschied; um denselben darzulegen, müssen wir an einige einfache Begriffe der Functionenlehre erinnern.

133. Allgemeines über Punktmengen. Abzählbare und continuirliche Gruppen.

Betrachtet man eine endliche Anzahl von complexen Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots x_n$, so soll ein System von Werthen dieser Veränderlichen als ein Punkt oder eine Stelle bezeichnet werden Die Gesammtheit aller Stellen, die einer gewissen Definition gemäss bestimmt

werden, fassen wir in den Begriff einer Punktmenge P zusammen. Unter der Umgebung einer Stelle $(a_1, a_2, \cdots a_n)$ verstehen wir die Gesammtheit aller Stellen $(x_1, x_2, \cdots x_n)$, für welche

$$|x_1 - a_1| < \delta, \quad |x_2 - a_2| < \delta, \quad \cdots \quad |x_n - a_n| < \delta,$$

wo δ eine bestimmte positive reale Grösse bedeutet; oder wenn

$$x_\varkappa = x_\varkappa' + i x_\varkappa'', \quad a_\varkappa = a_\varkappa' + i a_\varkappa'' \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdot \; n)$$

gesetzt, und unter den $x_\varkappa', x_\varkappa'', a_\varkappa', a_\varkappa''$ reale Grössen verstanden werden, so kann als die Umgebung der Stelle $(a_1, a_2, \cdots a_n)$ auch die Gesammtheit derjenigen Stellen $(x_1, x_2, \cdots x_n)$ definirt werden, für welche

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \{(x_\varkappa' - a_\varkappa')^2 + (x_\varkappa'' - a_\varkappa'')^2\} < \varrho^2,$$

wo ϱ eine positive reale Grösse bedeutet.

Man sagt von einer Stelle

$$x = (x_1, x_2, \cdots x_n),$$

sie liege innerhalb einer gewissen Punktmenge P, wenn nicht nur x selbst, sondern auch jede Stelle in einer gewissen Umgebung von x der Punktmenge angehört; ebenso sagt man, die Stelle x liege ausserhalb der Punktmenge P, wenn weder x noch die Stellen einer gewissen Umgebung von x zur Punktmenge P gehören.

Eine Stelle x heisst eine Grenzstelle von P, wenn sich in jeder noch so kleinen Umgebung von x Stellen befinden, die der Punktmenge P angehören. Von einer Grenzstelle bleibt es dahingestellt, ob sie selbst zur Punktmenge gehört oder nicht.

Es kann Punktmengen geben, die keine einzige innerhalb derselben gelegene Stelle besitzen, solche Punktmengen heissen discrete (Punktmengen). Dagegen besitzt jede aus unendlich vielen Punkten bestehende Punktmenge nothwendig Grenzstellen. Die Gesammtheit der Grenzstellen einer Punktmenge P bildet ihrerseits wieder eine Punktmenge, die man nach Herrn G. Cantor die erste Ableitung der Punktmenge P nennt und durch P' bezeichnet. Wenn jeder Punkt der ersten Ableitung P' selbst zu P gehört, so heisst P eine abgeschlossene, im entgegengesetzten Falle eine unabgeschlossene Punktmenge.

Ist P eine abgeschlossene Punktmenge, so liegt jeder nicht zu P gehörige Punkt A ausserhalb P. Es giebt also eine gewisse Umgebung von A, die so beschaffen ist, dass auch kein Punkt dieser Umgebung zu P gehört. Nimmt man diese Umgebung möglichst gross, so bezeichnet man sie als die absolute Umgebung von A in Bezug auf P.

Sei A_1 ein Punkt der absoluten Umgebung von A, so liegt auch A_1 ausserhalb P und besitzt folglich ebenfalls eine bestimmte absolute Umgebung; sei A_2 ein Punkt dieser absoluten Umgebung von A_1, so liegt auch A_2 ausserhalb P u. s w Von der Gesammtheit der Punkte, zu denen man auf diese Weise von A ausgehend gelangen kann, sagt man, sie hängen mit A zusammen. Diese Gesammtheit bildet ein Continuum. Man kann das Continuum auch wie folgt definiren.

Jede aus lauter inneren Punkten bestehende Punktmenge, die so beschaffen ist, dass sich zwischen irgend zwei Punkten derselben eine endliche Anzahl von Punkten so einschalten lässt, dass jeder dieser Punkte in der Umgebung des vorhergehenden liegt, d. h mit anderen Worten, jede aus lauter inneren Punkten bestehende Punktmenge, deren sämmtliche Stellen unter einander zusammenhängen, bildet ein Continuum.

Eine aus lauter inneren Punkten bestehende Punktmenge, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Gesammtheit aller Stellen, die nicht zu einer gewissen abgeschlossenen Punktmenge P gehören, zerfällt in eine endliche oder unendliche Anzahl von Continuis, von denen man sagt, sie seien durch die Punktmenge P begrenzt. Ueberhaupt heisst ein jedes Continuum, welches nicht aus der Gesammtheit aller Punkte $(x_1, x_2, \cdot\; x_n)$ besteht, ein begrenztes, und zwar ein abgeschlossenes oder unabgeschlossenes, je nachdem seine Grenzstellen dem Continuum hinzugezählt werden oder nicht*) Bei Festhaltung der vorhin gegebenen Definition des Continuums ist also stets ein unabgeschlossenes Continuum gemeint.

Die Gesammtzahl der Stellen einer complexen Variabeln x, an denen sich ein System von n monogenen Functionen $y_1(x), y_2(x), \cdots y_n(x)$ dieser Variabeln bestimmt verhält (Nr 7, Bd. I, S. 16) bildet ein im Allgemeinen unabgeschlossenes Continuum, welches von den Unbestimmtheitsstellen jener Functionen begrenzt wird; die Gesammtheit der Stellen, wo sich jene Functionen regulär verhalten, bildet stets ein unabgeschlossenes Continuum, dessen Begrenzung von der Punktmenge der singulären Stellen gebildet wird

Wenn man die Elemente einer irgendwie definirten Menge P so anordnen kann, dass jedes Element dieser Menge einer der Zahlen 1, 2, 3, $\cdots$ eindeutig zugeordnet erscheint, so sagt man, die Menge P sei abzählbar. Ein Continuum kann niemals eine abzählbare Punktmenge bilden, sondern jede abzählbare Punktmenge ist discret

*) Wir machen ausdrücklich auf den Unterschied zwischen „Grenzstellen" und „Punkten der Begrenzung" aufmerksam.

Hat man ein System von n monogenen Functionen

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \cdots y_n(x)$$

einer complexen Variabeln x und betrachtet die Gesammtheit der Werthesysteme oder Punkte $(y_1, y_2, \cdot\ \cdot y_n)$, die zu einem regulären Werthe x der unabhängigen Variabeln gehören, so ist die von diesen Werthesystemen gebildete Punktmenge P stets abzählbar, wenn sich das von den regulären Stellen der Functionen $y_1(x), y_2(x), \cdot\ y_n(x)$ in der x-Ebene gebildete Continuum durch eine abzählbare Menge von Querschnitten $l_1, l_2, l_3, \cdot\ \cdot\ \cdot$ in ein einfach zusammenhängendes T verwandeln lässt, innerhalb dessen die Functionen $y_1(x), y_2(x), \cdot\ \cdot y_n(x)$ eindeutig definirt sind.

Wir wollen diesen Satz nur in dem für uns allein in Betracht kommenden Falle beweisen, wo die Anzahl der Querschnitte $l_1, l_2, \cdot\ \cdot$ eine **endliche** ist. Sei ϱ diese Anzahl, dann entsteht also jedes System von Zweigen der Functionen $y_1(x), y_2(x), \cdots y_n(x)$ aus einem solchen innerhalb $\overline{T}$ eindeutig definirten Systeme, indem man x Wege beschreiben lässt, die die Querschnitte beliebig oft und in beliebiger Aufeinanderfolge überschreiten. Wir betrachten zwei Wege von x, die durch stetige Deformation innerhalb $\overline{T}$ aus einander hervorgehen, als nicht verschieden und bezeichnen mit $\omega_\varkappa$ einen von x ausgehenden geschlossenen Weg, der den Querschnitt $l_\varkappa$ einmal in positivem Sinne überschreitet, mit $\omega_\varkappa^{-1}$ den in entgegengesetztem Sinne durchlaufenen Weg $\omega_\varkappa$. Dann bildet die Gesammtheit aller für die Fortsetzung unseres Functionssystems in Betracht kommenden geschlossenen Wege von x eine Gruppe (vergl Nr. 132, S. 5), für welche die 2ϱ Operationen

$$\omega_\varkappa,\ \omega_\varkappa^{-1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdot\ \varrho)$$

eine Basis darstellen. Wenn wir nachweisen, dass die Gesammtheit der Operationen dieser Gruppe Ω eine abzählbare Menge ist, so ist damit auch unser Satz bewiesen

Wir führen diesen Nachweis, indem wir eine Methode angeben, mit Hülfe deren sich die Operationen der Gruppe Ω den ganzen Zahlen $1, 2, 3, \cdots\cdot$ eindeutig zuordnen lassen. Jede Operation von Ω lässt sich in der Form

$$\omega = \omega_\alpha^{\lambda_\alpha} \omega_\beta^{\lambda_\beta} \cdots \omega_\nu^{\lambda_\nu}$$

darstellen, wo $\alpha, \beta, \cdot\ \cdot\ \nu$ Zahlen der Reihe $1, 2, \cdot\ \cdot\ \varrho$ bedeuten, von denen nicht zwei unmittelbar aufeinander folgende einander gleich sind, während die $\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \cdots \lambda_\nu$ irgendwelche ganzzahlige positive oder negative Werthe haben Man nennt die Summe

$$|\lambda_\alpha| + |\lambda_\beta| + \cdot\ \cdot + |\lambda_\nu|$$

das Gewicht der Operation ω. Wir denken uns nun zunächst die Operationen von Ω nach Classen geordnet, so dass in einer Classe alle Operationen mit demselben Gewicht vereinigt sind; die Anzahl der Operationen innerhalb einer Classe ist dann eine endliche, wir können dieselben also in einer bestimmten Reihenfolge anordnen. Durch die Anordnung der Classen einerseits nach der wachsenden Höhe der Gewichte, und die Anordnung der Operationen innerhalb einer Classe andererseits, ist aber die gesammte Anordnung aller Operationen der Gruppe Ω gegeben.

Wir sagen von einer Gruppe überhaupt, sie sei eine abzählbare, wenn die Menge ihrer Operationen eine abzählbare ist; die eben durchgeführte Betrachtung lehrt, dass jede Gruppe, die eine endliche Basis hat (Nr. 132, S. 6), eine abzählbare Gruppe ist. Die Bezeichnung abzählbare Gruppe ist nur als Abkürzung für das schwerfällige aber genauere: „Gruppe einer abzählbaren Menge von Operationen" anzusehen, ebenso wie man eine Gruppe, deren Operationen nur in endlicher Anzahl vorhanden sind, schlechtweg eine endliche Gruppe nennt.

Kehren wir zu der Betrachtung der Gruppe Ω von linearen Substitutionen zurück, durch deren Operationen ein Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots y_n$ der Differentialgleichung (A) mit seinen sämmtlichen Zweigen verknüpft ist, so können wir sagen:

Die Gruppe Ω unserer Differentialgleichung (A) ist eine abzählbare.

Hierzu ist noch Folgendes zu bemerken.

Wenn wir, der bequemeren Ausdrucksweise wegen, die complexen Grössen $y_1, y_2, \cdots y_n$ als die Coordinaten eines Punktes oder einer Stelle in der complexen n-fachen Mannigfaltigkeit auffassen, so wird in dieser Mannigfaltigkeit dadurch, dass wir für die $y_1, y_2, \cdots y_n$ ein Fundamentalsystem unserer Differentialgleichung (A) nehmen, ein eindimensionales Gebilde, oder wie man sich auch ausdrückt, ein Gebilde $(n-1)^{\text{ter}}$ Stufe fixirt. Wir wollen dieses Gebilde als ein Integralgebilde, oder wohl auch als eine Integralcurve $[y_x]$ bezeichnen und sagen, das zu einem regulären Punkte x gehörige Werthesystem des Fundamentalsystems $[y_n]$ stelle einen Punkt dieser Integralcurve dar.

Durch die Substitutionen der Gruppe Ω wird dann jeder Punkt der Integralcurve $[y_x]$ in eine Reihe gewisser anderer Punkte derselben Curve transformirt, und die so auf der Integralcurve entstehende Punktmenge ist eine abzählbare

Bezeichnet $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n$ irgend eine Stelle der n-fachen complexen Mannigfaltigkeit, so können wir offenbar durch diesen Punkt unzählig

viele Integralcurven hindurchlegen, sofern nicht alle $\zeta_\varkappa$ ($\varkappa = 1,$
Null sind, d. h. falls der betrachtete Punkt nicht der Nu
Wir haben zu dem Ende nur ein Fundamentalsystem z_1, z_2
zustellen, dessen Elemente in einem noch beliebig zu wähl
lären Punkte $x = x_0$ die Werthe

$$z_\nu = \zeta_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdot\, n)$$

annehmen; solcher Fundamentalsysteme giebt es dann noc
viele, da ja für die $(n-1)$ ersten Ableitungen der $z_\varkappa$ im Pu
noch willkürliche Werthe vorgeschrieben werden können.

Wenn für das Fundamentalsystem $[z_\varkappa]$

$$[z_\varkappa] = B[y_\varkappa]$$

ist, wo B eine lineare Substitution bedeutet, so transformir
stitutionen der Gruppe

$$B\Omega B^{-1}$$

jeden Punkt der Integralcurve $[z_\nu]$ in eine Reihe von Punkte
wieder eine abzählbare Punktmenge bilden, und ebenso ist
menge, welche aus irgend einem Punkte der Integralcurve
die Substitutionen der Gruppe Ω selbst hervorgeht, eine
Die Substitutionen von Ω erzeugen also nicht nur aus d
der Integralcurve $[y_\varkappa]$, sondern ebenso auch aus jedem
anderen Punkte der complexen n-fachen Mannigfaltigkeit —
punkt ausgeschlossen — eine abzählbare Menge von Pun
liegen aber nicht immer mit dem Ausgangspunkte auf
Integralcurve.

Die Substitutionen (8), deren Coefficienten der Ungl
(Nr. 132, S. 7) Genüge leisten, sind so beschaffen, dass man
derselben von jeder Integralcurve zu jeder anderen überg
Man kann demnach durch die Operationen der von der G
der Substitutionen (8) gebildeten Gruppe auch aus jedem
complexen n-fachen Mannigfaltigkeit — den Nullpunkt
geschlossen — jeden beliebigen anderen Punkt dieser Mann
und somit ein Continuum von Punkten erzeugen. Diese
also jedenfalls nicht abzählbar, man sagt von derselb
continuirlich.

Zweites Kapitel.

134. Begriff der continuirlichen Transformationsgruppe.

Die Theorie der continuirlichen Gruppen ist in der neueren Zeit besonders von Herrn Lie ausgebildet und mit der Theorie der Differentialgleichungen in enge Beziehung gesetzt worden. Wir werden im Folgenden einiges aus den Grundlagen der Lie'schen Theorie zu entwickeln haben und machen uns darum zunächst mit den hauptsächlichen Bezeichnungen, deren sich Herr Lie bedient, bekannt.

Ist ein System von n Functionen $f_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots n)$ der n veränderlichen Grössen $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ gegeben, welches überdies noch von gewissen ebenfalls veränderlichen Parametern $p_1, p_2, \cdots p_r$ abhängt, so definiren die Gleichungen

$$\bar{\eta}_\varkappa = f_\varkappa(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n \mid p_1, p_2, \cdots p_r) = f_\varkappa(\eta \mid p) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n) \tag{10}$$

eine Transformation der $[\eta_\varkappa]$ in die $[\bar{\eta}_\varkappa]$, wenn wir uns die $p_1, p_2, \cdots p_r$ fest, und eine continuirliche Schaar von Transformationen, wenn wir uns die Parameter veränderlich denken.

Damit es möglich sei, die $[\eta_\varkappa]$ auch umgekehrt durch die $[\bar{\eta}_\varkappa]$ darzustellen, d. h also damit die Gleichungen (10) eine Auflösung nach den $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ zulassen,

$$\eta_\varkappa = F_\varkappa(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \cdots \bar{\eta}_n \mid p_1, p_2, \cdots p_r), \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n) \tag{11}$$

ist bekanntlich nothwendig und hinreichend, dass die Functionaldeterminante

$$\left| \frac{\partial f_\varkappa}{\partial \eta_\iota} \right| \qquad (\varkappa, \iota = 1, 2, \cdots n)$$

nicht identisch verschwindet.

Die n Functionen $f_\varkappa$ hängen von den r Parametern $p_1, p_2, \cdots p_r$ wesentlich ab, d. h. sie lassen sich nicht als Functionen von weniger als r Functionen der $p_1, p_2, \cdots p_r$ darstellen, wenn sie nicht sämmtlich einer partiellen Differentialgleichung von der Form

$$\sum_{i=1}^{r} \varphi_i(p_1, p_2, \cdots p_r) \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0$$

genügen, deren Coefficienten φ_i blosse Functionen der $p_1, p_2, \cdots p_r$ sind. Denn damit eine Function $f(p_1, p_2, \cdots p_r)$ der r Grössen p_i nur von $r - \varrho$ Functionen dieser Grössen

$$q_\lambda(p_1, \cdots p_r) \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots r - \varrho)$$

abhängt, d. h. in der Form

$$f(p_1, \cdots p_r) = g(q_1, \cdots q_{r-\varrho})$$

darstellbar sei, ist erforderlich, dass $f(p_1, \cdots p_r)$ die ϱ Gleichungen

(12) $$\sum_{i=1}^{r} \varphi_{i\lambda}(p_1, p_2 \cdots p_r) \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots \varrho)$$

erfüllt, wo die $\varphi_{i\lambda}(p_1, p_2, \cdots p_r)$ wohlbestimmte Functionen ihrer Argumente bedeuten, die sich aus den Determinanten des rechteckigen Systems

$$\left(\frac{\partial q_i}{\partial p_\lambda}\right) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots r - \varrho \\ \lambda = 1, 2, \cdots r \end{pmatrix}$$

in einfacher Weise zusammensetzen.

Bemerken wir gleich, dass wenn $f(p_1, \cdots p_r)$ auch nicht als Function von weniger als $r - \varrho$ Functionen der $p_1, \cdots p_r$ dargestellt werden kann, keine von den Gleichungen (12) unabhängige lineare partielle Differentialgleichung derselben Form durch $f(p_1, \cdots p_r)$ befriedigt werden darf, so dass also in diesem Falle die Gleichungen (12) ein sogenanntes vollständiges System bilden müssen; wir kommen später auf den von Jacobi und Clebsch herrührenden Begriff des vollständigen Systems noch ausführlicher zurück

Es mögen in den Gleichungen (10) die r Parameter $p_1, p_2, \cdots p_r$ wesentliche sein. Seien

$$\left.\begin{aligned} \eta_\varkappa' &= f_\varkappa(\eta \mid p') \\ \eta_\varkappa'' &= f_\varkappa(\eta \mid p'') \end{aligned}\right\} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

irgend zwei Transformationen der Schaar (10); denken wir uns dieselben hintereinander ausgeführt, d. h. bilden wir

(13) $$\eta_\varkappa^{(3)} = f_\varkappa(\eta' \mid p'') \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

so werden die Transformationen der Schaar (10) eine Gruppe bilden, wenn die componirte Transformation (13) allemal auch der Schaar selbst angehört, d. h. wenn man hat

$$f_\varkappa(\eta' \mid p'') = f_\varkappa(\eta \mid p^{(3)}) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

wo die $p_1^{(3)}, p_2^{(3)}, \cdots p_r^{(3)}$ wohlbestimmte Functionen der $p_1', p_2', \cdot\ p_r'$, $p_1'', p_2'', \cdots p_r''$ sind. Diese Gruppe heisst dann nach Herrn Lie eine r-gliedrige continuirliche Transformationsgruppe, und es stellen dann, wie leicht einzusehen ist, auch die durch Auflösung der Gleichungen (10) entstandenen Gleichungen (11) eine r-gliedrige continuirliche Transformationsgruppe dar. Wenn insbesondere diese letztere Gruppe mit der ursprünglichen identisch ist, so enthält also die durch die Gleichungen (10) dargestellte Gruppe zu jeder ihrer Transformationen auch deren inverse, sie besteht aus paarweise inversen Transformationen, und enthält folglich auch die identische Transformation

$$\bar{\eta}_\varkappa = \eta_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \quad n).$$

Mit Benutzung dieser Terminologie können wir also sagen: Die Gleichungen (8) (S. 7) stellen uns (falls die $\alpha_{\iota\varkappa}$ durch die Ungleichung (9) beschränkt werden, was wir im Folgenden stets stillschweigend voraussetzen, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich hervorgehoben wird) eine n^2-gliedrige continuirliche Transformationsgruppe L mit paarweise inversen Transformationen dar.

An dieser Gruppe, der sogenannten allgemeinen (homogenen) linearen Gruppe von n Veränderlichen, lassen sich einige der fundamentalen Begriffe, deren Einführung man Herrn Lie verdankt, in besonders einfacher Weise erläutern; wir brauchen die Gruppe L zu diesem Zwecke nur mit den Entwickelungen des zweiten Abschnittes in Verbindung zu setzen.

135. Die allgemeine lineare homogene Gruppe. Erweiterung. Differentialinvarianten. Infinitesimale Transformation.

Indem wir vorläufig von der Differentialgleichung (A) mit rationalen Coefficienten abstrahiren, betrachten wir, wie in der Nr. 14, die $y_1, y_2, \cdots y_n$ als irgendwie gegebene monogene Functionen von x, zwischen denen keine homogene lineare Beziehung mit von x unabhängigen Coefficienten besteht

Die homogene lineare Differentialgleichung

$$(1) \qquad (-1)^n D(y, y_1, y_2, \cdot\ y_n) = 0,$$

der (vergl. Nr. 14) die $y_1, y_2, \cdot\ y_n$ Genüge leisten, wird dann auch durch alle Functionen $[\eta_\varkappa]$ befriedigt, die aus den $[y_\varkappa]$ durch die Transformationen der Gruppe L hervorgehen, und wir wissen überdies, dass die Coefficienten von (1), d. h. die Determinantenquotienten

(2) $$p_\varkappa = (-1)^n \frac{D_\varkappa(y_1, y_2, \cdots y_n)}{D(y_1, y_2, \cdots y_n)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

absolut ungeändert bleiben, wenn wir auf die $[y_\varkappa]$ irgend eine Transformation der Gruppe L ausüben, d. h. wenn wir das Fundamentalsystem $[y_\varkappa]$ durch irgend ein anderes Fundamentalsystem $[\eta_\varkappa]$ ersetzen. Diese Determinantenquotienten sind also Invarianten und zwar Differentialinvarianten n^{ter} Ordnung unserer Gruppe L, weil sie nicht nur die Grössen $[y_\varkappa]$ selbst, sondern auch noch deren Ableitungen bis zur n^{ten} Ordnung enthalten. Aus dem in der Nr. 15 bewiesenen Appell'schen Satze folgt, dass jede rationale Function der $[y_\varkappa]$ und ihrer Ableitungen, die bei den Transformationen von L ungeändert bleibt, d. h. also jede Differentialinvariante der Gruppe L, als rationale Function der $p_1, p_2, \cdots p_n$ und ihrer Ableitungen dargestellt werden kann. Es werden also die n Determinantenquotienten als ein System unabhängiger Differentialinvarianten von L bezeichnet werden müssen.

Wir können aber die Gruppe L leicht durch eine andere ersetzen, für welche die Ausdrücke (2) nicht mehr Differentialinvarianten, sondern wirkliche Invarianten sind. Differentiiren wir nämlich die Gleichungen

(3) $$\eta_i = \sum_{\varkappa=1}^{n} \alpha_{i\varkappa} y_\varkappa \qquad (i = 1, 2, \cdots n),$$

die uns die Gruppe L darstellen, ν-mal nach x, so bestimmen die Gleichungen

(4) $$\eta_i^{(\lambda)} = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{i\varkappa} y_\varkappa^{(\lambda)} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \cdots \nu)$$

eine Gruppe, die wir nach Herrn Lie die ν-mal erweiterte Gruppe L nennen und durch $L^{(\nu)}$ bezeichnen wollen. Die Operationen der Gruppe $L^{(\nu)}$ sind also Transformationen des Systems der $n(\nu + 1)$ Grössen

$$y_i^{(\lambda)} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \cdots \nu, \; i = 1, 2, \cdots n),$$

eine Differentialinvariante ν^{ter} Ordnung von L ist demnach eine einfache Invariante von $L^{(\nu)}$, d. h. eine Function der durch die Operationen von $L^{(\nu)}$ transformirten Grössen, die bei Ausübung irgend einer Transformation dieser Gruppe in sich selbst übergeht.

Bedeutet

$$R\left(y_1, \cdots y_n, y_1', \cdots y_n', \cdots, y_1^{(\nu)}, \cdots y_n^{(\nu)}\right) = R(y)$$

eine solche Differentialinvariante ν^{ter} Ordnung von L, so besteht die Identität

(5) $$R(y) = R(\eta),$$

wenn die $\eta_i^{(\lambda)}$ mit den $y_i^{(\lambda)}$ durch die Gleichungen (4) verknüpft sind. Es muss sich folglich die Gleichung (5) durch Elimination der α_{ix} aus den Gleichungen (4) ergeben. Da aber diese Gleichungen für Werthe der α_{ix}, die der Ungleichung (9) der Nr. 132 (S. 7) Genüge leisten, offenbar algebraisch unabhängig von einander sind, so ist eine Elimination der n^2 Grössen α_{ix} nicht möglich, wenn $\nu < n$ ist, d. h. es kann keine Differentialinvariante von niedrigerer als der n^{ten} Ordnung geben Für $\nu = n$ ergiebt die Elimination der α_{ix} zwischen je $n^2 + 1$ der $n(n+1)$ Gleichungen (4) genau n von einander unabhängige Beziehungen zwischen den $y_i^{(\lambda)}$ und den $\eta_i^{(\lambda)}$, entsprechend den n unabhängigen Differentialinvarianten n^{ter} Ordnung (2).

Wir können nun leicht ein System partieller Differentialgleichungen aufstellen, welches durch jede Differentialinvariante ν^{ter} Ordnung $R(y)$ befriedigt wird, und dessen jede Lösung umgekehrt auch eine solche Differentialinvariante darstellt

Soll nämlich $R(y)$ eine Differentialinvariante ν^{ter} Ordnung bedeuten, so muss $R(\eta)$ mit $R(y)$ identisch, d h. also von den α_{ix} unabhängig sein. Nun ist aber

$$\frac{\partial R(\eta)}{\partial \alpha_{ix}} = y_x \frac{\partial R(\eta)}{\partial \eta_i} + y_x' \frac{\partial R(\eta)}{\partial \eta_i'} + \quad + y_x^{(\nu)} \frac{\partial R(\eta)}{\partial \eta_i^{(\nu)}},$$

diese Ausdrücke müssen also für $i, x = 1, 2, \cdot\; n$ verschwinden. Das auf diese Weise entstehende Gleichungssystem ist aber offenbar dem folgenden äquivalent:

(6) $$y_x \frac{\partial R(y)}{\partial y_i} + y_x' \frac{\partial R(y)}{\partial y_i'} + \cdots + y_x^{(\nu)} \frac{\partial R(y)}{\partial y_i^{(\nu)}} = 0, \quad (i, x = 1, 2, \quad n)$$

und dieses System partieller Differentialgleichungen ist also dasjenige, dessen Existenz wir behauptet hatten Die Thatsache, dass die Invariante $R(y)$ der Gruppe $L^{(\nu)}$ den Gleichungen (6) genügt, können wir aber noch etwas anders aussprechen.

Wenn den Coefficienten α_{ix} der Transformation (4) Werthe beigelegt werden, die sich von den der identischen Transformation entsprechenden Werthen

$$\alpha_{ix} = \delta_{ix},$$

wo wie gewöhnlich

$$\delta_{ix} = 0 \quad \text{für } i \gtrless x, \quad \delta_{ii} = 1, \qquad (i, x = 1, 2, \quad n)$$

gesetzt wurde, nur unendlich wenig unterscheiden, so gehen die $y_i^{(\lambda)}$ in unendlich wenig von denselben verschiedene Grössen über, oder wie

wir sagen wollen, die $y_\iota^{(\lambda)}$ erfahren eine infinitesimale Transformation.

Sei

$$\bar{\eta}_\iota^{(\lambda)} = \sum_{\varkappa=1}^{n} (\delta_{\iota\varkappa} + d\alpha_{\iota\varkappa}) y_\varkappa^{(\lambda)} \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 0, 1, & \nu \\ \iota = 1, 2, & n \end{pmatrix}$$

eine solche infinitesimale Transformation, also die $d\alpha_{\iota\varkappa}$ unendlich kleine Grössen, so ist

$$dy_\iota^{(\lambda)} = \bar{\eta}_\iota^{(\lambda)} - y_\iota^{(\lambda)} = \sum_{\varkappa=1}^{n} y_\varkappa^{(\lambda)} d\alpha_{\iota\varkappa},$$

und irgend eine Function $f(y)$ der $y_\iota^{(\lambda)}$ verwandelt sich bei Anwendung dieser Transformation in

$$f(\bar{\eta}) = f(y) + \sum_{\iota,\varkappa=1}^{n} d\alpha_{\iota\varkappa} \left(\frac{\partial f}{\partial y_\iota} y_\varkappa + \frac{\partial f}{\partial y_\iota'} y_\varkappa' + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y_\iota^{(\nu)}} y_\varkappa^{(\nu)} \right).$$

Das Bestehen der partiellen Differentialgleichungen (6) besagt also, dass die Function $R(y)$, die denselben Genüge leistet, bei den infinitesimalen Transformationen der Gruppe $L^{(\nu)}$ ungeändert bleibt, und zwar sehen wir zugleich, dass sich alle infinitesimalen Transformationen der Gruppe aus den n^2 besonderen zusammensetzen lassen, die wir erhalten, wenn wir der Reihe nach immer nur ein $d\alpha_{\iota\varkappa}$ von Null verschieden und alle übrigen streng gleich Null wählen. Wir bezeichnen mit Herrn Lie diese besonderen n^2 infinitesimalen Transformationen durch die Symbole

(7)
$$\mathfrak{X}_{\iota\varkappa}^{(\nu)} f = \sum_{\lambda=0}^{\nu} y_\varkappa^{(\lambda)} \frac{\partial f}{\partial y_\iota^{(\lambda)}} \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, \quad n),$$

die infinitesimalen Transformationen der ursprünglichen Gruppe L werden also insbesondere durch die Symbole

(8)
$$\mathfrak{X}_{\iota\varkappa} f = y_\varkappa \frac{\partial f}{\partial y_\iota}$$

darzustellen sein.

Wir werden sehr bald die Begriffe infinitesimale Transformation und Differentialinvariante auch für die allgemeinen continuirlichen Gruppen von Transformationen, wie wir sie in der Nr. 134 (S. 13) definirt hatten, zu erörtern haben, vorher wollen wir aber auch den daselbst dargelegten Gruppenbegriff noch in einem wesentlichen Punkte verallgemeinern Zu einer solchen Verallgemeinerung gelangen wir ganz naturgemäss, wenn wir unter dem jetzt gewonnenen Gesichtspunkte der Gruppentheorie die Analogie einer Differentialgleichung von der Form (1) mit einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades, die uns schon im zweiten Abschnitte geleitet hatte, näher in's Auge fassen

136. **Analogie mit algebraischen Gleichungen. Rationale Differentialfunctionen der Elemente eines Fundamentalsystems.**

Wir hatten schon in den Nrn. 14 ff. darauf hingewiesen, dass die Determinantenquotienten (2), oder wie wir jetzt allgemein sagen können, die Differentialinvarianten der Gruppe L in Bezug auf die n Functionen $y_1, y_2, \dots y_n$ eine ähnliche Rolle spielen, wie die symmetrischen Functionen von n unbestimmten Grössen in der Algebra. Weiter können wir jetzt die Gruppe L der Gruppe der $n!$ Permutationen von n Unbestimmten gegenüberstellen und dann Folgendes erwägen.

Für die Theorie der algebraischen Gleichungen war es von ausserordentlicher Wichtigkeit, dass Lagrange, Vandermonde und Cauchy nebst den symmetrischen Functionen noch andere Functionen der n unbestimmten Grössen in den Kreis ihrer Betrachtungen zogen, solche Functionen nämlich, die nicht bei allen Permutationen ungeändert bleiben. Betrachtet man eine derartige Function, so scheiden sich die $n!$ Permutationen in solche, die eine Aenderung der Function bewirken und in solche, bei denen die Function invariant bleibt. Die letzteren bilden dann wieder eine Gruppe, die als Untergruppe in der Gruppe der $n!$ Permutationen enthalten ist, und die Anzahl der Permutationen dieser Untergruppe ist ein Theiler r von $n!$ Die betrachtete Function genügt dann nebst allen aus ihr durch die $n!$ möglichen Permutationen hervorgehenden Functionen einer Gleichung vom Grade $\frac{n!}{r}$, deren Coefficienten symmetrische Functionen sind, und man nennt dann diese Gleichung eine Resolvente der Gleichung, deren Wurzeln die n unbestimmten Grössen sind, von denen man ausging

Wollen wir diesen Gedankengang auf unsere Theorie der linearen Differentialgleichungen übertragen, so können wir mit Herrn Vessiot an Stelle der invarianten Functionen (2) andere Functionen der $y_1, y_2, \dots y_n$ und ihrer Ableitungen betrachten, und dann nach derjenigen Untergruppe der Gruppe L fragen, die dieselben ungeändert lässt Indem wir in die Erörterung dieser Frage eintreten, können wir zunächst eine Vereinfachung derselben Platz greifen lassen.

Sei nämlich

$$\mathfrak{R}\left(y_1, \dots y_n; \dots ; y_1^{(\nu)}, \dots y_n^{(\nu)}\right) = \mathfrak{R}(y)$$

irgend eine rationale Function der $y_\varkappa$ und ihrer Ableitungen bis zur ν^{ten} Ordnung oder, wie wir kurz sagen wollen, eine rationale Differentialfunction der $y_\varkappa$, dann können wir uns, falls $\nu > n - 1$ ist, die Ableitungen von höherer als der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung durch die

Ableitungen bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung und die $p_1, \cdots p_n$ nebst deren Ableitungen ausgedrückt denken. Auf diese Weise werde

$$\mathfrak{R}(y) = R\left(y_1, \cdots y_n, \cdots y_1^{(n-1)}, \cdots y_n^{(n-1)}; p_1, \cdots p_n\right) = R(y; p),$$

wo also jetzt $R(y; p)$ die Ableitungen der $y_\varkappa$ nur bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, dagegen im Allgemeinen noch die p_ν und ihre Ableitungen enthält.

Da es sich wesentlich um die Untersuchung derjenigen Transformationen

$$(9) \qquad \eta_i^{(\lambda)} = \sum_{\varkappa=1}^{n} \alpha_{i\varkappa} y_\varkappa^{(\lambda)} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots n \\ \lambda = 0, 1, \cdots \nu \end{pmatrix}$$

handeln wird, die eine solche rationale Differentialfunction ungeändert lassen, so wollen wir annehmen, die Transformation (9) habe in Bezug auf $\mathfrak{R}(y)$ diese Eigenschaft, so dass also

$$\mathfrak{R}(\eta) = \mathfrak{R}(y)$$

ist. Dann ist aber, da die $p_1, \cdots p_n$ nebst ihren Ableitungen bei allen Transformationen der Gruppe L ungeändert bleiben, auch

$$(10) \qquad R(y; p) = R(\eta; p),$$

und zwar muss diese Gleichung eine in den $y_\varkappa$ nebst ihren Ableitungen, sowie in den $p_\varkappa$ nebst ihren Ableitungen identische sein. Wäre das nämlich nicht der Fall, so könnte die Gleichung (10) als eine Differentialgleichung von $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung etwa für y_1 aufgefasst werden, d. h aber, da y_1 ein sonst willkürliches Integral der Differentialgleichung (1) ist, es gäbe eine Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, der sämmtliche Integrale, also auch das allgemeine Integral von (1) Genüge leisten. Das ist aber nicht möglich, da das allgemeine Integral von (1) n wesentliche willkürliche Constanten enthält.

Wenn also $\mathfrak{R}(y)$ bei Ausübung der Transformation (9) ungeändert bleibt, so gilt das Gleiche auch von $R(y; p)$, und zwar ist es dabei gleichgültig, ob wir die in dem letzteren Ausdrucke auftretenden $p_1, \cdots p_n$ und deren Ableitungen wirklich als Functionen von x auffassen, oder ob wir dieselben durch irgendwelche Constanten ersetzen.

Hierauf und auf die in der Nr. 135 (S. 17) gemachte Bemerkung, dass es keine Differentialinvariante von niedrigerer als der n^{ten} Ordnung der allgemeinen linearen homogenen Gruppe L geben könne, lässt sich ein einfacher Beweis des bereits an derselben Stelle (S. 16) erwähnten Satzes gründen, des Satzes nämlich, dass jede Differentialinvariante von L rational durch die $p_1, p_2, \cdots p_n$ und deren Ableitungen dargestellt werden kann

Sei nämlich $\Re(y)$ eine Differentialinvariante von L, dann gilt, wie oben gezeigt wurde, das Gleiche auch von dem Ausdrucke

$$R(y;\, p);$$

dieser enthält aber die Ableitungen der $y_1, y_2, \cdots y_n$ höchstens bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, er wäre also eine Differentialinvariante $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von L und eine solche kann es nicht geben. Also darf $R(y;\, p)$ die $y_1, y_2, \cdots y_n$ und ihre Ableitungen überhaupt nicht mehr enthalten, das heisst, dieser Ausdruck ist eine rationale Function der $p_1, p_2, \cdots p_n$ und ihrer Ableitungen.

Wir lernen dadurch zugleich eine Methode kennen, um für eine vorgelegte Differentialinvariante von L ihren Ausdruck in den $p_1, p_2, \cdots p_n$ wirklich herzustellen. Man hat nämlich nur die Ableitungen der $y_\varkappa$ von höherer als der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung wegzuschaffen, dann müssen die Ableitungen niedrigerer Ordnung von selbst herausfallen.

Zufolge der vorhin angestellten Erwägungen können wir uns auf die Untersuchung von Differentialfunctionen $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung beschränken, deren Abhängigkeit von den $p_1, \cdots p_n$ bei vielen Fragen auch ausser Betracht gelassen werden kann

Die Gesammtheit der Transformationen (9), die eine solche rationale Differentialfunction $R(y)$ ungeändert lassen, bildet offenbar eine Gruppe $\mathfrak{G}$ Um die Transformationen dieser Gruppe zu charakterisiren, denken wir uns in die Gleichung

$$(11) \qquad R(y) = R(\eta)$$

für die $\eta_\iota^{(\lambda)}$ ihre Ausdrücke (9) eingesetzt und dann nach den $y_\varkappa$ und deren Ableitungen geordnet. Da die Gleichung identisch bestehen soll, so müssen die einzelnen Coefficienten verschwinden, es wird sich also eine gewisse Anzahl von einander unabhängiger algebraischer Beziehungen zwischen den $\alpha_{\iota\varkappa}$ ergeben, deren Bestehen nothwendig und hinreichend dafür ist, dass die Transformation (9) die Function $R(y)$ ungeändert lässt.

In dem n^2-fach ausgedehnten Gebiete der $\alpha_{\iota\varkappa}$ bestimmen diese Beziehungen ein gewisses algebraisches Gebilde, welches seinerseits in gewisse irreductible Theilgebilde zerfallen kann. Die Anzahl dieser irreductiblen Theilgebilde ist jedenfalls eine **endliche** und jedem einzelnen entspricht eine bestimmte **Stufenzahl** Das heisst, wenn wir ein solches irreductibles Gebilde herausgreifen, so können wir uns dasselbe dadurch gegeben denken, dass die n^2 Grössen $\alpha_{\iota\varkappa}$ als algebraische Functionen von gewissen unabhängigen Parametern dargestellt sind;

die Anzahl dieser Parameter bestimmt die **Dimension**, diese Anzahl von n^2 subtrahirt, die **Stufenzahl** des Gebildes.

Von vorneherein müssen wir die Möglichkeit zulassen, dass das Gesammtgebilde in irreductible Theile von verschiedener Stufenzahl zerfällt. Seien

$$(12) \qquad \alpha_{\iota\varkappa} = A_{\iota\varkappa}^{(j)}\left(\mathfrak{a}_1^{(j)}, \cdot \quad \mathfrak{a}_{r_j}^{(j)}\right) \qquad (j = 1, 2, \cdot \quad \nu) \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, \quad n)$$

die Gleichungen, die uns jene sämmtlichen irreductiblen Theilgebilde darstellen, so dass also ν die Anzahl der Theilgebilde und $n^2 - r_j$ die Stufenzahl des dem Index j entsprechenden Gebildes ist. Dann sind die ν Schaaren von linearen Transformationen

$$(13) \qquad \eta_\iota = \sum_{\varkappa=1}^{n} A_{\iota\varkappa}^{(j)}\left(\mathfrak{a}_1^{(j)}, \quad \cdot \mathfrak{a}_{r_j}^{(j)}\right) y_\varkappa \qquad (j = 1, 2, \quad \nu) \qquad (\iota = 1, 2, \quad n)$$

diejenigen, bei welchen die Differentialfunction $R(y)$ ungeändert bleibt; natürlich hat man sich dieselben noch durch die analogen Transformationen für die Ableitungen der $y_\varkappa$ erweitert zu denken. Diese Transformationen (13) bilden nun die Gruppe $\mathfrak{G}$, und zwar ist dies offenbar eine **Gruppe mit paarweise inversen Transformationen** Da die sämmtlichen Transformationen von $\mathfrak{G}$ in der allgemeinen linearen Gruppe L enthalten sein müssen, so sagen wir, $\mathfrak{G}$ sei eine **Untergruppe** von L, und da ferner in den Definitionsgleichungen von $\mathfrak{G}$ die Parameter $\mathfrak{a}_h^{(j)}$ algebraisch eingehen, so sprechen wir von einer **algebraischen Untergruppe** $\mathfrak{G}$ von L.

Wir gelangen auf diese Weise zu Gruppen von Transformationen, die nicht mehr durch **ein** Gleichungssystem dargestellt werden können, sondern zu deren Definition eine endliche Anzahl von Gleichungssystemen erforderlich ist. Für den so verallgemeinerten Gruppenbegriff wollen wir nun einige der fundamentalen **Lie**'schen Sätze kennen lernen.

Drittes Kapitel.

137 Lie'sche Sätze über Transformationsgruppen. Anzahl der wesentlichen Parameter und infinitesimale Transformationen.

Wir legen den folgenden Betrachtungen eine durch die ν Gleichungssysteme

$$\eta_i = f_i^{(j)}(y_1, \cdot\cdot\, y_n | \mathfrak{a}_1^{(j)}, \quad \cdot\, \mathfrak{a}_{r_j}^{(j)}) = f_i^{(j)}(y|\mathfrak{a}) \qquad (14)$$
$$(i = 1, 2, \quad n) \qquad (j = 1, 2, \quad \nu)$$

definirte Gruppe G zu Grunde, deren Transformationen einander paarweise als inverse zugeordnet sein mögen, wobei wir natürlich voraussetzen, dass in jeder dieser ν Schaaren von Transformationen die geschriebenen Parameter wesentliche sind, und dass keine dieser Schaaren schon in einer anderen derselben enthalten ist

Denken wir uns die beiden Transformationen unserer Gruppe

$$\begin{cases} \eta_i = f_i^{(\varkappa)}(y_1, \cdot\, y_n | \mathfrak{a}_1^{(\varkappa)}, \quad \mathfrak{a}_{r_\varkappa}^{(\varkappa)}), \\ \zeta_i = f_i^{(h)}(\eta_1, \cdot\cdot\, \eta_n | \mathfrak{a}_1^{(h)}, \cdot\, \mathfrak{a}_{r_h}^{(h)}), \end{cases}$$

hintereinander ausgeführt, so gehört die so entstehende Transformation

$$\zeta_i = f_i^{(h)}(f_1^{(\varkappa)}, \cdots f_n^{(\varkappa)} | \mathfrak{a}_1^{(h)}, \cdots \mathfrak{a}_{r_h}^{(h)}) \qquad (15)$$

ebenfalls zur Gruppe und enthält scheinbar $r_h + r_\varkappa$ Parameter. Die Anzahl der wesentlichen Parameter der Transformation (15) kann aber nicht grösser sein, wie die grösste der Zahlen $r_1, r_2, \cdot\, r_\nu$ und nicht kleiner wie die grössere der beiden Zahlen $r_\varkappa, r_h$. Wenn also $r_\varkappa$ und r_h beide gleich der grössten unter den Zahlen $r_1, r_2, \cdot\, r_\nu$ sind, so hängt die Transformation (15) auch genau von $r_\varkappa = r_h$ Parametern ab. Bezeichnet also r diese grösste Zahl, so bilden diejenigen Transformationsschaaren von G, die von r wesentlichen Parametern abhängen, schon für sich eine Gruppe Γ mit paarweise inversen Transformationen, die demnach eine Untergruppe von G ist.

Seien die den Werthen $j = 1, 2, \cdot\, \mu$ entsprechenden Schaaren (14) diejenigen, aus denen sich Γ zusammensetzt, also

$$r_1 = r_2 = \cdot = r_\mu = r,$$

dann betrachten wir zuvörderst diese Gruppe genauer

Sei

(16) $$\eta_i = f_i^{(\varkappa)}(y|\mathfrak{a})$$

eine Transformation von Γ, dann gehört auch die inverse Transformation

(17) $$y_i = F_i^{(\varkappa)}(\eta|\mathfrak{a})$$

zu dieser Gruppe. Bilden wir nun

$$\zeta_i = f_i^{(\varkappa)}\left(y_1, \cdots y_n \middle| \mathfrak{a}_1^{(\varkappa)} + \varepsilon_1, \cdots \mathfrak{a}_r^{(\varkappa)} + \varepsilon_r\right),$$

wo $\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_r$ irgendwelche hinreichend kleine Grössen bedeuten, so gehört auch die Transformation

$$\zeta_i = f_i^{(\varkappa)}\left(F_1^{(\varkappa)}(\eta|\mathfrak{a}), \cdots F_n^{(\varkappa)}(\eta|\mathfrak{a}) \middle| \mathfrak{a}_1^{(\varkappa)} + \varepsilon_1, \cdots \mathfrak{a}_r^{(\varkappa)} + \varepsilon_r\right)$$

zur Gruppe Γ. Entwickeln wir die rechten Seiten dieser Transformation nach Potenzen von $\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_r$ und bezeichnen den Ausdruck, der aus

$$\frac{\partial f_i^{(\varkappa)}(y|\mathfrak{a})}{\partial \mathfrak{a}_h} \qquad (h = 1, 2, \cdots r)$$

entsteht, wenn wir für die y_i ihre Ausdrücke (17) einsetzen, durch

$$\varphi_{hi}^{(\varkappa)}\left(\eta_1, \cdots \eta_n \middle| \mathfrak{a}_1^{(\varkappa)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(\varkappa)}\right) = \varphi_{hi}^{(\varkappa)}(\eta|\mathfrak{a}),$$

so erhalten wir

(18) $$\zeta_i = \eta_i + \sum_{h=1}^{r} \varphi_{hi}^{(\varkappa)}(\eta|\mathfrak{a})\varepsilon_h + [\varepsilon_h]_2,$$

wo $[\varepsilon_h]_2$ einen Ausdruck andeutet, der in den $\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_r$ von zweiter oder höherer Dimension ist. Nehmen wir die ε_h unendlich klein, so stellen die Gleichungen (18) eine infinitesimale Transformation dar, die zur Gruppe Γ gehört; wir schreiben dieselbe, indem wir

$$\varepsilon_h = d\mathfrak{a}_h^{(\varkappa)} \qquad (h = 1, 2, \cdots r)$$

$$\zeta_i - \eta_i = d\eta_i \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

setzen, in der Form

$$d\eta_i = \sum_{h=1}^{r} \varphi_{hi}^{(\varkappa)}(\eta|\mathfrak{a}) d\mathfrak{a}_h^{(\varkappa)}.$$

Diese infinitesimale Transformation lässt sich aus den r einfacheren

(19) $$d\eta_i = \varphi_{hi}^{(\varkappa)}(\eta|\mathfrak{a}) d\mathfrak{a}_h^{(\varkappa)} \qquad (h = 1, 2, \cdots r)$$

zusammensetzen. Wenden wir diese auf irgend eine Function $f(\eta_1, \cdots \eta_n)$ an, so verwandelt sich $f(\eta_1, \cdots \eta_n)$ in

$$f(\eta_1, \cdots \eta_n) + d\mathfrak{a}_h^{(\varkappa)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \eta_i} \varphi_{hi}^{(\varkappa)}(\eta|\mathfrak{a}),$$

wir werden darum mit Herrn **Lie** die Ausdrücke

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \eta_i} \varphi_{hi}^{(\varkappa)}(\eta|\mathfrak{a}) \qquad (h = 1, 2, \cdots r)$$

als Symbole der infinitesimalen Transformationen (19) ansehen.

Hat man überhaupt r infinitesimale Transformationen, die die $y_1, y_2, \cdots y_n$ in unendlich wenig davon verschiedene Grössen

$$y_1 + dy_1, \;\; y_2 + dy_2, \cdots y_n + dy_n$$

verwandeln und für welche

$$dy_i = \psi_{hi}(y_1, \cdots y_n)\, d\mathfrak{a}_h \qquad (h = 1, 2, \cdots r)$$

ist, wo die $d\mathfrak{a}_h$ irgendwelche unendlich kleine Grössen bedeuten, so kann man diese Transformationen durch die Symbole

$$\mathfrak{X}_h f = \sum_{i=1}^{n} \psi_{hi}(y_1, \cdots y_n) \frac{\partial f}{\partial y_i} \qquad (h = 1, 2, \cdots r)$$

darstellen, welche den jenen Transformationen entsprechenden Aenderungen einer beliebigen Function $f(y_1, \cdots y_n)$ proportional sind. Man sagt dann, diese r infinitesimalen Transformationen seien von einander unabhängig, wenn kein System von Gleichungen der Form

$$\sum_{h=1}^{r} e_h \psi_{hi}(y_1, y_2, \cdots y_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

besteht, in welchem die e_h constante, d. h. von den $y_1, \cdots y_n$ unabhängige Grössen bedeuten, die nicht sämmtlich verschwinden, oder was dasselbe ist, wenn die $\mathfrak{X}_h f$ keiner Relation von der Form

$$\sum_{h=1}^{r} e_h \mathfrak{X}_h f = 0$$

genügen. Bedeuten dann $l_1, l_2, \cdots l_r$ willkürliche von den y_i unabhängige Parameter und setzen wir

$$Cf = \sum_{h=1}^{r} l_h \mathfrak{X}_h f,$$

so stellen uns die Gleichungen

$$\eta_i = y_i + tC(y_i) + \frac{t^2}{1 \cdot 2} C(Cy_i) + \cdots, \qquad (20)$$
$$(i = 1, 2, \cdots n),$$

wo t eine unabhängig veränderliche Grösse bedeutet, eine Schaar von Transformationen dar, die scheinbar von den Parametern $t, l_1, l_2, \cdots l_r$ abhängt. Da diese $r+1$ Parameter aber nur in den Verbindungen $tl_1, tl_2, \cdots tl_r$ auftreten, so hängen die Transformationen (20) in Wirklichkeit nur von r Parametern ab, wir können also unbeschadet der

Allgemeinheit $t = 1$ wählen und die Gleichungen (20) in der Form schreiben

$$(21)\qquad \eta_i = y_i + \sum_{h=1}^{r} l_h \psi_{hi}(y) + \sum_{h=1}^{r}\sum_{g=1}^{r} \frac{l_h l_g}{1\cdot 2} \mathfrak{X}_h(\psi_{gi}(y)) + \cdots .$$

Aus der Unabhängigkeit der infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{X}_h f$ folgert man nun leicht, dass die r Parameter in der Transformationsschaar (21) wesentlich sind.

Hieraus erschliesst Herr Lie den für die folgende Untersuchung wichtigen Satz:

Enthält eine Schaar von Transformationen die r willkürlichen Parameter $l_1, l_2, \cdots l_r$ und lauten die Gleichungen dieser Transformationen, nach Potenzen der $l_1, l_2, \cdots l_r$ entwickelt,

$$\eta_i = y_i + \sum_{h=1}^{r} l_h \psi_{hi}(y_1, \cdots y_n) + [l_h]_2,$$

haben ferner die $\psi_{hi}(y_1, \cdots y_n)$ die Eigenschaft, dass die r infinitesimalen Transformationen

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_{hi}(y_1, \cdots y_n) \frac{\partial f}{\partial y_i} \qquad (h = 1, 2, \cdots r)$$

von einander unabhängig sind, so sind die r Parameter $l_1, l_2, \cdots l_r$ in den gegebenen Transformationen wesentlich.

138. Sätze über Transformationsschaaren, die gewissen partiellen Differentialgleichungen genügen.

Zu den in unserer Gruppe Γ enthaltenen infinitesimalen Transformationen (19) zurückkehrend, beweisen wir zunächst, dass dieselben für willkürliche Werthe der Parameter $\mathfrak{a}_h^{(\varkappa)}$ von einander unabhängig sind.

Wäre das nämlich nicht der Fall, so müssten sich r von den $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ unabhängige Grössen $e_1, e_2, \cdots e_r$ finden lassen, für welche die Beziehung

$$\sum_{h=1}^{r} e_h \sum_{i=1}^{n} \varphi_{hi}^{(\varkappa)}(\eta|\mathfrak{a}) \frac{\partial f}{\partial \eta_i} = 0,$$

d. h. mit anderen Worten die Gleichungen

$$(22)\qquad \sum_{h=1}^{r} e_h \varphi_{hi}^{(\varkappa)}(\eta|\mathfrak{a}) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

erfüllt sind. Nun kann aber für willkürliche Werthe der $\mathfrak{a}_h^{(\varkappa)}$ kein Gleichungssystem von der Form

$$\sum_{h=1}^{r} \chi_h \left(\mathfrak{a}_1^{(\varkappa)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(\varkappa)}\right) \varphi_{hi}^{(\varkappa)}\left(\eta_1, \cdots \eta_n \middle| \mathfrak{a}_1^{(\varkappa)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(\varkappa)}\right) = 0$$
$$(i = 1, 2, \cdots n)$$

bestehen, in welchem die χ_h von den $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ unabhängige Functionen der $\mathfrak{a}_h^{(\varkappa)}$ bedeuten; denn setzte man darin für die η_i ihre Werthe aus den Gleichungen (16) ein, so wäre

$$\sum_{h=1}^{r} \chi_h \left(\mathfrak{a}_1^{(\varkappa)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(\varkappa)}\right) \frac{\partial f_i^{(\varkappa)}(y|\mathfrak{a})}{\partial \mathfrak{a}_h^{(\varkappa)}} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots n),$$

d. h. aber nach Nr. 134 (S. 14), die $\mathfrak{a}_1^{(\varkappa)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(\varkappa)}$ wären keine wesentlichen Parameter.

Bedeutet also

$$\mathfrak{a}_1^{(\varkappa)} = \mathfrak{a}_1^{(0)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(\varkappa)} = \mathfrak{a}_r^{(0)}$$

ein allgemeines Werthesystem der Parameter $\mathfrak{a}_h^{(\varkappa)}$, so sind die r infinitesimalen Transformationen

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_{hi}^{(\varkappa)}\left(\eta_1, \cdots \eta_n \middle| \mathfrak{a}_1^{(0)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(0)}\right) \frac{\partial f}{\partial \eta_i} \qquad (h = 1, 2, \cdots r)$$

für jeden Werth $\varkappa = 1, 2, \cdots \mu$ von einander unabhängig.

Setzen wir nun z. B. für $\varkappa = 1$

$$\varphi_{hi}^{(1)}\left(\eta_1, \cdots \eta_n \middle| \mathfrak{a}_1^{(0)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(0)}\right) = \xi_{hi}(\eta_1, \cdots \eta_n),$$

so sind die r infinitesimalen Transformationen

$$(23) \qquad \mathfrak{X}_h f(\eta_1, \cdots \eta_n) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{hi}(\eta_1, \cdots \eta_n) \frac{\partial f}{\partial \eta_i} \qquad (h = 1, 2, \cdots r)$$

von einander unabhängig

Nehmen wir ferner die Transformation, die aus (18) hervorgeht, wenn daselbst

$$\varkappa = 1, \quad \mathfrak{a}_1^{(1)} = \mathfrak{a}_1^{(0)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(1)} = \mathfrak{a}_r^{(0)}$$

gesetzt wird,

$$\zeta_i = \eta_i + \sum_{h=1}^{r} \xi_{hi}(\eta)\varepsilon_h + [\varepsilon_h]_2,$$

und componiren dieselbe mit der willkürlichen Transformation

$$\vartheta_i = f_i^{(\varkappa)}\left(F_1^{(\varkappa)}(\zeta|\bar{\mathfrak{a}}), \cdots F_r^{(\varkappa)}(\zeta|\bar{\mathfrak{a}}) \middle| \bar{\mathfrak{a}}_1^{(\varkappa)} + \delta_1, \cdots \bar{\mathfrak{a}}_r^{(\varkappa)} + \delta_r\right)$$
$$(i = 1, 2, \cdots n)$$

von Γ, wo $\bar{\mathfrak{a}}_1^{(\varkappa)}, \cdots \bar{\mathfrak{a}}_r^{(\varkappa)}$ ein willkürliches aber bestimmtes Werthesystem der $\mathfrak{a}_1^{(\varkappa)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(\varkappa)}$ und $\delta_1, \cdots \delta_r$ beliebige hinreichend kleine Grössen

bedeuten, so können wir die ϑ_ι nach Potenzen der $\delta_1, \cdots \delta_r$ entwickeln und erhalten (vergl. S. 24)

$$\vartheta_\iota = \zeta_\iota + \sum_{h=1}^{r} \varphi_{h\iota}^{(\varkappa)}(\eta|\bar{\mathfrak{a}})\,\delta_h + [\delta_h]_2,$$

so dass also die componirte Transformation, die offenbar auch zur Gruppe Γ gehören muss, die Form

$$(24)\qquad \vartheta_\iota = \eta_\iota + \sum_{h=1}^{r} \varepsilon_h \xi_{h\iota}(\eta) + \sum_{h=1}^{r} \delta_h \varphi_{h\iota}^{(\varkappa)}(\eta|\mathfrak{a}) + [\varepsilon_h, \delta_h]_2$$

annimmt. Diese Transformation enthält die $2r$ Parameter $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_r$, $\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_r$, von diesen können aber, da (24) zur Gruppe Γ gehört, nur r wesentlich sein.

Auf Grund des in der vorigen Nummer (S 26) erörterten Satzes schliessen wir hieraus, dass unter den $2r$ infinitesimalen Transformationen

$$\mathfrak{X}_h f = \sum_{\iota=1}^{n} \xi_{h\iota}(\eta)\frac{\partial f}{\partial \eta_\iota}, \quad \sum_{\iota=1}^{n} \varphi_{h\iota}^{(\nu)}(\eta|\bar{\mathfrak{a}})\frac{\partial f}{\partial \eta_\iota} \qquad (h=1, 2, \cdots r)$$

nur r von einander unabhängige sein können; da aber die $\mathfrak{X}_h f$, wie wir bewiesen haben, unabhängig sind, so folgt, dass sich die

$$\sum_{\iota=1}^{n} \varphi_{h\iota}^{(\varkappa)}(\eta|\mathfrak{a})\frac{\partial f}{\partial \eta_\iota} \qquad (h=1, 2, \cdots r)$$

für alle Werthe von $\varkappa = 1, 2, \cdots \mu$ und für jedes beliebige Werthesystem, welches den Parametern $\mathfrak{a}_1^{(\nu)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(\varkappa)}$ zuertheilt wird, durch die r infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{X}_h f$ in der Form

$$\sum_{\iota=1}^{n} \varphi_{h\iota}^{(\varkappa)}(\eta|\mathfrak{a})\frac{\partial f}{\partial \eta_\iota} = \sum_{g=1}^{r} \chi_{hg}^{(\varkappa)}\left(\mathfrak{a}_1^{(\varkappa)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(\nu)}\right)\mathfrak{X}_g f$$

darstellen lassen müssen; hierin sind die $\chi_{hg}^{(\varkappa)}\left(\mathfrak{a}_1^{(\varkappa)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(\nu)}\right)$ bestimmte Functionen der Parameter $\mathfrak{a}_1^{(\nu)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(\varkappa)}$.

Mit Rücksicht auf die Bedeutung der $\varphi_{h\iota}^{(\varkappa)}(\eta|\mathfrak{a})$ können diese Gleichungen in der Form

$$\frac{\partial f_\iota^{(\varkappa)}(y|\mathfrak{a})}{\partial \mathfrak{a}_h^{(\varkappa)}} = \sum_{g=1}^{r} \chi_{hg}^{(\nu)}\left(\mathfrak{a}_1^{(\varkappa)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(\varkappa)}\right)\xi_{g\iota}\left(f_1^{(\varkappa)}(y|\mathfrak{a}), \cdots f_n^{(\varkappa)}(y|\mathfrak{a})\right)$$
$$(\iota = 1, 2, \cdots n)$$

oder endlich, mit Rücksicht auf die Gleichungen (16), in der Form

(25) $$\frac{\partial \eta_i}{\partial a_h^{(\varkappa)}} = \sum_{g=1}^{r} \chi_{hg}^{(\varkappa)}\left(a_1^{(\varkappa)}, \cdots a_r^{(\varkappa)}\right) \xi_{gi}(\eta_1, \cdots \eta_n) \qquad (i=1, 2, \cdots n)$$

geschrieben werden. Das heisst:

Die Gruppe Γ enthält genau r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen

$$\mathfrak{X}_h f(y_1, \cdots y_n) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{hi}(y_1, \cdots y_n) \frac{\partial f}{\partial y_i} \qquad (h=1, 2, \cdots r),$$

und diese sind so beschaffen, dass jede der Schaaren

$$\eta_i = f_i^{(\varkappa)}\left(y_1, \cdots y_n \middle| a_1^{(\varkappa)}, \cdots a_r^{(\varkappa)}\right) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \mu),$$

aus denen sich Γ zusammensetzt, Differentialgleichungen von der Form (25) erfüllt.

Wir müssen nun eine Reihe von Sätzen kennen lernen, die sich auf Schaaren von Transformationen beziehen, welche Differentialgleichungen von der Form (25) erfüllen. Sei also

$$\eta_i = f_i(y_1, y_2, \cdots y_n | a_1, \cdots a_r) \qquad (i=1, 2, \cdots n)$$

eine Schaar von Transformationen mit den r wesentlichen Parametern $a_1, \cdots a_r$, die ein System von Differentialgleichungen der Form

(26) $$\frac{\partial \eta_i}{\partial a_h} = \sum_{g=1}^{r} \chi_{hg}(a_1, \cdots a_r) \xi_{gi}(\eta_1, \cdots \eta_n) \qquad \begin{pmatrix} i=1, 2, \cdots n \\ h=1, 2, \cdots r \end{pmatrix}$$

befriedigen; dann lässt sich zunächst zeigen, dass die Determinante

$$|\chi_{hg}(a_1, \cdots a_r)| \qquad (h, g = 1, 2, \cdots r)$$

nicht identisch verschwinden kann.

Wäre nämlich diese Determinante gleich Null, so müsste ein System von Gleichungen der Form

$$\sum_{h=1}^{r} \psi_h(a_1, \cdots a_r) \frac{\partial \eta_i}{\partial a_h} = 0$$

für $i = 1, 2, \cdots n$ bestehen; dies widerspräche aber der Voraussetzung, dass die $a_1, \cdots a_r$ wesentliche Parameter sind. Es lassen sich also die Gleichungen (26) nach den ξ_{gi} auflösen; sei

(27) $$\xi_{gi}(\eta_1, \cdots \eta_n) = \sum_{h=1}^{r} \alpha_{gh}(a_1, \cdots a_r) \frac{\partial \eta_i}{\partial a_h} \qquad \begin{pmatrix} g=1, 2, \cdots r \\ i=1, 2, \cdots n \end{pmatrix},$$

dann ist natürlich auch

$$|\alpha_{gh}(a_1, \cdots a_r)| \neq 0 \qquad (g, h = 1, 2, \cdots r)$$

Hieraus allein folgt schon, dass die r infinitesimalen Transformationen

$$\mathfrak{X}_h f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{hi}(\eta_1, \cdots \eta_n) \frac{\partial f}{\partial \eta_i} \qquad (h = 1, 2, \cdots r)$$

von einander unabhängig sind, da sich aus dem Bestehen von Gleichungen

$$\sum_{h=1}^{r} e_h \xi_{hi}(\eta_1, \cdots \eta_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

mit von den $\eta_1, \cdots \eta_n$ unabhängigen Coefficienten e_h die partielle Differentialgleichung

$$\sum_{g=1}^{r} \sum_{h=1}^{r} e_g \alpha_{gh}(\mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_r) \frac{\partial \eta_i}{\partial \mathfrak{a}_h} = 0$$

für die n Functionen $\eta_1, \cdots \eta_n$ ergeben würde, im Widerspruche mit der Voraussetzung, dass diese die $\mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_r$ als wesentliche Parameter enthalten

Denken wir uns nun die Gleichungen

$$\eta_i = f_i(y|\mathfrak{a}) \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

nach den y_i aufgelöst:

$$y_i = F_i(\eta|\mathfrak{a}),$$

dann ist identisch

$$y_i = F_i\big(f_1(y|\mathfrak{a}), \cdots f_n(y|\mathfrak{a})|\mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_r\big).$$

Differentiiren wir diese Gleichungen nach $\mathfrak{a}_h$, so kommt

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i(\eta|\mathfrak{a})}{\partial \eta_j} \frac{\partial f_j(y|\mathfrak{a})}{\partial \mathfrak{a}_h} + \frac{\partial F_i(\eta|\mathfrak{a})}{\partial \mathfrak{a}_h} = 0;$$

multipliciren wir mit $\alpha_{gh}(\mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_r)$ und summiren über $h = 1, 2, \cdots r$, so ergiebt sich mit Rücksicht auf (27)

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_{gj}(\eta_1, \cdots \eta_n) \frac{\partial F_i(\eta|\mathfrak{a})}{\partial \eta_j} + \sum_{h=1}^{r} \alpha_{gh}(\mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_r) \frac{\partial F_i(\eta|\mathfrak{a})}{\partial \mathfrak{a}_h} = 0.$$

Diese Gleichungen sind Identitäten, wenn man in denselben die η_i durch $f_i(y|\mathfrak{a})$ ersetzt; da sie aber die $y_1, y_2, \cdots y_n$ gar nicht enthalten, so sind sie an sich, d h. in den $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ selbst identisch

Die Functionen $F_1, F_2, \cdots F_n$ befriedigen also das System von r partiellen Differentialgleichungen

$$(28) \quad \sum_{j=1}^{n} \xi_{gj}(\eta_1, \cdots \eta_n) \frac{\partial F}{\partial \eta_j} + \sum_{h=1}^{r} \alpha_{gh}(\mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_r) \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{a}_h} = 0 \qquad (g = 1, 2, \cdots r).$$

Diese Differentialgleichungen sind zunächst von einander unabhängig, denn sie gestatten zufolge von

$$\left|\alpha_{gh}(\mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_r)\right| \neq 0 \qquad (g, h = 1, 2, \cdots r)$$

eine Auflösung nach den

$$\frac{\partial F}{\partial \mathfrak{a}_1}, \cdots \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{a}_r},$$

ferner sind auch die n Lösungen $F_1, F_2, \cdots F_n$ derselben unabhängig, da die Functionaldeterminante dieser Lösungen nach den $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$

$$\left|\frac{\partial F_i}{\partial \eta_j}\right| = \frac{1}{\left|\frac{\partial f_i}{\partial \eta_j}\right|} \neq 0 \qquad (i, j = 1, 2, \cdots n)$$

ist. Um diese Eigenschaft der partiellen Differentialgleichungen (28) gehörig verwerthen zu können, müssen wir einige Bemerkungen über die sogenannten vollständigen Systeme, von denen schon oben (S 14, Nr 134) vorübergehend die Rede war, einschalten.

139 Vollständige Systeme. Continuirliche Gruppen werden durch infinitesimale Transformationen erzeugt.

Seien q_0 Gleichungen gegeben von der Form

(I) $$Z_h f = Z_{h1}\frac{\partial f}{\partial u_1} + Z_{h2}\frac{\partial f}{\partial u_2} + \cdots + Z_{hs}\frac{\partial f}{\partial u_s} = 0 \qquad (h = 1, 2, \cdots q_0),$$

wo die Z_{hg} wohlbestimmte Functionen der $u_1, u_2, \cdots u_s$ bedeuten. Diese Gleichungen seien von einander unabhängig, d h das rechteckige System der Coefficienten

$$(Z_{hg}) \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \cdots q_0 \\ g = 1, 2, \cdots s \end{pmatrix}$$

sei vom Range q_0 (es muss natürlich $q_0 \leqq s$ vorausgesetzt werden)

Befriedigt eine Function $f(u_1, \cdots u_s)$ die Gleichungen (I), so muss sie offenbar auch den Gleichungen

$$Z_h\big(Z_g(f)\big) = 0 \qquad (g, h = 1, 2, \cdots q_0)$$

und folglich auch den Gleichungen

(II) $$Z_h\big(Z_g(f)\big) - Z_g\big(Z_h(f)\big) = 0 \qquad \begin{pmatrix} g, h = 1, 2, \cdots q_0 \\ g \neq h \end{pmatrix}$$

Genüge leisten. Nun sind aber die linken Seiten der letzteren Gleichungen, die wir kürzer durch die Symbole

$$(Z_h, Z_g)f = Z_h\big(Z_g(f)\big) - Z_g\big(Z_h(f)\big)$$

bezeichnen wollen, auch wieder homogene lineare Differentialausdrücke erster Ordnung, da die Ableitungen zweiter Ordnung sich wegheben,

und es kann nun möglich sein, dass sich unter den Gleichungen (II) gewisse finden, die von einander und von den Gleichungen (I) unabhängig sind. Wenn das der Fall ist, so fügen wir diese Gleichungen

$$Z_{q_0+1}(f) = 0, \cdots Z_{q_0+q_1}(f) = 0$$

dem Systeme (I) hinzu und verfahren mit dem so gebildeten Systeme von $q_0 + q_1$ Gleichungen ebenso wie vorher mit dem Systeme (I). Setzen wir diesen Process fort, so muss sich, da nicht mehr wie s dieser Gleichungen von einander unabhängig sein können, endlich ein System

$$\text{(III)} \qquad Z_1(f) = 0, \quad Z_2(f) = 0, \quad \cdots \quad Z_q(f) = 0$$

ergeben, welches so beschaffen ist, dass alle Gleichungen

$$(Z_g, Z_h)f = 0 \qquad (g, h = 1, 2, \cdots q,\ g \neq h)$$

schon eine Folge der Gleichungen (III) selbst sind, d. h. also, dass

$$(Z_g, Z_h)f = \sum_{i=1}^{q} \psi_{ghi}(u_1, \cdots u_s)\, Z_i(f)$$

ist, wo die ψ_{ghi} wohlbestimmte Functionen der $u_1, \cdots u_s$ bedeuten.

Ein solches System von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung nennt man nach Clebsch ein q-gliedriges vollständiges System. Die von Jacobi begründete Theorie dieser Systeme lehrt nun den folgenden Fundamentalsatz:

Ein q-gliedriges vollständiges System in s unabhängigen Variabeln besitzt stets genau $s - q$ unabhängige Lösungen

$$f_1, \quad f_2, \cdots \quad f_{s-q};$$

eine willkürliche Function $\Phi(f_1, f_2, \cdots f_{s-q})$ dieser Lösungen genügt dann auch dem vollständigen Systeme, und umgekehrt lässt sich auch jede Lösung desselben als Function der $f_1, f_2, \cdots f_{s-q}$ darstellen. Haben andererseits q von einander unabhängige lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung in s unabhängigen Variabeln genau $s - q$ unabhängige Lösungen gemein, so bilden sie ein q-gliedriges vollständiges System, und sind $s - q$ von einander unabhängige Functionen von s Variabeln vorgelegt, so giebt es stets ein q-gliedriges vollständiges System, dessen Lösungen diese Functionen sind.

Die in der Nr. 138 (S. 31) ausgesprochene Eigenschaft des Systems (28) partieller Differentialgleichungen, welchem die Functionen $F_1, F_2, \cdots F_n$ genügen, bedingt also, dass die Gleichungen (28), in

denen die $n + r$ unabhängigen Variabeln $\eta_1, \cdots \eta_n, \alpha_1, \cdots \alpha_r$ vorkommen, ein r-gliedriges vollständiges System bilden.

Setzen wir

$$\sum_{h=1}^{r} \alpha_{gh}(\mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_r) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_h} = A_g f,$$

so sind die Gleichungen (28) in der Form

$$\Omega_g F = \mathfrak{X}_g F + A_g F = 0 \qquad (g = 1, 2, \cdots r)$$

darstellbar. Da sie ein vollständiges System bilden, müssen Gleichungen

$$(\Omega_g, \Omega_h) F = \sum_{\sigma=1}^{r} \vartheta_{gh\sigma}(\eta_1, \cdots \eta_n, \mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_r) \Omega_\sigma F$$
$$(g, h = 1, 2, \cdots r, g \neq h),$$

wo die $\vartheta_{gh\sigma}$ wohlbestimmte Functionen ihrer Argumente sind, für jede Function F der $r + n$ unabhängigen Variabeln $\eta_1, \cdots \eta_n, \mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_r$ bestehen.

Schreiben wir diese Gleichungen in der Gestalt

$$(\mathfrak{X}_g, \mathfrak{X}_h) F + (A_g, A_h) F = \sum_{\sigma=1}^{r} \vartheta_{gh\sigma} \mathfrak{X}_\sigma F + \sum_{\sigma=1}^{r} \vartheta_{gh\sigma} A_\sigma F,$$

so zerfallen dieselben in die beiden Systeme

(29) $$(\mathfrak{X}_g, \mathfrak{X}_h) F = \sum_{\sigma=1}^{r} \vartheta_{gh\sigma} \mathfrak{X}_\sigma F,$$

(30) $$(A_g, A_h) F = \sum_{\sigma=1}^{r} \vartheta_{gh\sigma} A_\sigma F.$$

Die letzteren Gleichungen (30) zerfallen weiter in

$$A_g(\alpha_{h\mu}) - A_h(\alpha_{g\mu}) = \sum_{\sigma=1}^{r} \vartheta_{gh\sigma} \alpha_{\sigma\mu} \qquad (g, h, \mu = 1, 2, \cdots r),$$

und aus diesen lassen sich, da die Determinante

$$|\alpha_{\sigma\mu}| \neq 0 \qquad (\sigma, \mu = 1, 2, \cdots r)$$

ist, die $\vartheta_{gh\sigma}$ ausrechnen; wir erkennen hieraus, dass die $\vartheta_{gh\sigma}$ nur blosse Functionen der $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots \mathfrak{a}_r$ sein können, d. h. dass sie von den $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ unabhängig sind. Dies festgestellt, differentiiren wir die Gleichungen (29) nach den $\mathfrak{a}_\mu$, so kommt

$$0 = \sum_{\sigma=1}^{r} \frac{\partial \vartheta_{gh\sigma}}{\partial \mathfrak{a}_\mu} \mathfrak{X}_\sigma F \qquad (g, h, \mu = 1, 2, \cdots r),$$

da aber die $\mathfrak{X}_\sigma F$ von einander unabhängige infinitesimale Transformationen sind, so müssen die Coefficienten dieser Relationen

$$\frac{\partial \vartheta_{gh\sigma}}{\partial a_\mu} = 0$$

sein, d h die $\vartheta_{gh\sigma}$ sind auch von den $a_1, \cdots a_r$ unabhängig, sie sind folglich einfach Constanten.

Hat man also eine Schaar von Transformationen

$$\eta_i = f_i(y|a) \qquad (i=1,2, \cdots n)$$

mit den r wesentlichen Parametern $a_1, \cdots a_r$, die Differentialgleichungen von der Form (26) (S 29) befriedigen, so bestehen zwischen den infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{X}_h f$ Relationen

$$(31) \qquad (\mathfrak{X}_g, \mathfrak{X}_h)f = \sum_{\sigma=1}^{r} c_{gh\sigma}\mathfrak{X}_\sigma f \qquad (g, h = 1, 2, \cdots r)$$

mit constanten Coefficienten $c_{gh\sigma}$.

Herr Lie hat nun den folgenden wichtigen Satz bewiesen. Wenn r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $\mathfrak{X}_h f$ $(h=1,2, \cdots r)$ vorgelegt sind, die Relationen von der Form (31) mit constanten Coefficienten erfüllen, und wir bilden (vergl S. 26, Gl (21)) die r wesentliche Parameter $l_1, l_2, \cdots l_r$ enthaltende Schaar von Transformationen

$$\eta_i = y_i + \sum_{h=1}^{r} l_h \xi_{hi}(\eta) + \sum_{h=1}^{r}\sum_{g=1}^{r} \frac{l_h l_g}{1\cdot 2} \mathfrak{X}_g(\xi_{hi}(\eta)) + \cdots \qquad (i=1,2, \cdots n),$$

so constituiren diese eine r-gliedrige continuirliche Gruppe mit paarweise inversen Transformationen, von der man sagt, sie sei durch die r infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{X}_h f$ **erzeugt**. Wenden wir diesen Satz, auf dessen Beweis wir nicht eingehen, auf unsere Gruppe Γ an, so können wir Folgendes erschliessen.

Wir haben bewiesen, dass die aus den μ Schaaren (16) (Nr 137, S 24) gebildete Gruppe Γ, deren Transformationen paarweise zu einander invers sind, genau r unabhängige infinitesimale Transformationen $\mathfrak{X}_h f$ $(h=1,2, \cdots r)$ enthält; diese müssen, wie wir aus dem Bestehen der Differentialgleichungen (25) auf Grund der eben gewonnenen Ergebnisse schliessen können, Relationen von der Form (31) erfüllen. Also erzeugen dieselben eine r-gliedrige continuirliche Gruppe H mit paarweise inversen Transformationen, und diese muss folglich in der Gruppe Γ als Untergruppe enthalten sein; d h **eine der μ Schaaren (16) muss geradezu mit dieser r-gliedrigen continuirlichen Gruppe H übereinstimmen.**

Ist insbesondere $\mu = 1$, d. h. wird die Gruppe Γ durch eine einzige Schaar von Transformationen definirt, so ist Γ mit H identisch, d. h.

jede r-gliedrige continuirliche Gruppe mit paarweise inversen Transformationen enthält genau r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen, von denen sie erzeugt wird.

So wird z B. die allgemeine lineare Gruppe L von den n^2 infinitesimalen Transformationen (vergl S. 18)

$$y_\varkappa \frac{\partial f}{\partial y_\iota} \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, \quad n)$$

erzeugt

Im allgemeinen Falle $\mu > 1$ ist H offenbar die einzige in Γ enthaltene n-gliedrige Gruppe, die von infinitesimalen Transformationen erzeugt wird.

140. Zusammensetzung einer r-gliedrigen Gruppe. Ausgezeichnete Untergruppen. Fundamentaleigenschaft der betrachteten allgemeinen Transformationsgruppen.

Ehe wir nun weiter auf die Erörterung der Gruppe G eingehen, machen wir noch einige auf r-gliedrige continuirliche Gruppen mit paarweise inversen Transformationen bezügliche Bemerkungen.

Sei H eine solche Gruppe und seien $\mathfrak{X}_h f$ $(h = 1, 2, \quad r)$ die dieselbe erzeugenden infinitesimalen Transformationen, zwischen denen die Gleichungen (31) bestehen

Je drei der infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{X}_h f$ erfüllen, wie leicht einzusehen ist, die sogenannte Jacobi'sche Identität:

$$\left((\mathfrak{X}_g, \mathfrak{X}_h), \mathfrak{X}_j\right) + \left((\mathfrak{X}_h, \mathfrak{X}_j), \mathfrak{X}_g\right) + \left((\mathfrak{X}_j, \mathfrak{X}_g), \mathfrak{X}_h\right) = 0$$
$$(g, h, j = 1, 2, \quad r)$$

Hieraus folgen durch zweimalige Benutzung der Gleichungen (31) die Formeln

$$\sum_{\sigma=1}^{r} \sum_{\tau=1}^{r} (c_{gh\sigma} c_{\sigma j\tau} + c_{hj\sigma} c_{\sigma g\tau} + c_{jg\sigma} c_{\sigma h\tau}) \mathfrak{X}_\tau f = 0;$$

also bestehen, da die $\mathfrak{X}_\tau f$ von einander unabhängig sind, zwischen den Constanten $c_{gh\sigma}$ die Beziehungen

$$\sum_{\sigma=1}^{r} (c_{gh\sigma} c_{\sigma j\tau} + c_{hj\sigma} c_{\sigma g\tau} + c_{jg\sigma} c_{\sigma h\tau}) = 0,$$

zu denen noch die unmittelbar evidenten

$$c_{gh\tau} + c_{hg\tau} = 0 \qquad (\tau = 1, 2, \quad r)$$

hinzutreten. Wie Herr Lie gezeigt hat, gilt auch der umgekehrte

Satz, dass, wenn gewisse Constanten $c_{gh\sigma}$ bekannt sind, die diese Relationen befriedigen, auch stets r infinitesimale Transformationen $\mathfrak{X}_h f$ $(h=1, 2, \ldots r)$ gefunden werden können, die die Beziehungen (31) erfüllen und folglich eine r-gliedrige Gruppe erzeugen

Die Constanten $c_{gh\sigma}$ bestimmen die Zusammensetzung der r-gliedrigen Gruppe H Die Bedeutung derselben tritt in den folgenden Lie'schen Sätzen hervor, die wir ebenfalls ohne Beweis anführen

Die $m < r$ von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen von H,

$$Y_h f = \sum_{g=1}^{r} e_{hg} \mathfrak{X}_g f \qquad (h=1, 2, \ldots m),$$

wo die e_{hg} Constanten bedeuten, erzeugen dann und nur dann eine m-gliedrige Untergruppe von H, wenn sich alle

$$(Y_h, Y_j) \qquad (h, j=1, 2, \ldots m, h \neq j)$$

durch die Y_h allein homogen linear mit constanten Coefficienten darstellen lassen Die Werthesysteme e_{hg}, für welche dies der Fall ist, setzen sich aus den $c_{gh\sigma}$ mittelst algebraischer Operationen zusammen

Wir führen hier einen für die ganze Gruppentheorie fundamentalen Begriff, den der ausgezeichneten oder invarianten Untergruppe ein. Hat man irgend eine Gruppe g von irgendwelchen Operationen und ist γ eine Untergruppe von g, transformirt man dann die Operationen von γ durch alle möglichen Operationen S von g, d h. bildet man

$$\gamma_S = S^{-1} \gamma S,$$

so gehören die sämmtlichen Operationen der Gesammtheit γ_S der Gruppe g an, und bilden offenbar auch wieder eine Gruppe, also eine Untergruppe von g. Diese sämmtlichen Untergruppen γ_S nennt man mit γ gleichberechtigt innerhalb der Gruppe g. Wenn nun insbesondere jede der mit γ gleichberechtigten Untergruppen mit γ selbst identisch ist, d. h. wenn γ durch Transformation mit allen Operationen von g immer in sich selbst übergeht, so heisst γ eine ausgezeichnete oder invariante Untergruppe von g. Eine Gruppe g heisst einfach, wenn sie ausser der identischen Operation keine ausgezeichnete Untergruppe enthält, im entgegengesetzten Falle heisst sie zusammengesetzt

Seien nun $Y_h f$ $(h=1, 2, \ldots m)$ m unabhängige infinitesimale Transformationen unserer r-gliedrigen Gruppe H, die eine Untergruppe H' derselben erzeugen; denken wir uns die $Y_h f$ $(h=1, 2, \ldots m)$ durch gewisse

$$Y_{m+1} f, \quad \cdot \quad \cdot \quad Y_r f$$

zu einem System von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen von H ergänzt, dann ist die Untergruppe H' innerhalb H ausgezeichnet, wenn die sämmtlichen

$$(Y_g, Y_h) \qquad (g=1, 2, \ldots m, h=1, 2, \ldots r)$$

durch die Y_g $(g=1, 2, \ldots m)$ allein ausdrückbar sind, d. h. also in der Form

$$(Y_g, Y_h)f = \sum_{\sigma=1}^{m} \delta_{gh\sigma} Y_\sigma f$$

dargestellt werden können.

Wir kehren jetzt zu der aus den ν Schaaren (14) gebildeten Gruppe G zurück, in der Γ als Untergruppe enthalten war. Da Γ die r-gliedrige continuirliche Gruppe H enthält, so ist H auch in G enthalten. Mögen die Transformationen

$$\eta_i = f_i^{(1)}(y_1, \ldots y_n | \mathfrak{a}_1^{(1)}, \ldots \mathfrak{a}_r^{(1)}) \qquad (i=1, 2, \ldots n)$$

diejenigen sein, die die Gruppe H definiren

Führen wir nach einer Transformation von H die nicht zu H gehörige Transformation

$$(32) \qquad \zeta_i = f_i^{(\varkappa)}(\eta_1, \ldots \eta_n | \mathfrak{a}_1^{(\varkappa)}, \ldots \mathfrak{a}_{r_\varkappa}^{(\varkappa)}) \qquad (i=1, 2, \ldots n)$$

von G aus, so erhalten wir in

$$(33) \qquad \zeta_i = f_i^{(\varkappa)}(f_1^{(1)}(y|\mathfrak{a}), \ldots f_n^{(1)}(y|\mathfrak{a}) | \mathfrak{a}_1^{(\varkappa)}, \cdots \mathfrak{a}_{r_\varkappa}^{(\varkappa)})$$

wieder eine Transformation von G, die scheinbar von den $r + r_\varkappa$ Parametern

$$\mathfrak{a}_1^{(1)}, \ldots \mathfrak{a}_r^{(1)}, \mathfrak{a}_1^{(\varkappa)}, \cdots \mathfrak{a}_{r_\varkappa}^{(\varkappa)}$$

abhängt, in Wirklichkeit aber nur r wesentliche Parameter enthalten kann (vergl. Nr. 137, S. 23). Da die Gruppe H die identische Transformation enthält, reduciren sich für besondere Werthe der $\mathfrak{a}_1^{(1)}, \ldots \mathfrak{a}_r^{(1)}$ die $f_i^{(1)}(y|\mathfrak{a})$ auf y_i $(i=1, 2, \ldots n)$ Die Transformationsschaar (32) ist also unter der Schaar (33) enthalten, und es muss folglich nothwendig (32) mit (33) identisch sein, d. h. es ist $r_\varkappa = r$

Also ist in allen ν Schaaren der Gruppe G, (wenn wir uns eben solche Schaaren, die schon unter anderen enthalten sind, von vornherein weggelassen denken) die Anzahl der wesentlichen Parameter gleich r, d. h. G ist mit Γ identisch.

Sei nun T irgend eine Transformation von G; betrachten wir die Transformationen

$$T^{-1}HT,$$

so ist die von denselben gebildete Gruppe auch r-gliedrig und von

infinitesimalen Transformationen erzeugt, sie ist also mit H identisch, d. h. H ist eine ausgezeichnete Untergruppe von G.

Die Gruppe G hat also die folgende Gestalt: Sie besteht erstens aus den Transformationen der continuirlichen Gruppe H und ferner noch aus $\nu - 1$ Schaaren von der Form

$$T_1 H, \quad T_2 H, \quad \cdot\cdot \quad T_{\nu-1} H,$$

wo $T_1, T_2, \quad T_{\nu-1}$ Transformationen bedeuten, für welche

$$T_\varkappa^{-1} H T_\varkappa = H \qquad (\varkappa = 1, 2, \quad \nu - 1)$$

ist.

Wir behalten die Bezeichnung continuirliche Gruppe, in dem Sinne wie sie in der Nr. 134 (S. 15) eingeführt wurde, bei, verstehen also unter einer continuirlichen Gruppe stets nur eine solche, die durch ein System von Gleichungen, welche von gewissen stetig veränderlichen Parametern abhängen, definirt wird. Die allgemeinen Gruppen, zu deren Definition $\nu > 1$ Systeme von Gleichungen erforderlich sind, hat man wohl auch als gemischte Gruppen bezeichnet; wenn es sich darum handeln wird, eine derartige Gruppe etwa im Gegensatze zu einer abzählbaren Gruppe zu charakterisiren, so werden wir einfach von einer Gruppe sprechen, die continuirliche Schaaren von Transformationen enthält. Die charakteristische Eigenschaft einer continuirlichen Gruppe (mit paarweise inversen Transformationen) besteht darin, dass sie aus infinitesimalen Transformationen erzeugt wird. Diese infinitesimalen Transformationen spielen für die betreffende continuirliche Gruppe eine analoge Rolle, wie für eine Gruppe mit endlicher Basis die Elemente dieser Basis Wir heben noch ausdrücklich hervor, dass eine continuirliche Gruppe niemals abzählbar sein kann, es sei denn, dass sie sich auf die identische Transformation reducirt.

141. Allgemeiner Begriff der Invarianten einer continuirlichen Gruppe. Transitivität und Intransitivität.

Wenden wir die bisher erlangten Ergebnisse auf die lineare Gruppe $\mathfrak{G}$ an, die durch die ν Transformationsschaaren (13) (Nr. 136, S. 22) definirt worden war, so ersehen wir also, dass die Anzahlen $r_1, r_2, \quad r_\nu$ der Parameter einander gleich, etwa gleich r sein müssen, und dass eine der Gleichungen (13) eine r-gliedrige continuirliche Gruppe darstellt, die von r infinitesimalen Transformationen erzeugt wird. Um nun die Beziehung, in der die Differentialfunction $R(y)$, von der wir ausgegangen waren, zu der Gruppe $\mathfrak{G}$ steht, darlegen zu können, wollen wir für unsere aus den ν allgemeinen Transformationsschaaren

$$(34)\qquad \eta_\iota = f_\iota^{(\varkappa)}\left(y_1, \cdots y_n \middle| \mathfrak{a}_1^{(\varkappa)}, \cdot \mathfrak{a}_\nu^{(\varkappa)}\right) \qquad {\scriptstyle (\iota = 1, 2, \ldots n)} \qquad {\scriptstyle (\varkappa = 1, 2, \ldots \nu)}$$

gebildete Gruppe G den Begriff der Invariante bez. Differentialinvariante erörtern.

Eine Function $U(y_1, y_2, \cdot y_n)$ der unbestimmten Grössen y_i heisst eine Invariante von G, wenn für die durch die Gleichungen (34) definirten η_ι die identische Gleichung

$$U(\eta_1, \eta_2, \quad \eta_n) = U(y_1, y_2, \cdot y_n)$$

besteht. Da diese Gleichung auch bestehen muss, wenn die η_i aus den y_ι durch eine der r infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{X}_h f$ hervorgehen, so muss jede Invariante von G den r partiellen Differentialgleichungen

$$(35)\qquad \mathfrak{X}_h f = 0 \qquad {\scriptstyle (h = 1, 2, \ldots r)}$$

Genüge leisten.

In der That verwandelt sich (vergl Nr 137, S. 24) eine beliebige Function $f(y_1, \cdots y_n)$ bei Anwendung der infinitesimalen Transformation

$$\eta_\iota = y_\iota + \xi_{h\iota}(y_1, \cdots y_n) d\mathfrak{a}_h$$

in den Ausdruck

$$f(y_1, \cdot y_n) + d\mathfrak{a}_h \sum_{\iota=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_\iota} \xi_{h\iota}(y_1, \cdot \cdot y_n),$$

so dass also das Bestehen der partiellen Differentialgleichungen (35) die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür darstellt, dass die Function $f(y_1, \quad y_n)$ bei den infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{X}_h f$ und folglich bei den Transformationen der durch diese erzeugten, r-gliedrigen continuirlichen Gruppe H ungeändert bleibt.

Jede Invariante von G ist offenbar auch eine Invariante von H, aber nicht umgekehrt Verweilen wir also einen Augenblick bei der Betrachtung der Invarianten der r-gliedrigen von der infinitesimalen Transformation $\mathfrak{X}_h f$ erzeugten Gruppe H.

Soll die Gruppe H überhaupt Invarianten besitzen, so müssen die partiellen Differentialgleichungen (35) eine Lösung zulassen Aus der Unabhängigkeit der infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{X}_h f$ folgt natürlich im Allgemeinen noch nicht die Unabhängigkeit der Gleichungen (35), da zwischen den $\mathfrak{X}_h f$ sehr wohl eine homogene lineare Beziehung mit von den $y_1, \quad y_n$ abhängigen Coefficienten bestehen kann, ohne dass eine solche mit von den $y_1, \cdot\cdot y_n$ unabhängigen Coefficienten statt hat Seien also etwa $q < r$ der Gleichungen (35) von einander unabhängig, dann bilden dieselben zufolge der zwischen den $\mathfrak{X}_h f$ bestehenden Relationen (31) (S 34) ein q-gliedriges vollständiges System.

Wenn $q < n$ ist, so besitzt dieses vollständige System genau $n - q$ unabhängige Lösungen

$$u_1(y_1, \cdots y_n), \quad \cdots \quad u_{n-q}(y_1, \cdots y_n).$$

Diese sind also Invarianten von H, und jede Invariante von H lässt sich, als Lösung jenes vollständigen Systems, als Function dieser $n - q$ Invarianten darstellen; wir sagen darum, die letzteren bilden ein System von einander unabhängiger Invarianten der Gruppe H.

Ist $q = n$, so besitzt die Gruppe H überhaupt keine Invariante; wir können dies durch einen in der Gruppentheorie sehr bedeutsamen Terminus noch etwas anders ausdrücken

Zunächst stellt sich die Thatsache, dass die Gleichungen (35) ein q-gliedriges vollständiges System bilden, so dar, dass das von den Coefficienten dieser Gleichungen gebildete rechteckige System

$$(36) \qquad \left(\xi_{hi}(y_1, \cdots y_n)\right) \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \cdots r \\ i = 1, 2, \cdots n \end{pmatrix}$$

vom Range q ist. Die Gruppe H besitzt also dann und nur dann keine Invariante, wenn das System (36) genau vom Range n ist.

Die Transformationen von H lassen sich in der Form schreiben (vergl. S. 34, Nr. 139)

$$0 = -\eta_i + y_i + \sum_{h=1}^{r} l_h \xi_{hi}(y) + \sum_{h=1}^{r} \sum_{g=1}^{r} \frac{l_h l_g}{1 \cdot 2} X_g(\xi_{hi}(y)) + \cdots$$
$$(i = 1, 2, \cdots n)$$

Bezeichnen wir die rechten Seiten dieser Gleichungen für einen Augenblick durch Φ_i, so werden dieselben, nach einem bekannten Satze von Jacobi, dann und nur dann eine Auflösung nach n von den Parametern $l_1, l_2, \cdots l_r$ gestatten, wenn für n dieser Grössen, etwa

$$l_{i_1}, l_{i_2}, \cdots l_{i_n},$$

die nach denselben genommene Functionaldeterminante der Φ_i nicht identisch verschwindet, d. h. mit andern Worten, wenn das rechteckige System

$$(37) \qquad \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial l_h}\right) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots n \\ h = 1, 2, \cdots r \end{pmatrix}$$

genau vom Range n ist. Für

$$l_1 = l_2 = \cdots = l_r = 0$$

reducirt sich aber dieses System auf das System (36). Wenn also der Rang dieses letzteren gleich n ist, so gilt das Gleiche für das System (37), d. h. in diesem Falle können die Gleichungen, welche die Transformationen von H darstellen, nach n von den Parametern l_h aufgelöst werden.

Das heisst aber mit anderen Worten: für ein beliebiges Werthesystem der y_i und ein ebenfalls beliebiges Werthesystem der η_i lässt sich stets ein Werthesystem (eventuell auch mehrere) der Parameter der Gruppe angeben, welches eine Transformation der Gruppe liefert, durch die diese beiden Werthesysteme y_i, η_i in einander übergehen; es giebt also, allgemein zu reden, stets Transformationen der Gruppe, die einen beliebigen Punkt (y_i) der n-fachen complexen Mannigfaltigkeit in einen beliebigen anderen Punkt ebendieser Mannigfaltigkeit überführen. Diese Eigenschaft der Gruppe H bezeichnet man dadurch, dass man sagt, die Gruppe sei transitiv, im entgegengesetzten Falle, d. h. wenn H nicht transitiv ist, heisst sie intransitiv.

Der Begriff der Transitivität ist zuerst von Cauchy für die aus den Permutationen von n Elementen gebildeten Gruppen eingeführt worden; Cauchy nennt eine solche Gruppe transitiv, wenn durch Anwendung ihrer Permutationen jedes Element an die Stelle jedes anderen Elementes treten kann. Insbesondere heisst die Gruppe m-fach transitiv, wenn ihre Permutationen es ermöglichen, m beliebige der n Elemente an die Stellen von m beliebigen anderen zu setzen

Entsprechend dieser letzteren Bezeichnung nennt Herr Lie die Gruppe H einfach transitiv, wenn es im Allgemeinen auch nur eine Transformation derselben giebt, die einen beliebigen Punkt (y_i) in einen beliebigen anderen (η_i) verwandelt, d. h. also, wenn die Anzahl der Parameter der transitiven Gruppe genau gleich n ist.

Ist die Gruppe H intransitiv, so lassen sich aus den Definitionsgleichungen derselben Beziehungen zwischen den y_i und den η_i herleiten, die von den Parametern unabhängig sind. Das ist stets der Fall, wenn der Rang q des Systems (36) kleiner ist wie n. In diesem Falle ist, da der Rang von (37) nicht kleiner sein kann als q, die Anzahl der von den Parametern der Gruppe und von einander unabhängigen Beziehungen zwischen den y_i und η_i, die sich aus den Gleichungen $\Phi_i = 0$ herleiten lassen, keinesfalls grösser wie $n - q$ Sie muss aber genau gleich $n - q$ sein, denn wir kennen ja die $n - q$ unabhängigen Invarianten $u_1, \cdot\ u_{n-q}$ der Gruppe H, welche die $n - q$ von einander und von den Parametern der Gruppe unabhängigen Gleichungen

$$u_\varkappa(y_1, \cdot\cdot\ y_n) = u_\varkappa(\eta_1, \cdot\ \cdot \eta_n) \qquad (\varkappa = 1, 2, \quad n - q)$$

liefern. Wir erschliessen also den Satz:

Ist die r-gliedrige continuirliche Gruppe H transitiv, so hat sie keine Invarianten. Ist sie intransitiv, so hat sie die gemeinsamen Lösungen der partiellen Differentialgleichungen

(35) zu Invarianten; in diesem Falle lassen sich aus den Definitionsgleichungen der Gruppe gewisse von einander unabhängige Relationen zwischen den y_i und den η_i herleiten, die auf die Form

$$u_\varkappa(y_1, \cdots y_n) = u_\varkappa(\eta_1, \cdots \eta_n)$$

gebracht werden können. Die $u_\varkappa(y_1, \cdots y_n)$ bilden alsdann ein System unabhängiger Lösungen des durch die Gleichungen (35) bestimmten vollständigen Systems, d. h. ein System von einander unabhängiger Invarianten.

142. Invarianten einer gemischten Gruppe. Differentialinvarianten.

Wir fragen nun, welche Invarianten von H zugleich Invarianten von G sind.

Da alle infinitesimalen Transformationen von G von den $\mathfrak{X}_h f$ abhängig sind, so verwandeln sich die $\mathfrak{X}_h f$ bei Anwendung irgend einer Transformation von G in lineare homogene Functionen ihrer selbst. Eine Lösung des durch die Gleichungen (35) bestimmten vollständigen Systems muss demnach bei Anwendung irgend einer Transformation von G wieder in eine Lösung übergehen Also verwandelt sich jedes $u_\varkappa(y_1, \cdots y_n)$ in eine Function der $n-q$ Lösungen $u_1, \cdots u_{n-q}$ Da aber die $u_\varkappa(y_1, \cdots y_n)$ für die Gruppe H Invarianten und die sämmtlichen Transformationen von G in der Form

$$H, \quad T_1 H, \quad T_2 H, \cdots \quad T_{\nu-1} H$$

darstellbar sind, so brauchen wir nur die Aenderungen zu betrachten, die die $u_1, \cdots u_{n-q}$ bei Anwendung der speciellen Transformationen $T_1, T_2, \cdots T_{\nu-1}$ erfahren.

Möge durch $T_\varkappa$ die Lösung $u_i(y_1, \cdots y_n)$ übergehen in

$$\omega_{i\varkappa}\big(u_1(y), \cdots u_{n-q}(y)\big),$$

dann bilden die ν Transformationen

$$\bar{u}_i(y) = \omega_{i\varkappa}\big(u_1(y), \cdots u_{n-q}(y)\big) \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots \nu-1),$$
$$(i = 1, 2, \cdots n-q),$$

woselbst

$$\omega_{i0}\big(u_1(y), \cdots u_{n-q}(y)\big) = u_i(y)$$

zu nehmen ist, offenbar eine Gruppe, wenn wir die Functionszeichen $\omega_{i\varkappa}$ als Operationssymbole auffassen. Jede Function der $u_1, u_2, \cdots u_{n-q}$, die bei den Operationen dieser Gruppe ungeändert bleibt, ist dann eine Invariante von G.

Da nicht jede continuirliche Gruppe Invarianten hat, so ist es von Wichtigkeit, den Invariantenbegriff zu erweitern, indem man die Differentialinvarianten einführt. Zu dem Ende betrachten wir die $y_1, y_2, \cdots y_n$ als Functionen gewisser unabhängiger Variabeln, z. B. wie es bei unseren auf die linearen Differentialgleichungen bezüglichen Untersuchungen der Fall ist, als Functionen der einen unabhängigen Variabeln x, und bilden uns zunächst die Ausdrücke, die die Ableitungen der η_i durch die y_i und deren Ableitungen darstellen.

Wenn wir uns der Einfachheit wegen auf die Transformationen der r-gliedrigen continuirlichen Gruppe H beschränken

$$(38) \qquad \eta_i = f_i^{(1)}\left(y_1, \cdots y_n \middle| \mathfrak{a}_1^{(1)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(1)}\right) = f_i^{(1)}(y|\mathfrak{a}) \qquad (i=1, 2, \cdots n),$$

so haben wir also diese Transformationsgleichungen zu differentiiren,

$$(39) \qquad \frac{d\eta_i}{dx} = \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial y_\varkappa} \frac{dy_\varkappa}{dx},$$

dann stellen die Gleichungen (38), (39) zusammengenommen Transformationen in den $2n$ Grössen

$$y_1, \cdots y_n, \frac{dy_1}{dx}, \cdots \frac{dy_n}{dx}$$

dar, die, wie leicht zu beweisen ist, eine von den r infinitesimalen Transformationen

$$\mathfrak{X}_h^{(1)} f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{hi}(y) \frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{d\xi_{hi}(y)}{dx} \frac{\partial f}{\partial \frac{dy_i}{dx}} \qquad (h=1, 2, \cdots r)$$

erzeugte r-gliedrige Gruppe bilden; man nennt dieselbe die einmal erweiterte Gruppe H; wir wollen sie durch $H^{(1)}$ bezeichnen

Die Zusammensetzung von $H^{(1)}$ (Nr. 140, S 36) ist dieselbe, wie die der Gruppe H, die Invarianten von $H^{(1)}$ heissen Differentialinvarianten erster Ordnung von H Fahren wir so fort, indem wir die Differentialquotienten der η_i etwa bis zur N^{ten} Ordnung bilden, so erhalten wir eine Gruppe in den $(N+1)n$ Grössen

$$y_1, \cdots y_n, \frac{dy_1}{dx}, \cdots \frac{dy_n}{dx}, \cdots \frac{d^N y_1}{dx^N}, \cdots \frac{d^N y_n}{dx^N},$$

die von den r infinitesimalen Transformationen

$$\mathfrak{X}_h^{(N)} f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{hi}(y) \frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{d\xi_{hi}(y)}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_i'} + \cdots + \sum_{i=1}^{n} \frac{d^N \xi_{hi}(y)}{dx^N} \frac{\partial f}{\partial y_i^{(N)}}$$
$$(h=1, 2, \cdots r)$$

erzeugt wird Die Invarianten dieser, wie man sich ausdrückt, durch N-malige Erweiterung von H erzielten Gruppe $H^{(N)}$ sind die

Lösungen des vollständigen Systems, welches durch die partiellen Differentialgleichungen

$$\mathfrak{X}_h^{(N)} f = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots r)$$

bestimmt wird; sie sind Differentialinvarianten N^{ter} Ordnung der ursprünglichen Gruppe H, und man übersieht, dass, da N stets so gross gewählt werden kann, dass die Anzahl der Variabeln in diesen Differentialgleichungen grösser ist wie r, es stets möglich ist zu einer gegebenen r-gliedrigen continuirlichen Gruppe Differentialinvarianten zu finden, indem nämlich für hinreichend grosses N eine N-mal erweiterte Gruppe nothwendig einmal intransitiv werden muss.

Für die allgemeine lineare Gruppe L ist z. B. die $(n-1)$-malige Erweiterung $L^{(n-1)}$ noch transitiv, die n-malige $L^{(n)}$ dagegen intransitiv (vergl. Nr 135, S. 17)

Offenbar ist jede Ableitung einer Differentialinvariante nach x selbst wieder eine Differentialinvariante.

Ebenso wie H kann nun auch G selbst beliebig oft erweitert werden; die Differentialinvarianten N^{ter} Ordnung der N-mal erweiterten Gruppe $G^{(N)}$ werden aus den Differentialinvarianten von $H^{(N)}$ in ähnlicher Weise ausgesondert, wie wir es für die Invarianten von G beziehungsweise H auseinandergesetzt haben.

Viertes Kapitel.

143. Algebraische Untergruppen der allgemeinen linearen Gruppe. Infinitesimale Transformationen. Algebraische Differentialgleichungen für rationale Differentialfunctionen.

Wir nehmen nunmehr die Untersuchung der rationalen Differentialfunction $R(y)$ wieder auf und können jetzt die Beziehung von $R(y)$ zu der durch die Gleichungen

$$R(y) = R(\eta)$$

bestimmten algebraischen Untergruppe $\mathfrak{G}$ der allgemeinen linearen Gruppe L dahin charakterisiren, dass wir sagen: $R(y)$ ist eine Differentialinvariante $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der $(n-1)$-mal erweiterten Gruppe $\mathfrak{G}^{(n-1)}$, wobei allerdings stets vor Augen zu halten ist, dass der Ausdruck $R(y)$ noch die Invarianten $p_1, \cdot\, p_n$ der Gruppe L nebst deren Ableitungen enthalten kann.

Die Gleichungen, welche die Gruppe $\mathfrak{G}$ definiren, seien

$$(1) \qquad \eta_i = \sum_{\varkappa=1}^{n} A_{i\varkappa}^{(j)}\left(\mathfrak{a}_1^{(j)}, \cdot\cdot\; \mathfrak{a}_r^{(j)}\right) y_\varkappa \qquad (j=1, 2, \quad \nu) \qquad (i=1, 2, \quad n),$$

die dem $j=1$ entsprechende Schaar möge die in $\mathfrak{G}$ enthaltene r-gliedrige continuirliche Gruppe $\mathfrak{H}$ darstellen, welche von infinitesimalen Transformationen

$$\mathfrak{X}_h f \qquad (h=1, 2, \quad r)$$

erzeugt wird.

Diese infinitesimalen Transformationen sind natürlich linear, denn sie setzen sich aus den n^2 infinitesimalen Transformationen der allgemeinen linearen Gruppe L, d. h. aus den

$$y_\varkappa \frac{\partial f}{\partial y_i} \qquad (i, \varkappa=1, 2, \quad n)$$

linear mit constanten Coefficienten zusammen. Sei

$$(2) \qquad \mathfrak{X}_h f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\varkappa=1}^{n} e_{\varkappa i}^{(h)} y_\varkappa \frac{\partial f}{\partial y_i} \qquad (h=1, 2, \quad r),$$

dann sind also die im allgemeinen Falle mit $\xi_{hi}(y_1, \cdots y_n)$ bezeichneten Functionen einfach

$$\xi_{hi}(y_1, \cdots y_n) = \sum_{\varkappa=1}^{n} e_{\varkappa i}^{(h)} y_\varkappa .$$

Die infinitesimalen Transformationen der $(n-1)$-mal erweiterten Gruppe $\mathfrak{G}^{(n-1)}$ lauten

$$(3) \qquad \mathfrak{X}_h^{(n-1)} f = \sum_i \sum_\varkappa e_{\varkappa i}^{(h)} y_\varkappa \frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_i \sum_\varkappa e_{\varkappa i}^{(h)} \frac{d y_\varkappa}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_i'} + \cdots + \sum_i \sum_\varkappa e_{\varkappa i}^{(h)} \frac{d^{n-1} y_\varkappa}{dx^{n-1}} \frac{\partial f}{\partial y_i^{(n-1)}},$$

und es muss demnach $R(y)$ eine Lösung des Systems partieller Differentialgleichungen

$$(4) \qquad \sum_i \sum_\varkappa e_{\varkappa i}^{(h)} \left\{ y_\varkappa \frac{\partial f}{\partial y_i} + \cdots + \frac{d^{n-1} y_\varkappa}{dx^{n-1}} \frac{\partial f}{\partial y_i^{(n-1)}} \right\} = 0 \quad (h = 1, 2, \cdots r)$$

sein. Dies giebt uns, falls die Function $R(y)$ gegeben ist, ein Mittel an die Hand, um die infinitesimalen Transformationen der Gruppen $\mathfrak{G}$ beziehungsweise $\mathfrak{H}$ zu finden.

Setzen wir nämlich in die Gleichungen (4) für f die Function $R(y)$ ein, so müssen diese Gleichungen identisch erfüllt sein. Soll eine Gleichung von der Form

$$\sum_i \sum_\varkappa e_{\varkappa i} \left\{ y_\varkappa \frac{\partial R}{\partial y_i} + y_\varkappa' \frac{\partial R}{\partial y_i'} + \cdots + y_\varkappa^{(n-1)} \frac{\partial R}{\partial y_\varkappa^{(n-1)}} \right\} = 0$$

identisch erfüllt sein, so liefert dies eine gewisse Anzahl linearer homogener Beziehungen zwischen den $e_{\varkappa i}$, vermöge deren sich eine gewisse Anzahl dieser Constanten durch die übrigen willkürlich bleibenden homogen linear darstellen lässt. Führen wir die so gewonnenen $e_{\varkappa i}$ in den Ausdruck

$$\sum_i \sum_\varkappa e_{\varkappa i} y_\varkappa \frac{\partial f}{\partial y_i}$$

ein, so stellt derselbe die allgemeinste infinitesimale Transformation von $\mathfrak{G}$ dar; die Factoren der willkürlich gebliebenen $e_{\varkappa i}$ sind die Symbole der unabhängigen infinitesimalen Transformationen, welche die Gruppe $\mathfrak{H}$ erzeugen.

Es lassen sich aber aus den partiellen Differentialgleichungen (4) noch weitere wichtige Eigenschaften der Function $R(y)$ ableiten; wir müssen zu diesem Zwecke vorerst nachweisen, dass jene r partiellen Differentialgleichungen stets unabhängig von einander sind.

Wir haben bereits in der Nr. 135 (S. 17ff.) das System von partiellen Differentialgleichungen erwähnt, welches durch die Differentialinvarianten der allgemeinen linearen Gruppe L befriedigt wird.

Die n^2 von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen

$$\mathfrak{X}_{\varkappa, i}^{(n-1)} f = y_\varkappa \frac{\partial f}{\partial y_i} + y_\varkappa' \frac{\partial f}{\partial y_i'} + \cdots + y_\varkappa^{(n-1)} \frac{\partial f}{\partial y_i^{(n-1)}} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

erzeugen die $(n-1)$-mal erweiterte Gruppe $L^{(n-1)}$, und die Differentialgleichungen

$$\mathfrak{X}_{\varkappa, i}^{(n-1)} f = 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \ldots n) \tag{5}$$

müssen folglich durch jede Invariante von $L^{(n-1)}$ befriedigt werden. Diese Differentialgleichungen sind offenbar von einander unabhängig, denn die Determinante ihrer Coefficienten ist der n^{ten} Potenz der Determinante

$$D(y_1, y_2, \ldots y_n)$$

des Fundamentalsystems $y_1, y_2, \cdots y_n$ gleich. Es constituiren folglich die Gleichungen (5) ein n^2-gliedriges vollständiges System in den n^2 Variabeln

$$y_1, \cdots y_n, \; y_1', \cdots y_n', \; \ldots \; y_1^{(n-1)}, \cdots y_n^{(n-1)}, \tag{6}$$

woraus wir beiläufig schliessen können, dass es keine von diesen Variabeln abhängige Invariante von $L^{(n-1)}$ geben könne, ein Satz, den wir schon in der Nr. 135 (S. 17) bewiesen und dort so ausgesprochen haben, dass es keine Differentialinvariante von niedrigerer als der n^{ten} Ordnung der Gruppe L giebt.

Die infinitesimalen Transformationen von $\mathfrak{G}^{(n-1)}$ sind zufolge der Gleichungen (2), (3) von der Form

$$\mathfrak{X}_h^{(n-1)} f = \sum_i \sum_\varkappa e_{\varkappa i}^{(h)} \mathfrak{X}_{\varkappa, i}^{(n-1)} f \qquad (h = 1, 2, \ldots r),$$

und da dieselben von einander unabhängig sind, so ist das System der $r \cdot n^2$ Elemente

$$\left(e_{\varkappa i}^{(h)}\right) \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots r \\ i, \varkappa = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix}$$

genau vom Range r. Nun sind die n^2 Gleichungen (5) von einander unabhängig, also gilt das Gleiche auch für irgendwelche r dieser Gleichungen; wir erhalten also auch r unabhängige Gleichungen, wenn wir mit Hülfe von $r \cdot n^2$ Grössen, die ein System vom Range r constituiren, r lineare homogene Verbindungen der Gleichungen (5) bilden.

Es sind also in der That die r Gleichungen (4) von einander unabhängig, dieselben stellen also ein genau r-gliedriges voll-

ständiges System von partiellen Differentialgleichungen in den n^2 Variabeln (6) dar.

Bilden wir nun die successiven $n^2 - r$ ersten Ableitungen der Differentialfunction $R(y)$ nach x und ersetzen in den so entstehenden Ausdrücken die Ableitungen der y_x, deren Ordnung höher ist als die $(n-1)^{\text{te}}$, durch ihre Werthe dargestellt mit Hülfe der $(n-1)$ ersten Ableitungen und der $p_1, p_2, \cdots p_n$ nebst deren Ableitungen, so sind die so entstehenden Ausdrücke, die wir der Reihe nach durch

$$R_1(y), \quad R_2(y), \cdots R_{n^2-r}(y)$$

bezeichnen, auch Differentialinvarianten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der Gruppe $\mathfrak{G}$, sie befriedigen also ebenfalls das r-gliedrige vollständige System (4) Dieses System besitzt aber genau $n^2 - r$ von einander unabhängige Lösungen, durch dieselben müssen sich also die $n^2 - r + 1$ Lösungen

$$R(y), \quad R_1(y), \quad \cdot R_{n^2-r}(y)$$

darstellen lassen. Bezeichnen wir die Differentialfunction $R(y)$ als Function von x aufgefasst durch V, so ist

$$(7) \qquad R(y) = V, \quad R_1(y) = \frac{dV}{dx}, \cdots R_{n^2-r}(y) = \frac{d^{n^2-r}V}{dx^{n^2-r}};$$

die linken Seiten dieser Gleichungen enthalten die n^2 Grössen (6) nur in $n^2 - r$ von einander unabhängigen Verbindungen, es muss folglich möglich sein, zwischen den Gleichungen (7) jene n^2 Grössen zu eliminiren Sei

$$(8) \qquad \Phi\left(V, \frac{dV}{dx}, \cdots \frac{d^{n^2-r}V}{dx^{n^2-r}}\right) = 0$$

das Resultat dieser Elimination, wo also Φ eine ganze rationale Function seiner Argumente bedeutet, mit Coefficienten, die sich aus den $p_1, \cdots p_n$ und deren Ableitungen rational zusammensetzen, dann stellt uns die Gleichung (8) eine algebraische Differentialgleichung $(n^2 - r)^{\text{ter}}$ Ordnung dar, der die Function $R(y)$ genügen muss

Bei der Bildung dieser Differentialgleichung, beziehungsweise der Gleichungen (7), wurde nur die Eigenschaft der $y_1, y_2, \quad y_n$, der Differentialgleichung

$$(9) \quad (-1)^n \frac{D(y, y_1, y_2, \cdot \quad y_n)}{D(y_1, y_2, \cdots y_n)} = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0$$

Genüge zu leisten, benutzt.

Die Differentialgleichung (8) wird also auch befriedigt werden durch jede Function, die aus

$$V = R(y)$$

hervorgeht, wenn wir für $y_1, y_2, \cdots y_n$ irgendwelche n Lösungen der linearen Differentialgleichung (9) setzen, d. h. also durch

$$R(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n),$$

wo

$$\eta_\iota = \sum_{\varkappa=1}^{n} \alpha_{\iota\varkappa} y_\varkappa \qquad (\iota = 1, 2, \quad n)$$

ist, und die $\alpha_{i\varkappa}$ ganz beliebige Constanten, auch solche, deren Determinante verschwindet, bedeuten können.

144. Eigenschaften der algebraischen Differentialgleichungen, denen die rationalen Differentialfunctionen Genüge leisten.

Wir dürfen offenbar die linke Seite der Differentialgleichung (8), d. h. also die ganze Function Φ, als eine in Bezug auf die Grössen

$$V, \frac{dV}{dx}, \cdots \frac{d^{n^2-r} V}{dx^{n^2-r}}$$

im algebraischen Sinne irreductible Function betrachten; denn sollte sich Φ nicht gleich von vorneherein in irreductibler Form ergeben, so müsste einer der irreductiblen Factoren von Φ für $V = R(y)$ verschwinden, und da die Coefficienten dieses Factors sich rational aus den $p_1, \cdot\cdot p_n$ und deren Ableitungen zusammensetzen, so würde derselbe auch für $V = R(\eta)$ verschwinden, wenn die Determinante

$$|\alpha_{i\varkappa}| \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, \quad n)$$

der $[y_\varkappa]$ mit $[\eta_\varkappa]$ verknüpfenden Transformation von Null verschieden ist. Sofern also nur solche $R(\eta)$ in Betracht kommen, die aus $R(y)$ durch die Transformationen der Gruppe L hervorgehen, könnte jener irreductible Factor an Stelle von Φ der Untersuchung zu Grunde gelegt werden

Diejenigen Integrale $R(\eta)$ der Differentialgleichung (8), für welche die Determinante der $\alpha_{i\varkappa}$ verschwindet, sind in gewisser Weise als singuläre Lösungen von (8) aufzufassen; wir wollen darum jedes Integral $R(\eta)$, wo die $\eta_1, \cdot\cdot \eta_n$ ein Fundamentalsystem constituiren, als eine nicht singuläre Lösung von (8) bezeichnen.

Dann ist es von Wichtigkeit zu zeigen, dass eine solche nicht singuläre Lösung keiner algebraischen Differentialgleichung von niedrigerer als der $(n^2 - r)^{\text{ten}}$ Ordnung genügen kann, deren Coefficienten ebenso wie die von (8) rational in den $p_1, \cdots p_n$ und deren Ableitungen sind.

Zunächst ist klar, dass, wenn eine nicht singuläre Lösung von (8) einer Differentialgleichung von niedrigerer als der $(n^2 - r)^{\text{ten}}$ Ordnung Genüge leisten würde, diese Differentialgleichung zu Folge der Unveränderlichkeit ihrer Coefficienten bei den Transformationen von L auch durch die allgemeinste nicht singuläre Lösung $R(\eta)$ befriedigt werden müsste. Nun lässt sich aber leicht einsehen, dass diese allgemeinste Lösung

$$R(\eta), \quad |\alpha_{i\varkappa}| \neq 0,$$

genau von $(n^2 - r)$ wesentlichen Parametern abhängt. Es gilt nämlich ganz allgemein der folgende von Herrn Vessiot herrührende Satz:

Setzt man in eine Function $R(y_1, y_2, \cdots y_n)$ an die Stelle der $y_1, \cdots y_n$ die aus denselben durch die allgemeinste Transformation

(10) $$\eta_i = f_i(y_1, y_2, \cdots y_n | \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots \mathfrak{a}_\varrho) \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

einer ϱ-gliedrigen Gruppe hervorgehenden transformirten Grössen $\eta_1, \cdots \eta_n$ ein, so hängt der Ausdruck $R(\eta_1, \cdots \eta_n)$ genau von $\varrho - r$ wesentlichen Parametern ab, wenn $R(y)$ bei r von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen der Gruppe (10) ungeändert bleibt.

Seien in der That

$$Y_h f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{hi}(y_1, \cdots y_n) \frac{\partial f}{\partial y_i} \qquad (h = 1, 2, \cdots \varrho)$$

ϱ unabhängige infinitesimale Transformationen, die die Gruppe (10) erzeugen, und möge $R(x)$ bei den $r \leqq \varrho$ infinitesimalen Transformationen

(11) $$\sum_{h=1}^{\varrho} e_{gh} Y_h f \qquad (g = 1, 2, \cdots r),$$

wo die e_{gh} Constanten bedeuten, ungeändert bleiben; dann ist also

$$\sum_{h=1}^{\varrho} e_{gh} \sum_{i=1}^{n} \xi_{hi}(\eta_1, \cdots \eta_n) \frac{\partial R(\eta)}{\partial \eta_i} = 0 \qquad (g = 1, 2, \cdots r),$$

und da zufolge der in der Nr. 138 (S. 29) bewiesenen Sätze

$$\xi_{gi}(\eta_1, \cdots \eta_n) = \sum_{\varkappa=1}^{\varrho} \alpha_{g\varkappa}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots \mathfrak{a}_\varrho) \frac{\partial \eta_i}{\partial \mathfrak{a}_\varkappa} \qquad \begin{pmatrix} g = 1, 2, \cdots \varrho \\ i = 1, 2, \cdots n \end{pmatrix}$$

sein muss, wo die $\alpha_{g\varkappa}$ wohlbestimmte Functionen der $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots \mathfrak{a}_\varrho$ bedeuten, so haben wir

$$\sum_{h=1}^{\varrho} e_{gh} \sum_{\varkappa=1}^{\varrho} \alpha_{h\varkappa}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdot \quad \mathfrak{a}_\varrho) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial R(\eta)}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \mathfrak{a}_\varkappa} = 0 \qquad (g = 1, 2, \quad r)$$

Da aber ferner

$$\frac{\partial R(\eta)}{\partial \mathfrak{a}_\varkappa} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial R(\eta)}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \mathfrak{a}_\varkappa}$$

ist, (wir nehmen der Einfachheit wegen an, dass $R(y)$ eine Function der $y_1, y_2, \cdot \ \cdot y_n$ allein sei; sollte es noch von den Ableitungen der $y_1, \cdots y_n$ abhängen, so wären die analogen Betrachtungen für die erweiterte Gruppe (10) anzustellen), so ergiebt sich endlich

$$\sum_{h=1}^{\varrho} e_{gh} \sum_{\varkappa=1}^{\varrho} \alpha_{h\varkappa}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots \mathfrak{a}_\varrho) \frac{\partial R(\eta)}{\partial \mathfrak{a}_\varkappa} = 0 \qquad (g = 1, 2, \quad r)$$

Diese partiellen Differentialgleichungen sind von einander unabhängig, denn die Determinante

$$|\alpha_{h\varkappa}(\mathfrak{a}_1, \cdot \quad \mathfrak{a}_\varrho)| \qquad (h, \varkappa = 1, 2, \quad \varrho)$$

ist von Null verschieden und das System der

$$(e_{gh}) \qquad (g = 1, 2, \quad r, \ h = 1, 2, \quad \varrho)$$

ist vom Range r, wenn eben die infinitesimalen Transformationen (11) von einander unabhängig sind. Die Function $R(\eta)$ befriedigt also, wenn $R(y)$ bei r von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen der ϱ-gliedrigen Gruppe (10) ungeändert bleibt, als Function der $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdot \quad \mathfrak{a}_\varrho$ aufgefasst r lineare von einander unabhängige partielle Differentialgleichungen, und man übersieht auch sofort, dass umgekehrt, wenn $R(\eta)$ solche r partielle Differentialgleichungen erfüllt, ebensoviele von einander unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe (10) vorhanden sein müssen, bei deren Anwendung $R(y)$ sich nicht verändert Nach einer in der Nr 134 (S. 14) gemachten Bemerkung hängt aber eine Function der $\mathfrak{a}_1, \cdot \cdot \mathfrak{a}_\varrho$, die r von einander unabhängige lineare partielle Differentialgleichungen erfüllt, von genau $\varrho - r$ Functionen dieser $\mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_\varrho$ wesentlich ab, und umgekehrt; unsere Behauptung ist sonach als bewiesen anzusehen.

Es hängt also der Ausdruck

$$R(\eta_1, \eta_2, \quad \cdot \eta_n), \quad |\alpha_{i\varkappa}| \neq 0,$$

von genau $n^2 - r$ wesentlichen Parametern ab, da $R(y)$ bei den r infinitesimalen Transformationen von $\mathfrak{G}$ beziehungsweise $\mathfrak{H}$ ungeändert bleibt; diese Parameter spielen, wenn man $R(\eta)$ als Lösung der Differentialgleichung (8) auffasst, die Rolle von willkürlichen Constanten. Eine Function von x, die $n^2 - r$ willkürliche Constanten enthält, kann

aber keiner Differentialgleichung von niedrigerer als der $(n^2 - r)^{\text{ten}}$ Ordnung genügen, es hat also die Differentialgleichung (8) keines ihrer nicht singulären Integrale mit einer Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung und vom selben Charakter (so drücken wir uns kurz aus, um hervorzuheben, dass die Coefficienten der Differentialgleichung Invarianten der linearen Gruppe L sind) gemein.

145. Rationale Differentialfunctionen, die zur selben Gruppe gehören.

Denken wir uns für eine Differentialfunction $R(y)$ die successiven n^2 ersten Ableitungen gebildet und aus diesen die Ableitungen der $y_1, y_2, \cdots y_n$, deren Ordnungszahl grösser ist wie $n-1$, weggeschafft; bezeichnen wir diese Ausdrücke durch

$$R_\varkappa(y) \qquad (\varkappa = 1, 2, \quad n^2),$$

so ist also, wenn wir $R(y)$ als Function von x gleich V setzen,

$$(12) \qquad V = R(y), \quad \frac{dV}{dx} = R_1(y), \quad \cdots \quad \frac{d^{n^2}V}{dx^{n^2}} = R_{n^2}(y).$$

Aus diesen $n^2 + 1$ Gleichungen, die jedenfalls mit einander verträglich sein müssen, lassen sich die n^2 Grössen

$$(13) \qquad y_1, \quad \cdots y_n, \quad \frac{dy_1}{dx}, \cdots \frac{dy_n}{dx}, \cdots \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}, \quad \cdots \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}$$

allemal eliminiren; es wird sich aber im Allgemeinen ereignen können, dass schon die $s+1$ ersten dieser Gleichungen eine Elimination jener n^2 Grössen gestatten, und dann genügt $R(y)$ einer algebraischen Differentialgleichung s^{ter} Ordnung vom selben Charakter wie (8). Es muss also die kleinste Zahl, für welche eine solche Elimination möglich ist, mit $n^2 - r$ übereinstimmen, und wir können somit auf Grund unserer bisherigen Untersuchungen den folgenden Satz aussprechen:

Bedeutet s die kleinste Zahl, für welche aus den $s+1$ ersten der Gleichungen (12) eine Elimination der sämmtlichen n^2 Grössen (13) möglich ist, so hängt die Function

$$R(\eta_1, \quad \cdots \eta_n),$$

woselbst

$$\eta_\iota = \sum_{\varkappa=1}^{n} \alpha_{\iota\varkappa} y_\varkappa, \quad |\alpha_{\iota\varkappa}| \neq 0 \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, \quad n)$$

ist, von genau s wesentlichen Parametern ab, und die durch die Gleichung

$$R(y) = R(\eta)$$

definirte algebraische Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe L enthält genau $n^2 - s$ von einander unabhängige infinitesimale Transformationen.

Daraus, dass $R(y)$ keiner Differentialgleichung von niedrigerer als der $(n^2 - r)^{\text{ten}}$ Ordnung genügen kann, schliessen wir nunmehr, dass die $n^2 - r$ Functionen

$$(14) \qquad R(y), \quad R_1(y), \quad \cdot \quad R_{n^2-r-1}(y)$$

ein System unabhängiger Lösungen des vollständigen Systems (4) (S. 46) bilden. Es lässt sich folglich jede Lösung dieses vollständigen Systems als Function der Lösungen (14) darstellen. Die Lösungen von (4) sind aber nichts anderes als die Differentialinvarianten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der von den r infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{X}_h f$ $(h = 1, 2, \quad r)$ erzeugten Gruppe $\mathfrak{H}$. Bedeutet also $S(y_1, y_2, \cdot \; y_n)$ eine rationale Differentialfunction, die bei den Transformationen von $\mathfrak{H}$ ungeändert bleibt, so ist S als Function der Lösungen (14), und zwar offenbar als algebraische Function derselben darstellbar.

Falls S nur die Transformationen der r-gliedrigen Gruppe $\mathfrak{H}$, nicht aber die der gesammten Gruppe $\mathfrak{G}$ zulässt, kann der algebraische Ausdruck von S durch die Functionen (14) auch nicht mit Zuhilfenahme der durch die Gleichung (8) definirten Irrationalität

$$\frac{d^{n^2-r} V}{d x^{n^2-r}}$$

auf eine rationale Form gebracht werden.

Wenn dagegen die rationale Differentialfunction S bei allen Transformationen von $\mathfrak{G}$ ungeändert bleibt, so lässt sich S als rationale Function von $R(y)$ und seinen Ableitungen sowie von den $p_1, p_2, \quad p_n$ nebst deren Ableitungen darstellen

Man könnte dies dadurch beweisen, dass man annimmt, die Functionen $y_1, \cdot \cdot y_n$ von x seien als eindeutige Functionen gegeben; dann müsste nämlich einem zu einem bestimmten x-Werthe gehörigen Werthesystem von $R(y)$ und seinen Ableitungen auch ein einziger Werth von $S(y)$ entsprechen; wir wollen den Beweis aber etwas schärfer fassen, indem wir mit Herrn Vessiot direct auf die Differentialgleichungen zurückgreifen, denen die Functionen $S(y)$ und $R(y)$ Genüge leisten

Bilden wir (vergl. S 52) die Differentialgleichung niedrigster Ordnung, der $S(y_1, y_2, \cdot \; y_n)$ genügt Sei dieselbe

$$\Phi(S) = 0,$$

wo $\Phi(S)$ eine ganze rationale Function bedeutet, die in Bezug auf S

und seine Ableitungen im algebraischen Sinne irreductibel ist. Dann wird diese Differentialgleichung auch befriedigt durch

$$S(\eta_1, \eta_2, \cdot \cdot \eta_n),$$

wenn wir, wie gewöhnlich, durch $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ ein beliebiges System von Integralen der Differentialgleichung (9) (S. 48) bezeichnen.

Bedeute nun u eine unbestimmte Function von x und sei

$$W = uR(y_1, y_2, \cdots y_n) + S(\eta_1, \eta_2, \cdot \cdot \eta_n),$$

so genügt W der Differentialgleichung

$$\Phi\big(W - uR(y_1, y_2, \cdot y_n)\big) = 0. \tag{15}$$

Bilden wir andererseits die Differentialgleichung niedrigster Ordnung, der die Function

$$W = uR(\eta_1, \cdots \eta_n) + S(\eta_1, \cdot \eta_n)$$

Genüge leistet,

$$\Psi(W) = 0, \tag{16}$$

so müssen die gemeinsamen Lösungen der Differentialgleichungen (15) und (16) die Gleichung

$$uR(y_1, \cdots y_n) + S(\bar{y}_1, \cdots \bar{y}_n) = uR(\eta_1, \cdot \eta_n) + S(\eta_1, \cdot \cdot \eta_n)$$

erfüllen, wo $\bar{y}_1, \cdot \cdot \bar{y}_n$ ein bestimmtes Fundamentalsystem von (9) bedeutet. Es muss also, da u eine Unbestimmte ist,

$$R(y_1, \cdot \cdot y_n) = R(\eta_1, \cdot \cdot \eta_n),$$
$$S(\bar{y}_1, \cdot \cdot \bar{y}_n) = S(\eta_1, \cdot \cdot \eta_n)$$

sein. Da aber S und R bei denselben Transformationen der linearen Gruppe L ungeändert bleiben, muss allemal, wenn

$$R(y_1, \cdot y_n) = R(\eta_1, \cdot \cdot \eta_n)$$

ist, auch

$$S(y_1, \cdot \cdot y_n) = S(\eta_1, \cdots \eta_n)$$

sein, so dass also die Gleichungen (15), (16) nur das eine gemeinsame Integral

$$W_0 = uR(y_1, y_2, \cdot \cdot y_n) + S(y_1, y_2, \cdot y_n)$$

besitzen können. Um hieraus den zu beweisenden Satz erschliessen zu können, müssen wir einen allgemeinen Satz aus der Theorie der Differentialgleichungen kennen lernen

146. Allgemeine Sätze über Differentialgleichungen. Satz, der dem Theoreme des Lagrange analog ist.

Wir behaupten zuvörderst:

Wenn zwei algebraische Differentialgleichungen ein und nur ein particulares Integral mit einander gemein haben, so ist dasselbe nothwendig eine algebraische Function.

Dieser Satz ist ein besonderer Fall des folgenden allgemeinen von Herrn Koenigsberger herrührenden Satzes:

Hat eine algebraische Differentialgleichung μ^{ter} Ordnung

(I) $$F(x, z, z', \cdots z^{(\mu)}) = 0$$

mit einer Differentialgleichung von niedrigerer, etwa m^{ter} Ordnung $(m < \mu)$

(II) $$f(x, z, z', \cdots z^{(m)}) = 0,$$

die in Bezug auf $z^{(m)}$ im algebraischen Sinne irreductibel ist, ein Integral gemein, welches keiner Differentialgleichung von noch niedrigerer Ordnung genügt, so befriedigen die sämmtlichen Lösungen von (II) die Differentialgleichung (I).

In der That ergiebt sich aus (II) durch Differentiation

(III) $$\frac{\partial f}{\partial z^{(m)}} z^{(\varkappa)} = f_{\varkappa}(x, z, z', \cdots z^{(m)}) \qquad (\varkappa = m+1, m+2 \ldots \mu),$$

wo $f_{\varkappa}(x, z, z', \cdots z^{(m)})$ eine ganze rationale Function seiner Argumente bedeutet; wenn wir also durch z_1 das den Differentialgleichungen (I) und (II) gemeinsame Integral bezeichnen, so werden die Ableitungen von z_1, deren Ordnung höher ist als die m^{te}, durch die Formeln (III) als rationale Functionen der m ersten Ableitungen gegeben, da der Factor von $z^{(\varkappa)}$

$$\frac{\partial f}{\partial z^{(m)}},$$

der in Bezug auf $z^{(m)}$ von niedrigerem Grade ist wie die linke Seite von (II), für $z = z_1$ nicht verschwinden kann.

Wäre dies nämlich der Fall, so müsste sich, indem man auf $f(x, z, z', \cdots z^{(m)})$ und

$$\frac{\partial f}{\partial z^{(m)}},$$

als ganze Functionen von $z^{(m)}$ aufgefasst, das Verfahren zur Aufsuchung des grössten gemeinsamen Theilers anwendet, entweder eine Differentialgleichung von niedrigerer als der m^{ten} Ordnung ergeben, der z_1 genügt,

oder es müsste $f(x, z, \quad z^{(m)})$ in Factoren zerfallen, die in Bezug auf $z^{(m)}$ ganze rationale Functionen sind; beides würde aber gegen die gemachten Annahmen verstossen.

Setzen wir die sich aus (III) ergebenden Werthe von

$$z^{(m+1)}, \quad z^{(m+2)}, \dots z^{(\mu)}$$

in (I) ein, so erhalten wir eine Gleichung von der Form

$$\Phi(x, z, z', \dots z^{(m)}) = 0,$$

die für $z = z_1$ befriedigt werden muss. Diese darf mit (II) zusammen eine Elimination von $z^{(m)}$ nicht gestatten, da sonst z_1 einer Differentialgleichung von niedrigerer als der m^{ten} Ordnung genügen würde; ebensowenig kann Φ in Bezug auf $z^{(m)}$ von niedrigerem Grade sein als f Also muss zufolge von bekannten Sätzen der Algebra

$$\Phi(x, z, \quad \cdots z^{(m)}) = f(x, z, \cdot \quad \cdot z^{(m)}) \Psi(x, z, \quad \cdots z^{(m)})$$

sein, wo Ψ ebenso wie Φ eine ganze rationale Function seiner Argumente bedeutet. Also verschwindet Φ für alle Lösungen der Differentialgleichung (II), und folglich befriedigen auch diejenigen Lösungen von (II), die nicht

$$\frac{\partial f}{\partial z^{(m)}}$$

zu Null machen, d. h. die nicht singuläre Integrale (im gewöhnlichen Sinne) sind, die Differentialgleichung (I).

Hat nun eine Differentialgleichung von der Form (I) mit der Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung

(IV) $$G(x, z, z', \dots z^{(\nu)}) = 0$$

ein und nur ein particulares Integral z_1 gemein, so muss es eine Differentialgleichung niedrigster Ordnung, die in Bezug auf die höchste in derselben auftretende Ableitung in algebraischem Sinne irreductibel ist, geben, der dieses Integral z_1 Genüge leistet; sei dies die Differentialgleichung (II). Dann sind also die sämmtlichen Integrale von (II) sowohl Integrale von (I) als auch von (IV), d. h. sie sind gemeinsame Lösungen dieser beiden Differentialgleichungen. Also muss die Differentialgleichung (II) von der nullten Ordnung, d. h. eine algebraische Gleichung sein; die gemeinsame Lösung z_1 ist demnach, wie behauptet wurde, eine algebraische Function

Wenden wir dies auf die Untersuchung der Nr. 145 (S 54) an, so schliessen wir also, dass W_0 eine algebraische Function der Coefficienten der Differentialgleichungen (15), (16) sein müsse. Da aber ferner, wenn $y_1, y_2, \dots y_n$ als eindeutige Functionen von x gewählt werden, sowohl $R(y)$ als auch $S(y)$ eindeutige Functionen von x sind, so muss

die algebraische Gleichung für W_0 vom ersten Grade, d. h. W_0 eine rationale Function der Coefficienten der Gleichungen (15), (16) sein. Es ist also W_0 und folglich auch $S(y_1, \cdots y_n)$ eine rationale Function von $R(y_1, \cdots y_n)$ und seinen successiven Ableitungen, d. h. da $R(y)$ der Differentialgleichung (8) genügt, eine rationale Function der durch die Gleichung (8) mit einander verknüpften Grössen

$$R(y), \quad R_1(y), \quad \cdot \quad R_{n^2-r}(y),$$

mit Coefficienten, die noch von den $p_1, \cdots p_n$ nebst deren Ableitungen abhängen.

Dieses Ergebniss entspricht dem Lagrange'schen Theoreme von den ähnlichen Functionen in der Algebra, demzufolge eine rationale Function der n Unbestimmten $x_1, x_2, \cdots x_n$, die bei derselben Permutationsgruppe ungeändert bleibt, wie eine andere rationale Function $R(x_1, \cdots x_n)$ dieser Unbestimmten sich rational durch R und die elementaren symmetrischen Functionen darstellen lässt. Wir können auch sofort den folgenden einer bekannten Verallgemeinerung des Lagrange'schen Theorems entsprechenden Satz beweisen:

Wenn die rationale Differentialfunction $S(y_1, y_2, \cdots y_n)$ bei denjenigen Transformationen ungeändert bleibt, welche den Gruppen, die beziehungsweise die Differentialfunctionen $R_1(y), R_2(y), \cdots R_\varkappa(y)$ ungeändert lassen, gemeinsam sind, so ist $S(y)$ rational durch die

$$R_1(y), \quad R_2(y), \quad \cdots R_\varkappa(y), \quad p_1, p_2, \quad \cdots p_n$$

und deren Ableitungen darstellbar.

Bilden wir nämlich den Ausdruck

$$R(y) = u_1 R_1(y) + u_2 R_2(y) + \cdot \quad \cdot + u_\varkappa R_\varkappa(y),$$

wo die $u_1, u_2, \quad u_\varkappa$ unbestimmte Functionen von x bedeuten, so bleibt $S(y)$ bei den Transformationen der Gruppe, die diesen Ausdruck ungeändert lässt, ebenfalls ungeändert, und hierdurch ist der zu beweisende Satz auf den bereits bewiesenen (S. 53) zurückgeführt.

Fünftes Kapitel.

147. Resolventen. Insbesondere solche, die ausgezeichneten Untergruppen entsprechen. Empfindliche Function. Picard'sche Resolvente.

Wir können die Differentialgleichung niedrigster Ordnung, der eine rationale Differentialfunction $R(y_1, y_2, \cdot \cdot y_n)$ genügt, unter Anwendung einer in der Algebra gebräuchlichen Terminologie als eine Resolvente der linearen Differentialgleichung (9) (S. 48) bezeichnen (vergl. Nr. 136, S. 19). Die Natur dieser Resolvente hängt offenbar wesentlich von der Beschaffenheit der Transformationsgruppe $\mathfrak{G}$ ab, die $R(y)$ unverändert lässt

In der Algebra spielen bekanntlich diejenigen Resolventen einer Gleichung eine besonders wichtige Rolle, für welche die Permutationsgruppe der der Resolvente genügenden Function eine ausgezeichnete Untergruppe der symmetrischen Gruppe aller $n!$ Permutationen ist. Wir wollen hier das analoge Verhalten für die Gruppe $\mathfrak{G}$ voraussetzen, d. h. rationale Differentialfunctionen untersuchen, deren Gruppe eine ausgezeichnete Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe L ist.

Hat man allgemein eine rationale Differentialfunction $R(y_1, y_2, \cdot \cdot y_n)$ und bedeutet $\mathfrak{H}$ die Gruppe linearer Transformationen, bei deren Anwendung $R(y)$ ungeändert bleibt, geht ferner das Fundamentalsystem $[\eta_x]$ aus $[y_x]$ durch die nicht zur Gruppe $\mathfrak{H}$ gehörige lineare Substitution T hervor, d h. ist

$$[\eta_x] = T[y_x],$$

so bleibt die Function $R(\eta)$ bei den Transformationen der mit $\mathfrak{H}$ gleichberechtigten Untergruppe (vergl. S 36, Nr. 140)

$$T^{-1}\mathfrak{H}T$$

ungeändert.

Denn sei, in leichtverständlicher Schreibweise,

$$R(\eta) = R(Ty) = \bar{R}(y),$$

so ist offenbar

$$\bar{R}(y) = R(\mathfrak{H}\eta) = R(\mathfrak{H}Ty) = \bar{R}(T^{-1}\mathfrak{H}Ty).$$

Sei nun

(17) $$\Phi(V) = 0$$

die Differentialgleichung niedrigster Ordnung, der $R(y)$ genügt, so sind die übrigen nicht singulären Integrale dieser Differentialgleichung in der Form

$$R(\eta) = R(Ty)$$

enthalten, wenn wir jetzt durch T die allgemeinste lineare Transformation mit nicht verschwindender Determinante bezeichnen. Die denselben entsprechenden Transformationsgruppen sind also die sämmtlichen mit $\mathfrak{H}$ gleichberechtigten Untergruppen

$$T^{-1}\mathfrak{H}T$$

der allgemeinen linearen Gruppe L.

Ist $\mathfrak{H}$ innerhalb L ausgezeichnet, d. h. stimmen alle zu $\mathfrak{H}$ gleichberechtigten Untergruppen mit $\mathfrak{H}$ selbst überein, so ist jedes $R(\eta)$ eine Function, die dieselbe Gruppe zulässt wie $R(y)$ selbst; es ist folglich jedes $R(\eta)$ eine rationale Function von $R(y)$ und seinen successiven Ableitungen mit Coefficienten, die sich rational aus den $p_1, p_2, \cdots p_n$ nebst deren Ableitungen zusammensetzen.

Die identische Transformation ist in L offenbar als ausgezeichnete Untergruppe enthalten; die soeben für $R(y)$ hervorgehobene Eigenschaft wird also sicherlich einer solchen Differentialfunction zukommen, deren Gruppe nur aus der identischen Transformation besteht, d. h. einer Function, die sich bei allen linearen Transformationen verändert. Eine so beschaffene Function spielt in unserer Theorie die analoge Rolle, wie die von Galois eingeführte sogenannte empfindliche Function in der Algebra; wir wollen auch dieselbe Bezeichnung für die von uns zu betrachtenden Functionen beibehalten

Sei also $R(y)$ eine empfindliche Function. Dann ist die früher mit r bezeichnete Zahl gleich Null, also sind nach dem Satze der Nr. 145 (S. 52) die $n^2 + 1$ Gleichungen (12) von einander unabhängig in dem Sinne, dass wir etwa aus den n^2 ersten derselben die Grössen (13) ausrechnen können, und dass dann diese Werthe in die letzte Gleichung eingesetzt die Differentialgleichung von der Ordnung n^2 ergeben, der die Function $R(y)$ genügt.

Die Berechnung der Grössen (13) muss aber überdies auf eindeutige Weise erfolgen können. Denn ergäben sich zwei verschiedene Werthesysteme dieser Grössen, so müssten dieselben zunächst offenbar durch eine $(n-1)$-mal erweiterte Transformation der Gruppe L aus einander hervorgehen und $R(y)$ müsste bei dieser Transformation

ungeändert bleiben. Also ergeben sich die Grössen (13) nothwendig als rationale Functionen von $R(y)$ und seinen successiven Ableitungen mit Coefficienten, die von den $p_1, \cdots p_n$ nebst deren Ableitungen rational abhängen, d. h. wir haben den einem bekannten Satze der Algebra analogen Satz:

Eine empfindliche Function $R(y)$, d. h. eine solche, die bei keiner linearen Transformation der $y_1, y_2, \cdots y_n$ ungeändert bleibt, genügt einer Differentialgleichung von der Ordnung n^2; jede nicht singuläre Lösung derselben lässt sich ebenso wie die $y_1, y_2, \cdots y_n$ und deren Ableitungen durch $R(y)$, seine Ableitungen, die $p_1, p_2, \cdots p_n$ und deren Ableitungen rational darstellen.

Ein Beispiel einer empfindlichen Function liefert der von Herrn Picard betrachtete Ausdruck

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} A_{0\varkappa} y_\varkappa + \sum_{\varkappa=1}^{n} A_{i\varkappa} \frac{dy_\varkappa}{dx} + \cdots + \sum_{\varkappa=1}^{n} A_{n-1,\varkappa} \frac{d^{n-1} y_\varkappa}{dx^{n-1}} = \mathfrak{U}(y),$$

in welchem die $A_{i\varkappa}$ $(i = 0, 1, \cdots n)$ willkürliche (unbestimmte) Functionen von x bedeuten. Differentiiren wir denselben $(n^2 - 1)$-mal nach x und schaffen die Ableitungen von höherer als der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung der $y_1, y_2, \cdots y_n$ mit Hülfe der Differentialgleichung (9) weg, so erhalten wir n^2 lineare Gleichungen für die n^2 Grössen (13), aus denen sich diese Grössen in der Form

$$(18) \qquad y_\varkappa^{(i)} = w_{\varkappa i 1} \mathfrak{U} + w_{\varkappa i 2} \frac{d\mathfrak{U}}{dx} + \cdots + w_{\varkappa i n^2} \frac{d^{n^2-1} \mathfrak{U}}{dx^{n^2-1}} \qquad \begin{pmatrix} \varkappa = 1, 2, \cdots n \\ i = 0, 1, \cdots n-1 \end{pmatrix},$$

also in diesem Falle als lineare Functionen von $\mathfrak{U}$ und seinen Ableitungen berechnen lassen, wo die Coefficienten $w_{\varkappa i l}$ sich aus den $A_{i\varkappa}$, deren Ableitungen, sowie den $p_1, p_2, \cdots p_n$ nebst deren Ableitungen rational zusammensetzen. Fügt man noch die Ableitung der Ordnung n^2 von $\mathfrak{U}$ hinzu, so ergiebt sich, wenn man in dieselbe die gefundenen Werthe der $y_\varkappa^{(i)}$ einführt, die Differentialgleichung von der Ordnung n^2, der $\mathfrak{U}$ genügt, und zwar ist dies in diesem Falle eine lineare homogene Differentialgleichung

$$(19) \qquad \frac{d^{n^2} \mathfrak{U}}{dx^{n^2}} + \pi_1 \frac{d^{n^2-1} \mathfrak{U}}{dx^{n^2-1}} + \cdots + \pi_{n^2} \mathfrak{U} = 0.$$

Wir nennen dieselbe die Picard'sche Resolvente der Differentialgleichung (9); die Coefficienten $\pi_1, \cdots \pi_{n^2}$ derselben setzen sich rational aus den $A_{i\varkappa}, p_1, \cdots p_n$ und deren Ableitungen zusammen.

Für manche Betrachtungen genügt es, einen besonderen Fall der Function $\mathfrak{U}(y)$ zu Grunde zu legen, der auch noch den Charakter einer empfindlichen Function besitzt, und den man erhält, indem man die

$$A_{i\varkappa} = 0 \qquad (i=1, 2, \quad n-1)$$

nimmt. Die so entstehende Function

$$u(y) = A_{01}y_1 + A_{02}y_2 + \cdots + A_{0n}y_n,$$

in welcher die $A_{01}, A_{02}, \cdots A_{0n}$ noch als unbestimmte Functionen von x anzusehen sind, hat mit $\mathfrak{U}(y)$ die beiden Eigenschaften gemein, dass sie einer linearen homogenen Differentialgleichung der Ordnung n^2 genügt, und dass sich die Grössen (13) durch die Function $u(y)$ und ihre Ableitungen linear mit von den $A_{01}, A_{02}, \cdots A_{0n}$, den $p_1, p_2, \cdots p_n$ und deren Ableitungen rational abhängenden Coefficienten darstellen lassen.

Die Einführung der empfindlichen Function ermöglicht es nunmehr, wie Herr Picard zum ersten Male gezeigt hat, für die linearen homogenen Differentialgleichungen eine Theorie aufzustellen, die der Galois'schen Theorie der algebraischen Gleichungen in vielen Punkten analog ist

148. Einige Sätze aus Galois' Theorie der algebraischen Gleichungen.

Wir erinnern zunächst an einige Hauptsätze der Galois'schen Theorie.

Hat man n willkürliche Grössen $x_1, x_2, \cdot\cdot x_n$, so kann man dieselben auffassen als Wurzeln einer algebraischen Gleichung

$$\text{(I)} \qquad f(x) = x^n - f_1 x^{n-1} + f_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n f_n = 0,$$

wo $f_1, f_2, \cdot\cdot f_n$ die elementaren symmetrischen Functionen bedeuten. Seien $\alpha_1, \alpha_2, \quad \alpha_n$ n Unbestimmte, so genügt die empfindliche, d h bei allen $n!$ Permutationen der $x_1, \cdot \quad x_n$ veränderliche Function

$$v = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \quad + \alpha_n x_n$$

der Gleichung vom Grade $n!$

$$\text{(II)} \qquad \mathfrak{F}(v) = \prod_{(i_1, i_2, \quad i_n)} \left(v - \alpha_1 x_{i_1} - \alpha_2 x_{i_2} - \cdot \quad \cdot - \alpha_n x_{i_n}\right)$$
$$= v^{n!} - \mathfrak{F}_1 v^{n!-1} + \cdots + \mathfrak{F}_{n!} = 0,$$

wo das Productzeichen Π sich auf alle möglichen $n!$ Permutationen

$$i_1, i_2, \cdots i_n$$

der Zahlen 1, 2, $\cdots n$ bezieht, und deren Coefficienten $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \cdots \mathfrak{F}_n$, symmetrische Functionen der $x_1, x_2, \cdots x_n$ sind.

Diese Gleichung, die sogenannte Galois'sche Resolvente, ist irreductibel, solange die $x_1, x_2, \cdots x_n$ von einander unabhängige Variable bedeuten. Die Gleichung (I) hat dann die Eigenschaft, dass jede rationale Function ihrer Wurzeln, die rational durch die Coefficienten ausgedrückt werden kann, bei sämmtlichen $n!$ Permutationen der symmetrischen Gruppe ungeändert bleibt; umgekehrt kann natürlich jede bei allen $n!$ Permutationen unveränderliche Function der Wurzeln rational durch die Coefficienten $f_1, f_2, \cdots f_n$ dargestellt werden.

Hat man dagegen eine specielle Gleichung n^{ten} Grades

$$\text{(III)} \qquad x^n - c_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n c_n = 0$$

und bezeichnet durch $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$ die Wurzeln derselben, so kann es sich ereignen, dass die Gleichung (II) reductibel wird, wenn man für $x_1, x_2, \cdots x_n$ die $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$ einsetzt, d. h. dass sie in Factoren zerfällt, deren Coefficienten demselben Rationalitätsbereiche angehören, wie die Coefficienten der Gleichung (III).

Sei dann $F_1(v)$ derjenige irreductible Factor der linken Seite von (II), der für

$$v = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \cdots + \alpha_n \xi_n$$

verschwindet, und mögen allgemein durch

$$\alpha_1 \xi_{h_1} + \alpha_2 \xi_{h_2} + \cdots + \alpha_n \xi_{h_n}$$

die Wurzeln der Gleichung

$$F_1(v) = 0$$

dargestellt werden, wo also $h_1, h_2, \cdots h_n$ gewisse Permutationen der Zahlen 1, 2, $\cdots n$ bedeuten Die Permutationen

$$\xi_{h_1}, \xi_{h_2}, \cdots \xi_{h_n}$$

bilden dann eine Gruppe, die man die Galois'sche Gruppe der Gleichung nennt und die die folgende Doppeleigenschaft besitzt:

Eine rationale Function der Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$, die ihren numerischen Werth nicht ändert, wenn man auf die $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$ eine Permutation der Gruppe anwendet, ist rational bekannt, und umgekehrt verändert eine rationale Function der Wurzeln, die rational bekannt ist, ihren numerischen Werth nicht, wenn man mit den $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$ eine Permutation jener Gruppe vornimmt.

Die Galois'sche Gruppe der speciellen Gleichung (III) besitzt also dieselben Eigenschaften in Bezug auf jene Gleichung, wie die sym-

metrische Gruppe in Bezug auf die Gleichung (I). Der specielle Charakter der Gleichung (III) besteht darin, dass für dieselbe die Gleichung (II) reductibel wird; man drückt dies nach Kronecker dadurch aus, dass man sagt, die Gleichung (III) besitze einen Affect. Der Affect einer Gleichung kann dann in folgender Weise dargestellt werden.

Denken wir uns den irreductiblen Factor $F_1(v)$ in seine linearen Factoren zerlegt

$$F_1(v) = \prod_{(h_1, h_2, \cdots h_n)} \left(v - \alpha_1 \xi_{h_1} - \alpha_2 \xi_{h_2} - \cdots - \alpha_n \xi_{h_n}\right),$$

so können wir, indem wir diese linearen Factoren statt nach den $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ nach den $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$ ordnen, $F_1(v)$ auch in der Form

$$F_1(v) = \prod_{(h_1, h_2, \cdots h_n)} \left(v - \alpha_{h_1} \xi_1 - \alpha_{h_2} \xi_2 - \cdots - \alpha_{h_n} \xi_n\right)$$

schreiben. Es erscheint dadurch $F_1(v)$ als ganze rationale Function der Unbestimmten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$, die formell ungeändert bleibt, wenn mit diesen Unbestimmten eine Permutation der Galois'schen Gruppe der Gleichung (III) vorgenommen wird. Setzen wir an die Stelle der $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ die $x_1, x_2, \cdots x_n$, so haben wir auf diese Weise die Gesammtheit der Functionen der n unbestimmten Grössen $x_1, x_2, \cdots x_n$ charakterisirt, die bei den Permutationen unserer Gruppe ungeändert bleiben. Diese Gesammtheit oder, wie Kronecker sich ausdrückt, diese Gattung von Functionen der $x_1, x_2, \cdots x_n$ (die sich nach dem Lagrange'schen Satze alle rational durch eine derselben und die elementaren symmetrischen Functionen $f_1, f_2, \cdots f_n$ darstellen lassen) hat die Eigenschaft, dem Rationalitätsbereiche der Coefficienten der Gleichung (III) anzugehören, wenn man die $x_1, x_2, \cdots x_n$ durch die $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$ ersetzt.

Bedeutet also $g(x_1, x_2, \cdots x_n)$ eine Function dieser Gattung, so werden die Affect-Eigenschaften der Gleichung (III) charakterisirt durch das System von $n + 1$ Gleichungen

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots x_n) = c_1, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_n(x_1, x_2, \cdots x_n) = c_n, \\ g(x_1, x_2, \cdots x_n) = g(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n) = c, \end{cases}$$

wo c einen bestimmten rationalen Werth bedeutet, und dieses Gleichungssystem wird nur befriedigt durch die Werthesysteme

$$x_1 = \xi_{h_1}, \quad x_2 = \xi_{h_2}, \cdots x_n = \xi_{h_n},$$

die den Permutationen der Gruppe unserer Gleichung (III) entsprechen

149. **Differentialgleichung niedrigster Ordnung für die empfindliche Function.**

Wir wollen nun nach Herrn Picard die analogen Betrachtungen für lineare Differentialgleichungen anzustellen versuchen.

Eine Bemerkung haben wir noch vorauszuschicken.

Aus den Gleichungen (18) folgt, dass jeder Lösung der linearen Differentialgleichung (19) ein wohlbestimmtes System von n Integralen der linearen Differentialgleichung (9) entspricht. Dieses System muss aber nicht nothwendig ein Fundamentalsystem sein; die Bedingung dafür, dass zwischen den durch die Gleichungen (18) definirten n Integralen von (9) eine homogene lineare Beziehung mit constanten Coefficienten stattfindet, ist (Nr. 14, Band I, S. 38) das Verschwinden der Determinante

$$D(y_1, y_2, \cdots y_n) = \left|y_\varkappa^{(\iota)}\right| \qquad \begin{pmatrix}\varkappa = 1, 2, & n \\ \iota = 0, 1, & n-1\end{pmatrix}.$$

Das giebt, wenn man die $y_\varkappa^{(\iota)}$ durch ihre Ausdrücke (18) ersetzt, eine algebraische Differentialgleichung für $\mathfrak{U}$

$$\varphi\left(\mathfrak{U}, \frac{d\mathfrak{U}}{dx}, \cdots \frac{d^\sigma \mathfrak{U}}{dx^\sigma}\right) = 0, \tag{20}$$

deren Ordnung σ höchstens gleich $n^2 - 1$ ist, und deren Coefficienten sich rational aus den $A_{\iota\varkappa}$, den $p_1, p_2, \cdots p_n$ und deren Ableitungen zusammensetzen Dieser Differentialgleichung genügen also die in der Nr 144 (S 49) sogenannten singulären Lösungen der Differentialgleichung (19) Denjenigen Integralen der letztgenannten Differentialgleichung, die nicht auch die Differentialgleichung (20) befriedigen, entspricht dann vermöge der Gleichungen (18) ein Fundamentalsystem von (9).

Aus den allgemeinen Untersuchungen der Nummern 144—146 folgt nunmehr, dass, solange die Functionen $y_1, y_2, \cdots y_n$ beliebig oder unbestimmt bleiben, keine Lösung von (19), die nicht der Differentialgleichung (20) genügt, eine algebraische Differentialgleichung von niedrigerer als der Ordnung n^2 befriedigen kann. In diesem Falle sind nur diejenigen Differentialfunctionen der $y_1, y_2, \cdots y_n$, die bei den sämmtlichen Transformationen der allgemeinen linearen Gruppe L ungeändert bleiben, rational durch die Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_n$ der Differentialgleichung und deren Ableitungen darstellbar; es entspricht dies dem Falle einer algebraischen Gleichung, deren Galois'sche Resolvente irreductibel ist.

Dagegen kann es sich bei specieller Wahl der Functionen $y_1, y_2, \cdot \quad y_n$ ereignen, dass Integrale der Picard'schen Resolvente (19), die der Differentialgleichung (20) nicht genügen, doch eine algebraische Differentialgleichung von niedrigerer als der nn^{ten} Ordnung befriedigen

Wir wollen der Einfachheit wegen annehmen, die $y_1, y_2, \cdots y_n$ bildeten ein Fundamentalsystem einer homogenen linearen Differentialgleichung mit in x rationalen Coefficienten. Sei dies die Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad P_n(x)y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdot \quad + P_0(x)y = 0$$

Für eine solche Differentialgleichung verwandelt sich eine rationale Differentialfunction eines Fundamentalsystems $y_1, y_2, \cdot\cdot \quad y_n$, wenn man mit Hülfe der Differentialgleichung die Ableitungen höherer als $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung wegschafft, in eine Differentialfunction höchstens $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit in x rationalen Coefficienten.

Möge ferner

$$\text{(21)} \qquad \Theta(\mathfrak{U}) = 0$$

die algebraische Differentialgleichung niedrigster Ordnung bedeuten, welche die folgenden Eigenschaften besitzt: Ihre Coefficienten sind rational in den A_{ix}, deren Ableitungen und in x; sie ist in Bezug auf $\mathfrak{U}$ und seine Ableitungen im algebraischen Sinne irreductibel; wenigstens eines ihrer Integrale befriedigt die Differentialgleichung (19), ohne der Differentialgleichung (20) zu genügen.

Betrachten wir die linke Seite der Differentialgleichung (21) als ganze rationale Function der höchsten Ableitung von $\mathfrak{U}$. Wäre diese ganze Function reductibel, d. h in Factoren zerlegbar, die ganze Functionen der höchsten Ableitung sind mit Coefficienten, die sich aus den Ableitungen niedrigerer Ordnung von $\mathfrak{U}$, den A_{ix} nebst deren Ableitungen und aus x rational zusammensetzen, so würde, nach einem bekannten Satze der Algebra, dieser Zerlegung von $\Theta(\mathfrak{U})$ eine Zerlegung in Factoren, die in Bezug auf alle Ableitungen von $\mathfrak{U}$ ganz sind, entsprechen müssen, falls wir von einem Factor absehen, der in den Ableitungen von $\mathfrak{U}$, deren Ordnung niedriger ist als die Ordnung der Differentialgleichung (21), ganz und rational ist Dies ist aber offenbar gestattet, da wir (21) als die Differentialgleichung niedrigster Ordnung angenommen haben, die die angegebenen Eigenschaften besitzt.

Wir können also die Forderung, dass $\Theta(\mathfrak{U})$ in Bezug auf alle Ableitungen von $\mathfrak{U}$ im algebraischen Sinne irreductibel sei, dahin abändern, dass wir voraussetzen, $\Theta(\mathfrak{U})$ sei in Bezug auf die

Ableitung höchster Ordnung, die darin auftritt, im algebraischen Sinne irreductibel.

Wir schliessen dann zunächst auf Grund des in der Nr. 146 (S. 55) bewiesenen Koenigsberger'schen Satzes, dass die sämmtlichen Lösungen der Differentialgleichung (21) der Differentialgleichung (19) genügen müssen. Es könnten aber einige Lösungen von (21) die Differentialgleichung (20) befriedigen. Wäre dies der Fall, so müssten diese Lösungen einer Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung wie $\Theta(\mathfrak{U})$ Genüge leisten, da widrigen Falles zufolge des Koenigsberger'schen Satzes jede Lösung von (21) auch eine Lösung von (20) sein müsste, was der Voraussetzung widerspricht. Wir wollen der Einfachheit wegen annehmen, dass kein Integral von (21) die Differentialgleichung (20) befriedigt, bemerken aber, dass diese Einschränkung auf die im Folgenden zu ziehenden Schlüsse ohne Einfluss ist, indem nämlich diese Schlüsse auch bestehen bleiben, wenn man jene Einschränkung fallen lässt. Machen wir jene Annahme, so folgt, dass die Differentialgleichung (21) mit keiner algebraischen Differentialgleichung niedrigerer Ordnung und vom selben Charakter eine Lösung gemein haben kann. Es ist also in diesem Falle die Differentialgleichung (21) im Sinne von Herrn Koenigsberger irreductibel.

Herr Koenigsberger sagt nämlich von einer algebraischen Differentialgleichung, sie sei irreductibel, wenn ihre linke Seite in Bezug auf die höchste Ableitung im algebraischen Sinne irreductibel ist und wenn sie mit keiner algebraischen Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung und vom selben Charakter in Bezug auf die Coefficienten ein Integral gemein hat.

Aus dieser Definition folgt auf Grund des erwähnten Koenigsberger'schen Satzes, dass, wenn eine irreductible Differentialgleichung mit einer anderen Differentialgleichung ein Integral gemein hat, dass sie dann auch ihre sämmtlichen Lösungen mit derselben gemein haben muss. Ein analoger Satz besteht bekanntlich für irreductible algebraische Gleichungen.

Ferner ist leicht einzusehen, dass eine irreductible Differentialgleichung auch mit keiner Differentialgleichung von derselben Ordnung, die aber in Bezug auf die höchsten Ableitungen von niedrigerem Grade ist, eine Lösung gemein haben kann.

Wäre dies nämlich der Fall, so könnte man die linken Seiten der beiden Differentialgleichungen als Polynome in der höchsten Ableitung auffassen und mit denselben nach der Methode des grössten gemeinsamen Theilers verfahren. Ergäbe sich ein identisch verschwindender Rest, so wäre die vorgelegte Differentialgleichung in Bezug auf die

höchste Ableitung im algebraischen Sinne reductibel. Würde dagegen ein die höchste Ableitung nicht enthaltender und nicht verschwindender Rest zum Vorschein kommen, so müsste dieser Rest durch die gemeinsame Lösung nothwendig zu Null gemacht werden, d. h. aber, die gegebene Differentialgleichung hätte mit einer Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung eine Lösung gemein. Beides widerstreitet den in der Definition der Irreductibilität enthaltenen Voraussetzungen

Es möge noch ausdrücklich auf den Unterschied hingewiesen werden, der zwischen einer in diesem (Koenigsberger'schen) Sinne irreductiblen linearen homogenen Differentialgleichung und einer solchen Gleichung, die im Sinne des Herrn Frobenius irreductibel ist, besteht.

Wenn die Differentialgleichung (21) nicht als irreductibel vorausgesetzt würde, so könnten wir nur schliessen, dass eine Lösung derselben, die nicht der Differentialgleichung (20) genügt, keiner Differentialgleichung derselben Ordnung und niedrigeren Grades in Bezug auf die höchste Ableitung genügen könne. Dementsprechend wäre im Folgenden auch immer hinzuzufügen, dass nur Integrale von (21) gemeint sind, die nicht auch die Gleichung (20) befriedigen. Um dieser Weitläufigkeit aus dem Wege zu gehen, halten wir die gemachte Einschränkung für (21) fest.

150. **Transformationsgruppe einer linearen Differentialgleichung. Methode zur Herstellung derselben. Formale Unveränderlichkeit.**

Sei $\mathfrak{U}_1$ ein particulares Integral der Differentialgleichung (21) und möge demselben gemäss der Gleichung (18) das Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdot\ y_n$ der Differentialgleichung (A) entsprechen. Sei ferner V eine beliebige andere Lösung von (21) und $z_1, z_2, \ \cdot z_n$ das entsprechende Fundamentalsystem von (A).

Dann ist

$$z_\iota = \sum_{x=1}^{n} \beta_{\iota x} y_x \qquad (\iota = 1, 2, \ldots n).$$

Wir wollen die Gesammtheit der linearen Transformationen

$$(\beta_{\iota x}) \qquad (\iota, x = 1, 2, \ \ n)$$

in's Auge fassen, die auf diese Weise dem Uebergange von einem particularen Integrale $\mathfrak{U}_1$ der Differentialgleichung (21) zu allen übrigen Integralen oder, was auf dasselbe hinauskommt, zu dem allgemeinen Integrale von (21) entsprechen

Das allgemeine Integral von (21) ist eine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung (19); wenn wir also durch

$$u_1, u_2, \cdot \; u_{n^2}$$

ein Fundamentalsystem von (19) bezeichnen, so ist das allgemeine Integral $\mathfrak{U}$ von (21) in der Form

(22) $$\mathfrak{U} = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdot \; \cdot + c_{n^2} u_{n^2}$$

darstellbar, wo die $c_1, c_2, \cdot \; c_{n^2}$ von x unabhängige Grössen bedeuten. Differentiiren wir nunmehr den Ausdruck (22) n^2-mal nach x, und sei r die Ordnung der Differentialgleichung (21).

Dann folgt aus dem Umstande, dass $\mathfrak{U}$ das allgemeine Integral der Differentialgleichung (21) darstellen soll, dass zwischen den n^2 Constanten $c_1, c_2, \cdot \; c_{n^2}$ eine gewisse Anzahl algebraischer Beziehungen bestehen muss, die ein Gebilde in dem n^2-fach ausgedehnten Gebiete der $c_1, c_2, \cdot \; c_{n^2}$ bestimmen. Dieses muss in seine irreductiblen Theilgebilde zerlegt, mindestens ein irreductibles Gebilde der Stufenzahl $n^2 - r$ enthalten, während die übrigen Theilgebilde von derselben oder von höherer Stufenzahl sein könnten Jedes einzelne dieser irreductiblen Gebilde kann dargestellt werden, indem man die $c_1, c_2, \cdot\cdot \; c_{n^2}$ als algebraische Functionen gewisser Parameter auffasst, deren Anzahl, von n^2 subtrahirt, die Stufenzahl des betreffenden Gebildes liefert (vergl hierfür die analogen Betrachtungen der Nr. 136, S 22) Mögen die Gleichungen

(23) $$c_i = \mathfrak{C}_i^{(j)}\left(\lambda_1^{(j)}, \lambda_2^{(j)}, \cdot\cdot \; \lambda_{r_j}^{(j)}\right) \qquad (j = 1, 2, \; \nu) \quad (i = 1, 2, \cdot \; n^2)$$

die ν verschiedenen irreductiblen Theilgebiete darstellen, wo also mindestens eine der Zahlen r_j gleich r, die übrigen nicht grösser als r sind.

Bilden wir mittelst der Gleichungen (18) das zu dem allgemeinen Integrale $\mathfrak{U}$ von (21) gehörige Fundamentalsystem der Differentialgleichung (A) und denken wir uns dasselbe etwa durch das der particularen Lösung $\mathfrak{U}_1$ entsprechende Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdot \; \cdot y_n$ in der Form

(24) $$\alpha_{i1} y_1 + \alpha_{i2} y_2 + \cdots + \alpha_{in} y_n \qquad (i = 1, 2, \; n)$$

dargestellt, so erscheinen die Substitutionscoefficienten $\alpha_{i\varkappa}$, entsprechend den ν irreductiblen algebraischen Gebilden (23), als algebraische Functionen der Parameter $\lambda_1^{(j)}, \lambda_2^{(j)}, \cdots \lambda_{r_j}^{(j)}$. Seien diese Functionen

(24a) $$\alpha_{i\varkappa} = \mathfrak{A}_{i\varkappa}^{(j)}\left(\lambda_1^{(j)}, \lambda_2^{(j)}, \cdots \lambda_{r_j}^{(j)}\right) \qquad (j = 1, 2, \; \nu) \quad (i, \varkappa = 1, 2, \; n)$$

Diese Formeln bestimmen uns dann die Gesammtheit der linearen Transformationen (24), die dem Uebergange von dem particularen

Integrale $\mathfrak{U}_1$ der Differentialgleichung (21) zu allen übrigen Integralen dieser Differentialgleichung entsprechen.

Von dieser Gesammtheit ist zunächst evident, dass sie eine Gruppe mit paarweise inversen Transformationen ausmacht. Die v continuirlichen Schaaren von Transformationen, welche durch die Formeln (24) und (24a) bestimmt werden, stellen also eine algebraische Untergruppe G der allgemeinen linearen Gruppe L dar, und hieraus folgt dann (vergl. Nr. 140, S. 37), dass alle Zahlen r_j mit r übereinstimmen. Wir nennen mit Herrn Picard diese Gruppe, zum Unterschiede von der in der Nr. 132 (S 5) definirten „Gruppe der Differentialgleichung", die zur Differentialgleichung (A) gehörige Transformationsgruppe und werden beweisen, dass dieselbe in Bezug auf die Gleichung (A) eine ähnliche Rolle spielt, wie die Galois'sche Gruppe in Bezug auf eine algebraische Gleichung Ehe wir auf diesen Beweis eingehen, schicken wir noch zwei Bemerkungen voraus.

Die erste Bemerkung bezweckt zu zeigen, wie man, falls die Differentialgleichung (21) bekannt ist, zu einer expliciten Darstellung der Gruppe G gelangen kann.

Denken wir uns nämlich der Einfachheit wegen die Function $\mathfrak{U}(y)$ durch die speciellere Function $u(y)$ ersetzt, d. h. nehmen wir die Functionen

$$A_{i\varkappa} \qquad (i=1, 2, \ldots n-1,\ \varkappa=1, 2, \ldots n)$$

sämmtlich gleich Null, so wird das allgemeine Integral der Differentialgleichung (21) durch den Ausdruck

$$u=\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\iota=1}^{n}\alpha_{\iota\varkappa}A_{\iota}y_{\varkappa}, \quad A_{\iota}=A_{0\iota}, \tag{25}$$

dargestellt, wo die $\alpha_{\iota\varkappa}$ als die durch die Gleichungen (24) gegebenen algebraischen Functionen von r Parametern anzusehen sind. Differentiiren wir diese Gleichung r-mal nach x und setzen die sich so ergebenden Werthe in die linke Seite von (21) ein, so wird dieselbe identisch gleich Null, wenn wir die $y_1, y_2, \cdots y_n$ als Lösungen der Differentialgleichung (A) betrachten; es ist also (21) nichts anderes als das Resultat der Elimination der r Parameter, von denen die $\alpha_{\iota\varkappa}$ abhängen, zwischen (25) und den aus dieser Gleichung durch r-malige Differentiation nach x abgeleiteten Gleichungen. Hieraus schliesst man leicht (vergl. den Satz der Nr. 141, S 41, 42), dass die linke Seite der Differentialgleichung (21) mit einem geeigneten Factor multiplicirt, eine Differentialinvariante der Gruppe G sein muss, sofern man die $y_1, y_2, \cdots y_n$ als unbestimmte Functionen ansieht

Nun kann man aber, statt auf die $[y_i]$ die Substitution

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \alpha_{i\varkappa} y_\varkappa \qquad (i=1, 2, \ldots n)$$

anzuwenden, die $[A_i]$ durch die Substitution

$$(26) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} \alpha_{\varkappa i} A_\varkappa \qquad (i=1, 2, \ldots n)$$

transformiren. Dann ist, wie aus der Symmetrie von u in Bezug auf die $[y_i]$ und die $[A_i]$ folgt, die linke Seite von (21) auch eine Differentialinvariante der durch die Formeln (26) dargestellten Gruppe $\overline{G}$ von Transformationen der $[A_i]$. Die unbestimmten Functionen $[A_i]$ kommen aber in dem Ausdrucke der linken Seite von (21) explicite vor, man kann also nach dem in der Nr. 136 (S. 21) für die dort betrachtete rationale Differentialfunction $R(y)$ dargelegten Verfahren die Gruppe $\overline{G}$ finden, welche die linke Seite von (21), aufgefasst als rationale Differentialfunction der $[A_i]$, ungeändert lässt. Mit der Gruppe $\overline{G}$ ist aber auch die Gruppe G bekannt, denn wir erhalten die Transformationen von G aus denen der Gruppe $\overline{G}$, indem wir die letzteren einfach transponiren (vergl Nr 30, Bd. I, S. 95). Da die Gruppen G und $\overline{G}$ aus paarweise inversen Substitutionen bestehen, können wir uns auch so ausdrücken, dass wir sagen: die Gruppe $\overline{G}$ besteht aus den reciproken Transformationen (vergl a. a. O.) von G, oder kürzer, $\overline{G}$ ist die zu G reciproke Gruppe.

Wenn wir auf diese Weise die Gruppe G beziehungsweise $\overline{G}$ durch eine Differentialinvariante r^{ter} Ordnung derselben, in den n unbestimmten Functionen $[A_i]$ dargestellt, bestimmen, so ist die Unveränderlichkeit dieser rationalen Differentialfunction der $[A_i]$ bei den Transformationen von $\overline{G}$, wie es bisher auch immer geschehen musste, in dem Sinne gefasst, dass jene Differentialfunction formell ungeändert bleibt Wesentlich zu unterscheiden ist hiervon der Fall — und darauf bezieht sich unsere zweite Bemerkung — wo etwa eine rationale Differentialfunction der Elemente $[y_i]$ eines Fundamentalsystems der speciellen Differentialgleichung (A), als Function von x betrachtet, ungeändert bleibt, wenn man auf die $[y_i]$ eine lineare Transformation oder eine Gruppe solcher Transformationen anwendet. Wenn wir es also mit Differentialfunctionen zu thun haben, die aus Systemen von n speciellen, d. h. nicht mehr willkürlichen oder unbestimmten Functionen gebildet sind, so werden wir die formelle Unveränderlichkeit von der Unveränderlichkeit als Function von x wohl zu unterscheiden haben.

Dies kommt sogleich in dem in der folgenden Nummer darzulegenden, von den Herren Picard und Vessiot herrührenden Doppelsatze zur Geltung, der die Analogie der Gruppe G mit der Galois'schen Gruppe einer algebraischen Gleichung begründet.

151. Fundamentaltheorem von Picard und Vessiot. Die Transformationsgruppe ist nur abhängig von der Differentialgleichung.

Der Picard-Vessiot'sche Doppelsatz, der die Grundlage der hier behandelten Theorie bildet, lautet wie folgt:

Jede rationale Differentialfunction der Elemente $[y_i]$ eines Fundamentalsystems der Differentialgleichung (A), die gleich einer rationalen Function von x ist, bleibt als Function von x ungeändert, wenn man auf die $[y_i]$ eine Transformation der Gruppe G anwendet, und umgekehrt:

jede rationale Differentialfunction der $[y_i]$, die als Function von x bei den Transformationen von G ungeändert bleibt, ist eine rationale Function von x.

Sei, zum Beweise des ersten Theiles, $R(y)$ eine rationale Differentialfunction von der vorauszusetzenden Beschaffenheit. Ersetzt man die $y_1, y_2, \cdots y_n$ und deren Ableitungen durch ihre Ausdrücke (18), so verwandelt sich $R(y)$, wenn für $\mathfrak{U}$ eine beliebige particulare Lösung der Differentialgleichung (21) genommen wird, in einen Ausdruck

$$F\left(\mathfrak{U}, \frac{d\mathfrak{U}}{dx}, \cdots \frac{d^\nu \mathfrak{U}}{dx^\nu}\right) \qquad (\nu \leqq n^2 - 1),$$

der zufolge der Voraussetzung gleich einer rationalen Function $f(x)$ von x ist Dann hat die Differentialgleichung

$$F\left(\mathfrak{U}, \frac{d\mathfrak{U}}{dx}, \cdots \frac{d^\nu \mathfrak{U}}{dx^\nu}\right) = f(x)$$

mit der irreductiblen Differentialgleichung (21) eine Lösung gemein, sie wird folglich (vergl Nr. 149, S 66) durch alle Lösungen von (21) befriedigt. Der Ausdruck F ändert sich also nicht, d. h. er bleibt dieselbe Function von x, wenn man darin $\mathfrak{U}$ durch ein beliebiges anderes Integral von (21) ersetzt. Dies besagt aber nichts anderes, als dass $R(y)$ als Function von x unverändert bleibt, wenn man auf die $y_1, y_2, \cdots y_n$ eine Transformation von G ausübt.

Sei umgekehrt die rationale Differentialfunction $R(y)$, als Function von x betrachtet, eine Invariante von G. Ersetzt man wieder die $y_1, y_2, \cdots y_n$ und ihre Ableitungen durch die Ausdrücke (18), wodurch sich $R(y)$ in F verwandelt, so stellt wegen der Unveränderlichkeit von

$R(y)$ bei Anwendung einer Transformation von G der Ausdruck F dieselbe Function von x dar, welches Integral der Differentialgleichung (21) man auch für $\mathfrak{U}$ in denselben einsetzen mag. Bedeutet μ den Grad der höchsten (r^{ten}) Ableitung in der Gleichung (21), so hat diese Gleichung für willkürliche Werthe von

$$x,\ \mathfrak{U},\ \frac{d\mathfrak{U}}{dx},\ \cdots\ \frac{d^{r-1}\mathfrak{U}}{dx^{r-1}}$$

μ verschiedene Wurzeln als Gleichung für

$$\frac{d^r\mathfrak{U}}{dx^r}.$$

Vermöge der Gleichung (21) kann man bewirken, dass F keine höhere als die r^{te} Ableitung von $\mathfrak{U}$ und diese höchstens zur $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Potenz enthält. Sei in diesem Sinne

$$F\left(\mathfrak{U},\frac{d\mathfrak{U}}{dx},\cdots\frac{d^r\mathfrak{U}}{dx^r}\right)=\overline{F}\left(\mathfrak{U},\frac{d\mathfrak{U}}{dx},\ \cdots\frac{d^r\mathfrak{U}}{dx^r}\right),$$

wo also $\overline{F}$ in der r^{ten} Ableitung von $\mathfrak{U}$ höchstens vom $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Grade ist. Für einen gegebenen Werth von x nimmt $\overline{F}$ denselben Werth an, wenn für

$$(27)\qquad \mathfrak{U},\ \frac{d\mathfrak{U}}{dx},\ \cdots\ \frac{d^r\mathfrak{U}}{dx^r}$$

irgend ein diesem x-Werthe entsprechendes Werthesystem gesetzt wird, welches der Gleichung (21) genügt; daraus schliessen wir aber auf Grund der Irreductibilität der Differentialgleichung (21), dass $\overline{F}$ die Grössen (27) überhaupt nicht mehr enthalten kann. Es ist also F eine rationale Function von x, was zu beweisen war.

Die Gruppe G ist für eine gegebene Differentialgleichung (A) nicht vollkommen bestimmt, vielmehr hängt dieselbe von der Wahl des Fundamentalsystems $y_1, y_2, \cdots y_n$ ab. Geht man von dem Fundamentalsysteme $[y_\varkappa]$ zu einem anderen Fundamentalsysteme $[z_\varkappa]$ über, welches mit $[y_\varkappa]$ durch die lineare Substitution

$$[y_\varkappa]=S[z_\varkappa]$$

verknüpft ist, so entspricht dem neuen Fundamentalsysteme die mit G gleichberechtigte Untergruppe

$$S^{-1}GS$$

als Transformationsgruppe von (A). Es kann also, ebenso wie G selbst, auch jede mit G innerhalb der allgemeinen linearen Gruppe gleichberechtigte Untergruppe als die Transformationsgruppe von (A) angesehen werden.

Im Anschlusse hieran bemerken wir, dass es im Allgemeinen für eine gegebene lineare Differentialgleichung (A) mehrere Differentialgleichungen von der für (21) vorausgesetzten Beschaffenheit geben kann. Da aber (Nr 147, S 59) jede Lösung der Picard'schen Resolvente als rationale Function einer beliebigen nicht singulären Lösung mit in x rationalen Coefficienten darstellbar ist, so gehen alle diese verschiedenen Differentialgleichungen aus einer derselben durch rationale Transformation hervor. Sie entstehen also z. B. aus (21), indem man in dieser Differentialgleichung an die Stelle von $\mathfrak{U}$ eine gewisse rationale Function von $\mathfrak{U}$ und x setzt Daraus folgt aber durch einfache Schlüsse, dass sich, wenn wir statt von (21) von irgend einer anderen der ebenso beschaffenen Differentialgleichungen ausgehen, als Transformationsgruppe der Differentialgleichung (A) entweder G selbst oder eine mit G innerhalb L gleichberechtigte Untergruppe ergiebt, so dass es also gleichgültig ist, von welcher jener algebraischen Differentialgleichungen niedrigster Ordnung, die mit (19) nicht singuläre Lösungen gemein haben, wir ausgehen

Unter allen (algebraischen linearen homogenen) Gruppen, die die Eigenschaft haben, dass eine rationale Differentialfunction der $(y_1, y_2, \cdot \cdot y_n)$, die bei den Transformationen jener Gruppe ungeändert bleibt, rational in x ist, ist die Gruppe G die engste, denn jede solche Gruppe muss G als Untergruppe enthalten. Umgekehrt muss jede Gruppe, bei deren Anwendung eine rationale Differentialfunction der $(y_1, y_2, \cdot \cdot y_n)$, die einen in x rationalen Werth besitzt, ungeändert bleibt, in G als Untergruppe enthalten sein.

Daraus folgt, dass die durch den Picard-Vessiot'schen Doppelsatz ausgedrückten Eigenschaften der Transformationsgruppe einer Differentialgleichung (A) für diese Gruppe auch charakteristisch sind, d. h. dass sie auch zur Definition dieser Gruppe dienen können

Diese Bemerkung ist insofern von Wichtigkeit, als sie uns zeigt, dass die Transformationsgruppe etwas der Differentialgleichung selbst Eigenthümliches ist, wenn wir ein bestimmtes Fundamentalsystem zu Grunde legen. Also ist z. B. auch die besondere Wahl der empfindlichen Function unwesentlich.

152. Rationalitätsbereich. Gattungen. Aequivalenz einer speciellen linearen Differentialgleichung mit der allgemeinen unter Adjunction einer gewissen Gattung.

Wenn G innerhalb der allgemeinen linearen Gruppe als ausgezeichnete Untergruppe enthalten ist, so ist die Transformationsgruppe der Differentialgleichung (A) unabhängig von der Wahl des Fundamentalsystems.

Dies ist z. B. allemal der Fall, wenn die Picard'sche Resolvente (19) der Differentialgleichung (A) so beschaffen ist, dass keines ihrer Integrale, welches nicht der Differentialgleichung (20) genügt, eine algebraische Differentialgleichung von niedrigerer als der nn^{ten} Ordnung befriedigt, denn in diesem Falle ist die Transformationsgruppe von (A) offenbar nichts anderes als die allgemeine lineare Gruppe L selbst. Wenn dies eintritt, so hat also die Differentialgleichung (A) denselben „Gruppencharakter" wie die allgemeine lineare Differentialgleichung (1) (Nr. 134, S. 15), der die n unbestimmten Functionen $y_1, y_2, \cdots y_n$ Genüge leisten Charakteristisch für die Differentialgleichung (A) ist dann nur der Umstand, dass ihre Coefficienten rationale Functionen sind, und dass wir für die Coefficienten der Differentialgleichung (21) auch die Forderung aufstellen, sie seien rationale Functionen von x (und den unbestimmten Functionen $A_{i\varkappa}$), d. h. wie wir uns kurz ausdrücken wollen, dass wir den Bereich der rationalen Functionen von x als den der bekannten Functionen oder als den Rationalitätsbereich ansehen.

Die Sätze, die wir in den Nummern 149—151 unter dieser Voraussetzung abgeleitet haben, bleiben aber nebst den für dieselben gegebenen Beweisen ohne Weiteres bestehen, wenn wir nebst den rationalen Functionen von x noch gewisse andere Functionen $f_1(x), f_2(x), \cdots$ als bekannt ansehen, sofern wir nur allenthalben den Ausdruck „rationale Function von x" durch „rationale Function von $x, f_1(x), f_2(x), \cdots$ und deren Ableitungen" ersetzen. Die Functionen $f_1(x), f_2(x), \cdots$ brauchen auch nicht in den Coefficienten von (A) explicite aufzutreten, es genügt, wenn wir sie ein für alle Mal als bekannt ansehen, oder wie wir sagen wollen, dem Rationalitätsbereiche adjungiren.

Wir werden also von der Transformationsgruppe einer homogenen linearen Differentialgleichung sprechen, unter Zugrundelegung eines gewissen Rationalitätsbereiches, d. h. indem wir gewisse Functionen von x, deren Ableitungen und rationale Verbindungen aus x, jenen Functionen und ihren Ableitungen als bekannt ansehen. Für eine Differentialgleichung mit in x rationalen Coefficienten sprechen wir dann

einfach von ihrer Transformationsgruppe (schlechthin), wenn nur die rationalen Functionen von x allein den Rationalitätsbereich ausmachen, oder von ihrer Transformationsgruppe unter Adjunction gewisser Functionen $f_1(x), f_2(x), \cdots$.

Für die „allgemeine" Differentialgleichung (1) (Nr. 134, S. 15), der die unbestimmten Functionen $y_1, y_2, \cdots y_n$ genügen, constituiren dann die invarianten Determinantenquotienten

$$p_1, p_2, \cdots p_n$$

den Rationalitätsbereich, bei dessen Zugrundelegung die allgemeine lineare Gruppe L als Transformationsgruppe dieser Differentialgleichung erscheint

Adjungirt man eine rationale Differentialfunction der $y_1, y_2, \cdots y_n$, so ist in dem so entstehenden Rationalitätsbereiche die Transformationsgruppe von (1) (Nr. 134, S. 15) nichts anderes als diejenige Untergruppe von L, bei deren Anwendung jene adjungirte Differentialfunction ungeändert bleibt. Denn diese Gruppe geniesst offenbar die in dem Picard'schen Theorem enthaltene Doppeleigenschaft, wobei man bedenken muss, dass für eine Differentialfunction der unbestimmten Functionen $y_1, y_2, \cdots y_n$ die Unveränderlichkeit als Function von x mit der formalen Unveränderlichkeit identisch ist

So ordnet sich also der Gruppencharakter der allgemeinen linearen Differentialgleichung gleichsam als besonderer Fall unter die Gruppencharaktere specieller Differentialgleichungen bei gegebenen Rationalitätsbereichen ein.

Wenn für eine gegebene lineare Differentialgleichung

$$(28) \qquad y^{(n)} + \lambda_1 y^{(n-1)} + \lambda_2 y^{(n-2)} + \cdots + \lambda_n y = 0,$$

wo die $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ Functionen sind, die einem gewissen Rationalitätsbereiche angehören, die Picard'sche Resolvente (19) kein nicht singuläres (d h. der Differentialgleichung (20) genügendes) Integral mit einer Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung, deren Coefficienten, abgesehen von den unbestimmten Functionen $A_{i\varkappa}$, demselben Rationalitätsbereiche angehören, gemein hat, d. h wenn für diesen Rationalitätsbereich die Transformationsgruppe der gegebenen Differentialgleichung die allgemeine lineare Gruppe L ist, so stimmt der Gruppencharakter der speciellen Differentialgleichung (28) mit dem der allgemeinen Differentialgleichung (1) (Nr 134, S 15) überein, und es kann ein willkürliches Fundamentalsystem der Differentialgleichung (28) als durch die n Differentialgleichungen

$$\frac{(-1)^n D_\varkappa(y_1, y_2, \cdot\ y_n)}{D(y_1, y_2, \cdot\ y_n)} = \lambda_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdot\ n)$$

definirt angesehen werden

Wenn dagegen für den betreffenden Rationalitätsbereich formationsgruppe der gegebenen Differentialgleichung unter legung eines bestimmten Fundamentalsystems $\eta_1, \eta_2, \cdot\cdot\ \eta_n$ gruppe G der allgemeinen linearen Gruppe L ist, so denk z. B. mit Hülfe des in der Nr. 141 (S. 41) angedeuteten eine rationale Differentialinvariante von G gebildet, d. h rationale Differentialfunction der unbestimmten Functionen y_1 $R(y_1, y_2, \cdots y_n)$, die bei den Transformationen von G un diesen (formell) ungeändert bleibt. Dann wird diese gl wohlbestimmten, dem Rationalitätsbereiche angehörenden I wenn man die $y_1, y_2, \cdots y_n$ durch die $\eta_1, \eta_2, \cdot\cdot\ \eta_n$ ersetzt System der $n+1$ Differentialgleichungen

$$(29) \qquad \begin{cases} \dfrac{(-1)^n D_\varkappa(y_1, y_2, \cdot\ y_n)}{D(y_1, y_2, \ y_n)} = \lambda_\varkappa & (\varkappa = 1, 2, \ n), \\ R(y_1, y_2, \cdot\cdot\ y_n) = \lambda \end{cases}$$

definirt uns das Fundamentalsystem $\eta_1, \eta_2, \cdot\ \cdot\ \eta_n$ in dem S es dann und nur dann befriedigt wird, wenn für die $y_1, y_2,$ Functionssystem gesetzt wird, welches aus $\eta_1, \eta_2, \cdot\cdot\ \eta_n$ Transformationen von G hervorgeht.

Die Differentialfunction $R(y_1, y_2, \cdot\cdot\ y_n)$ ist hierbei n Repräsentant der Gesammtheit von Differentialinvarianten de G anzusehen, die sich ja zufolge des Satzes der Nr 145 (S. 5 lich durch $R(y)$ und seine Ableitungen, sowie die $p_1, p_2, \cdot$ deren Ableitungen rational darstellen lassen. Wenn wir als schlusse an die Kronecker'sche Bezeichnung in der Algel Gesammtheit von rationalen Differentialfunctionen als eine bezeichnen, so erscheint in dem Gleichungssysteme (29) $R(y$ Repräsentant einer bestimmten Gattung

Durch diese Auffassung sind wir also in der Lage, von ciellen gegebenen Differentialgleichung (28) überzugehen zu wissen Gattung von Differentialfunctionen der n unbestimmt tionen $y_1, y_2, \cdots y_n$, indem nämlich der Gruppencharak speciellen Differentialgleichung (28) identisch wird Gruppencharakter der allgemeinen Differentialgleich

$$(\alpha) \qquad (-1)^n D(y, y_1, y_2, \cdot\cdot\ y_n) = 0,$$

falls wir dem Rationalitätsbereiche der letzteren die Gattung, der die Differentialfunction $R(y_1, y_2, \cdots y_n)$ angehört, adjungiren (vergl. S 75)

Hieraus folgt nun unmittelbar, dass alle Sätze, die wir im vierten Kapitel für Differentialfunctionen der unbestimmten Functionen $y_1, y_2, \cdots y_n$, die bei den Transformationen einer gewissen Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe L formell ungeändert bleiben, bewiesen haben, sich übertragen lassen auf Differentialfunctionen gebildet aus den Elementen eines Fundamentalsystems der speciellen Differentialgleichung (28), wenn wir in diesen Sätzen an die Stelle von „formeller Unveränderlichkeit" setzen „Unveränderlichkeit als Function von x" und zugleich überall an die Stelle der allgemeinen linearen Gruppe L die Transformationsgruppe der Differentialgleichung (28) treten lassen So haben wir z B. die Sätze:

Eine rationale Beziehung zwischen den Elementen $y_1, y_2, \cdots y_n$ eines Fundamentalsystems der Differentialgleichung (28) und den Ableitungen dieser Elemente mit Coefficienten, die dem Rationalitätsbereiche angehören, bleibt erhalten, wenn man auf die $y_1, y_2, \cdots y_n$ eine Transformation der Gruppe G anwendet.

Die Transformationen von G, bei denen eine rationale Differentialfunction $S(y)$ der $y_1, y_2, \cdots y_n$ als Function von x ungeändert bleibt, bilden eine Untergruppe G_S von G.

Ferner ergiebt sich aus dem Satze der Nr 145 (S. 53), dass eine rationale Differentialfunction $\overline{S}(y)$ der $y_1, y_2, \cdots y_n$, die als Function von x bei denselben Transformationen von G ungeändert bleibt wie die Function $S(y)$, als rationale Function von $S(y)$ und deren Ableitungen mit Coefficienten, die dem Rationalitätsbereiche angehören, darstellbar ist.

Sechstes Kapitel.

153. Bedeutung der Transformationsgruppe für das Integrationsproblem. Reduction der Transformationsgruppe durch Adjunction.

Die Bedeutung der Galois'schen Theorie der algebraischen Gleichungen liegt darin, dass die Auflösung einer gegebenen Gleichung wesentlich von der Structur ihrer Galois'schen Gruppe abhängt. Insbesondere lassen sich z. B. nothwendige und hinreichende Bedingungen angeben, die für die Gruppe einer Gleichung erfüllt sein müssen, damit diese Gleichung algebraisch, d. h. durch Wurzelausziehungen auflösbar sei. Es wird also dasselbe Auflösungsverfahren gültig sein für alle Gleichungen, die dieselbe Gruppe haben, und da, im Sinne des Gleichungssystems (IV) der Nr. 148 (S. 63), der Gruppencharakter einer gegebenen speciellen Gleichung stets identisch ist mit dem der allgemeinen Gleichung (der die n Unbestimmten $x_1, x_2, \cdots x_n$ genügen) unter Adjunction einer gewissen Gattung rationaler Functionen der $x_1, x_2, \cdots x_n$, so kann man, wie Kronecker betont hat, die Theorie der Auflösung algebraischer Gleichungen unmittelbar an der allgemeinen Gleichung (mit unbestimmten Wurzeln) und an den Gattungen von Functionen unbestimmter Grössen entwickeln.

In ähnlicher Weise bestimmt für eine lineare Differentialgleichung die ihr zugehörige Transformationsgruppe in gewissem Sinne das bei derselben anzuwendende Integrationsverfahren; in welchem Sinne dies der Fall ist, wird aus den nachfolgenden Erörterungen deutlich hervorgehen; vorläufig können wir nur Folgendes feststellen.

Die Integration einer vorgelegten linearen Differentialgleichung ist als vollzogen anzusehen, wenn derjenige Rationalitätsbereich bekannt ist, für welchen die Transformationsgruppe der gegebenen Differentialgleichung nur die identische Transformation enthält, denn dann sind die Elemente des Fundamentalsystems $y_1, y_2, \cdots y_n$ selbst rational bekannt. Es wird also wesentlich darauf ankommen, den Rationalitätsbereich so zu erweitern, dass sich die Transformationsgruppe der Differentialgleichung reducirt.

Jedenfalls wissen wir, dass wir die auf den Gruppencharakter bezüglichen Untersuchungen direct an die allgemeine lineare Differentialgleichung

$$(\alpha) \qquad (-1)^n D(y, y_1, y_2, \cdots y_n) = 0,$$

der das System der n willkürlichen linear unabhängigen Functionen $y_1, y_2, \cdots y_n$ Genüge leistet, und an die derselben zu adjungirenden rationalen Differentialfunctionen dieser $y_1, y_2, \cdots y_n$ knüpfen können, da, wie wir bewiesen haben, stets eine rationale Differentialfunction gefunden werden kann, bei deren Adjunction die Transformationsgruppe der allgemeinen linearen Differentialgleichung (α) mit der einer gegebenen speciellen Differentialgleichung von derselben Ordnung übereinstimmt.

Wir hatten bereits bemerkt, dass sich durch Adjunction einer rationalen Differentialfunction $R(y)$ (beziehungsweise der durch dieselbe repräsentirten Gattung) die Transformationsgruppe L der allgemeinen Differentialgleichung (α) auf diejenige Gruppe G reducirt, bei deren Anwendung $R(y)$ invariant bleibt.

Denken wir uns nun, es sei ein für alle Mal die Differentialgleichung (α) unter Adjunction von $R(y)$ vorgelegt, so dass also G ihre Transformationsgruppe darstellt, und adjungiren wir noch die rationale Differentialfunction $S(y)$, die bei den Transformationen der Untergruppe H von G ungeändert bleibt, während sie sich bei jeder nicht in H enthaltenen Substitution von G verändert. Dann ist H offenbar die umfassendste Gruppe, die in der Gruppe G und in der zu $S(y)$ gehörigen Transformationsgruppe gleichzeitig enthalten ist; es reducirt sich folglich die Transformationsgruppe der Differentialgleichung (α) nach Adjunction von $S(y)$ auf die Untergruppe H.

Sei z. B G eine Gruppe, die aus ν Schaaren von Transformationen besteht, und bedeute Γ die umfassendste in G enthaltene und von infinitesimalen Transformationen erzeugte continuirliche Gruppe. Dann ist (Nr 140, S. 38) Γ innerhalb G ausgezeichnet und G besteht aus ν Schaaren von der Form

$$\Gamma, \quad T_1\Gamma, \quad T_2\Gamma, \quad \cdots T_{\nu-1}\Gamma,$$

wo die $T_1, T_2, \cdots T_{\nu-1}$ Transformationen bedeuten, für welche

$$T_\varkappa^{-1}\Gamma T_\varkappa = \Gamma \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \nu-1)$$

ist Bedeutet nun $P(y)$ eine charakteristische Differentialinvariante von Γ, d. h eine Differentialfunction der $y_1, y_2, \cdots y_n$, die bei den Transformationen von Γ und nur bei diesen ungeändert bleibt, so reducirt sich zufolge des vorhin bewiesenen Satzes bei Ad-

junction von $P(y)$ die Transformationsgruppe der vorgelegten Differentialgleichung auf Γ Möge nun bei Anwendung der Transformation $T_\varkappa$ die Function $P(y)$ übergehen in

$$P_\varkappa(y) \qquad (\varkappa = 1, 2, \quad \nu - 1),$$

dann genügen die ν Functionen

$$P(y), \quad P_1(y), \cdots P_{\nu-1}(y)$$

einer algebraischen Gleichung ν^{ten} Grades, deren Coefficienten als Differentialinvarianten von G dem Rationalitätsbereiche angehören.

Wir können also sagen, dass sich durch Adjunction der Wurzeln einer algebraischen Gleichung, deren Coefficienten dem Rationalitätsbereiche angehören, die Gruppe unserer Differentialgleichung auf eine von infinitesimalen Transformationen erzeugte, also durch ein einziges Gleichungssystem darstellbare Gruppe reduciren lässt.

Da wir in der Theorie der Differentialgleichungen algebraische Operationen stets als ausführbar ansehen können, so dürfen wir im Folgenden die Annahme machen, dass die Transformationsgruppe einer vorgelegten Differentialgleichung eine aus infinitesimalen Transformationen erzeugte sei, und dass wir es auch stets nur mit solchen rationalen Differentialfunctionen zu thun haben, die bei so beschaffenen Gruppen von Transformationen ungeändert bleiben.

Für die in G enthaltene umfassendste aus infinitesimalen Transformationen erzeugte continuirliche Gruppe Γ gilt dann offenbar der folgende Doppelsatz:

Jede rationale Differentialfunction der $y_1, y_2, \cdots y_n$, die gleich einer algebraischen Function ist (d. h die einer algebraischen Gleichung genügt, deren Coefficienten dem Rationalitätsbereiche angehören), bleibt bei den Transformationen von Γ ungeändert, und

jede rationale, bei den Transformationen von Γ, oder was dasselbe heisst, bei den infinitesimalen Transformationen von G unveränderliche Differentialfunction der $y_1, y_2, \cdots y_n$ ist algebraisch ausdrückbar.

Wenn G selbst aus infinitesimalen Transformationen erzeugt, also mit Γ identisch ist, so fällt dieser Doppelsatz mit dem auf die Gruppe G bezüglichen der Nr. 151 (S. 71) zusammen.

154. Adjunction des allgemeinen Integrals einer Differentialgleichung. Normalzerlegungen der Transformationsgruppe.

Wir setzen also von nun ab voraus, dass schon von Anfang an die Gruppe G der Differentialgleichung eine aus infinitesimalen Trans-

formationen erzeugte continuirliche sei und bezeichnen nach wie vor durch $R(y)$ die den Rationalitätsbereich charakterisirende Function.

Sei $S(y)$ eine beliebige Differentialfunction der $y_1, y_2, \cdots y_n$, die bei den Transformationen der Untergruppe G_S von G ungeändert bleibt, während sich dieselbe bei jeder nicht in G_S enthaltenen Transformation von G verändert, und bilden wir $S(\eta)$, wo

$$(30) \qquad \eta_\iota = \sum_{\varkappa=1}^{n} A_{\iota\varkappa}(a_1, a_2, \cdots a_r) y_\varkappa \qquad (\iota = 1, 2, \ldots n)$$

die allgemeinste Transformation von G darstellen möge.

Wenn dann die Untergruppe G_S nur von $\varrho = r - \sigma$ Parametern abhängt, so enthält der Ausdruck $S(\eta)$ nach dem Satze von Herrn Vessiot (Nr 144, S. 50) genau $\sigma = r - \varrho$ wesentliche Parameter Differentiiren wir also $S(\eta)$ σ-mal nach x und eliminiren zwischen $S(\eta)$ und seinen σ ersten Ableitungen jene σ Parameter, so erhalten wir eine algebraische Differentialgleichung

$$(31) \qquad \Phi(S) = 0$$

σ^{ter} Ordnung für $S(\eta)$, deren Coefficienten offenbar rationale Differentialfunctionen der $y_1, y_2, \cdots y_n$ sind, die bei den Transformationen von G ungeändert bleiben und folglich dem Rationalitätsbereiche angehören. Diese Differentialgleichung (31), die wir uns in Bezug auf S und seine Ableitungen im algebraischen Sinne irreductibel denken können, hat keines ihrer nicht singulären Integrale (im Sinne der Nr 144, S. 49) mit einer Differentialgleichung niedrigerer Ordnung und vom selben Charakter gemein; denn eine solche Differentialgleichung müsste dann auch durch $S(\eta)$ selbst befriedigt werden, d. h. sie besässe eine Lösung, die σ wesentliche willkürliche Parameter enthält, und das ist unmöglich (vergl Nr 144, S 52) Wir können folglich die Differentialgleichung (31) auch als die Differentialgleichung niedrigster Ordnung mit dem Rationalitätsbereiche angehörigen Coefficienten definiren, der die rationale Differentialfunction $S(y)$ Genüge leistet

Die Transformationen von G, bei denen $S(\eta)$, aufgefasst als Differentialfunction der $y_1, y_2, \cdots y_n$, ungeändert bleibt, bilden offenbar eine Untergruppe von G, die aus G_S hervorgeht, indem man diese letztere Gruppe durch die Substitution, die $[\eta_\iota]$ mit $[y_\iota]$ verknüpft, transformirt. Wir nannten (Nr 140, S 36) eine solche Untergruppe mit G_S innerhalb G gleichberechtigt

Adjungiren wir nunmehr der Differentialgleichung (α) die sämmtlichen Lösungen von (31), so reducirt sich die Transformationsgruppe G auf diejenige Untergruppe, die allen mit G_S innerhalb G gleich-

berechtigten Untergruppen gemeinsam ist; diese ist aber offenbar innerhalb G ausgezeichnet, und zwar ist es die umfassendste ausgezeichnete Untergruppe von G, bei deren Anwendung $S(y)$ ungeändert bleibt; wir können also sagen:

Durch Integration der Differentialgleichung niedrigster Ordnung mit dem Rationalitätsbereiche angehörigen Coefficienten, der eine rationale Differentialfunction der $y_1, y_2, \cdot \cdot y_n$ Genüge leistet, reducirt sich die Gruppe G unserer linearen Differentialgleichung (α) auf eine ausgezeichnete Untergruppe.

Auf Grund dieses Satzes können wir nun übersehen, in welcher Weise die Structur der Transformationsgruppe G das bei der Integration der Differentialgleichung (α) einzuschlagende Verfahren bestimmt

Sei G_1 eine umfassendste in G enthaltene ausgezeichnete Untergruppe, d. h. eine ausgezeichnete Untergruppe von G, die in keiner anderen ausgezeichneten Untergruppe von G enthalten ist; sei ebenso G_2 eine umfassendste ausgezeichnete Untergruppe von G_1, G_3 eine solche von G_2, und so fort, dann muss in dieser Folge von Gruppen endlich eine Gruppe G_{m-1} zum Vorschein kommen, die ausser sich selbst und der identischen Transformation keine ausgezeichnete Untergruppe enthält, die also (vergl. Nr. 140, S. 36) eine einfache Gruppe ist Die Folge

$$G_0, G_1, G_2, \cdot \quad G_{m-1}, \quad (G_0 = G),$$

soll dann nach Herrn Vessiot eine Normalzerlegung von G heissen

Wir denken uns nun für $\varkappa = 1, 2, \quad \cdot m$ eine Untergruppe $\Gamma_\varkappa$ von $G_{\varkappa-1}$ bestimmt, die $G_\varkappa$ enthält und überdies von der grösstmöglichen Anzahl von Parametern abhängt. Sei ferner $f_\varkappa(y)$ eine Differentialinvariante von $\Gamma_\varkappa$, die bei keiner nicht in $\Gamma_\varkappa$ enthaltenen Transformation von $G_{\varkappa-1}$ ungeändert bleibt, und bedeute $\lambda_\varkappa$ die Differenz zwischen den Anzahlen der Parameter in den Gruppen $G_{\varkappa-1}$ und $\Gamma_\varkappa$ Dann befriedigt $f_1(y)$ eine Differentialgleichung

$$\Phi_1(f_1) = 0$$

von der Ordnung λ_1 Denkt man sich dieselbe integrirt und adjungirt ihr allgemeines Integral dem Rationalitätsbereiche von (α), so reducirt sich die Transformationsgruppe auf G_1. Hiernach genügt $f_2(y)$ einer Differentialgleichung

$$\Phi_2(f_2) = 0$$

von der Ordnung λ_2, durch deren Integration sich die Transformationsgruppe von (α) auf G_2 reducirt So kann man fortfahren, bis man

endlich G_{m-1} als Transformationsgruppe von (α) hat. Wenn man dann noch die allgemeine Lösung der Differentialgleichung λ_m^{ter} Ordnung

$$\Phi_m(f_m) = 0,$$

der f_m Genüge leistet, adjungirt, so reducirt sich die Transformationsgruppe von (α) auf die identische Transformation (weil G_{m-1} eine einfache Gruppe ist), so dass also die Integrale $y_1, y_2, \cdots y_n$ selbst dem Rationalitätsbereiche angehören.

Die Integration von (α) ist somit auf die successive Lösung von Differentialgleichungen der Ordnungen

$$(32) \qquad \lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m$$

zurückgeführt, und zwar sind diese Hülfsdifferentialgleichungen immer von der möglichst niedrigen Ordnung, weil wir uns die $\Gamma_\varkappa$ als mit der grösstmöglichen Parameteranzahl behaftet gewählt dachten.

Im Allgemeinen wird es natürlich mehrere von einander verschiedene Normalzerlegungen der Gruppe G geben können und entsprechend wird man auf verschiedene Ketten von Hülfsdifferentialgleichungen geführt werden Stets sind aber die Zahlen (32) dieselben, d. h. die Hülfsdifferentialgleichungen, die den verschiedenen Normalzerlegungen von G entsprechen, haben immer dieselben Ordnungszahlen. Dieses interessante Resultat, auf dessen Begründung wir nicht eingehen, ist zuerst von Herrn Vessiot bewiesen worden.

155. Lineare Differentialgleichungen, durch deren Adjunction sich die Transformationsgruppe reducirt. Reciprocitätssatz. Hülfsdifferentialgleichungen mit einfacher Gruppe. Integration durch Quadraturen.

Das einer Normalzerlegung von G entsprechende Integrationsschema der Differentialgleichung (α) gewinnt nur in dem Falle praktische Bedeutung, wenn die Untergruppen $\Gamma_\varkappa$ als algebraische Untergruppen gewählt werden können. Aber selbst in diesem Falle wird die Untersuchung einer linearen Differentialgleichung im Allgemeinen auf die von algebraischen Differentialgleichungen von höherem als dem ersten Grade zurückgeführt Diese haben zwar insofern einen ganz besonderen Charakter, als sich die Art, wie die willkürlichen Constanten in das allgemeine Integral eingehen, genau übersehen lässt; immerhin wird es aber von Bedeutung sein zu fragen: wann lässt sich die Transformationsgruppe einer vorgelegten linearen Differentialgleichung durch Adjunction der Lösungen einer anderen ebenfalls linearen Differentialgleichung reduciren?

Wenn wir die Frage in dieser Form stellen, so gehen wir über die bisher festgehaltene Art der Adjunction hinaus. Wir hatten nämlich bisher immer nur rationale Differentialfunctionen der Elemente eines Fundamentalsystems adjungirt und konnten deshalb die Untersuchung an der allgemeinen Differentialgleichung (α) führen, deren Transformationsgruppe wir durch Adjunction einer geeigneten rationalen Differentialfunction zur Uebereinstimmung gebracht hatten mit der Transformationsgruppe einer vorgelegten speciellen Differentialgleichung. Die so gefundenen Sätze übertragen sich vermöge des in der Nr. 152 (S. 76, 77) dargelegten Princips unmittelbar auf specielle Differentialgleichungen, indem nur an Stelle der formellen Unveränderlichkeit rationaler Differentialfunctionen die Unveränderlichkeit als Function von x tritt.

Wir machen von dieser Uebertragbarkeit sofort Gebrauch, indem wir uns eine specielle Differentialgleichung (A), deren Transformationsgruppe für einen gegebenen Rationalitätsbereich G sein möge, vorgelegt denken, und nach der Beschaffenheit einer anderen linearen Differentialgleichung

$$\text{(B)} \qquad \frac{d^m z}{dx^m} + q_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + q_m z = 0$$

mit dem Rationalitätsbereiche angehörenden Coefficienten fragen, durch deren Integration sich die Gruppe G von (A) reducirt.

Es sei also $z_1, z_2, \cdots z_m$ ein Fundamentalsystem von (B) und möge durch Adjunction desselben die Gruppe G von (A) auf eine Untergruppe G_1 reducirt werden, die genau s Parameter weniger enthält wie G selbst. Möge die aus den Elementen $y_1, y_2, \cdots y_n$ eines Fundamentalsystems von (A) gebildete rationale Differentialfunction $R_1(y)$ genau bei den Transformationen von G_1 (als Function von x) ungeändert bleiben, dann ist also nach dem Picard-Vessiot'schen Doppelsatze

$$R_1(y_1, y_2, \cdots y_n) = H_1(z_1, z_2, \cdots z_m),$$

wo $H_1(z)$ eine rationale Differentialfunction der $z_1, z_2, \cdots z_m$ bedeutet. Denken wir uns nun im Sinne der Nr. 154 (S. 81) die Differentialgleichung niedrigster Ordnung mit dem ursprünglichen Rationalitätsbereiche angehörigen Coefficienten gebildet, der die Function $R_1(y)$ genügt, so ist dieselbe von der s^{ten} Ordnung. Bilden wir ebenso die Differentialgleichung niedrigster Ordnung für $H_1(z_1, z_2, \cdots z_m)$, so haben diese beiden Differentialgleichungen eine Lösung mit einander gemein und sind folglich mit einander identisch. Bezeichnen wir also mit $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ das durch die allgemeinste Transformation von G

aus $y_1, y_2, \cdot\ \ y_n$ entstehende Fundamentalsystem von (A), durch $\zeta_1, \zeta_2, \cdot\cdot\ \zeta_m$ das mit $z_1, z_2, \cdots z_m$ durch die allgemeinste Transformation der Gruppe der Differentialgleichung (B) verknüpfte Fundamentalsystem von (B), so enthalten die beiden Ausdrücke

$$R_1(\eta_1, \eta_2, \quad \eta_n) \quad \text{und} \quad H_1(\zeta_1, \zeta_2, \cdot\cdot\ \zeta_m)$$

genau s wesentliche Parameter, und jeder Werth, den einer von beiden für ein bestimmtes Werthesystem der in ihm enthaltenen Parameter annimmt, stimmt mit einem Werthe des anderen für ein gewisses Werthesystem seiner Parameter überein.

Daraus schliessen wir zuvörderst, dass mit der Adjunction der $z_1, z_2, \quad \cdot z_m$ auch alle verschiedenen Werthe von

$$R_1(\eta_1, \eta_2, \cdot\cdot\ \eta_n)$$

dem Rationalitätsbereiche hinzugefügt werden, da jeder derselben gleich einer rationalen Differentialfunction der $z_1, z_2, \cdot\ \cdot z_m$ wird, dass also die Gruppe G_1 in G nothwendig als ausgezeichnete Untergruppe enthalten sein muss.

Denken wir uns aber nun umgekehrt die Integrale $y_1, y_2, \cdot\cdot\ y_n$ von (A) der Differentialgleichung (B) adjungirt, so gehört $R_1(y)$ und folglich auch $H_1(z_1, z_2, \cdot\cdot z_m)$ dem Rationalitätsbereiche an. Da der Ausdruck

$$H_1(\zeta_1, \zeta_2, \quad \zeta_m)$$

genau s wesentliche Parameter enthält, so reducirt die Adjunction der $y_1, y_2, \cdot\cdot y_m$ die Transformationsgruppe von (B) auf eine Gruppe, die mindestens s Parameter weniger enthält. Andererseits kann die Reduction auch nicht um mehr als s Parameter erfolgen, da wir ebenso für die Differentialgleichung (A) schliessen können, dass ihre Transformationsgruppe bei Adjunction der $z_1, z_2, \cdots z_m$ um mindestens soviele Parameter reducirt werden muss, wie die Gruppe von (B) bei Adjunction der $y_1, y_2, \cdot\ \cdot y_n$. Also findet sich die Gruppe von (B) durch Adjunction der $y_1, y_2, \quad y_n$ auf eine Untergruppe und zwar offenbar auch auf eine ausgezeichnete Untergruppe reducirt, die genau s Parameter weniger enthält wie die ursprüngliche. Wir haben somit den folgenden Satz, der einem bekannten Theoreme der Algebra analog ist, und den man wohl als den Reciprocitätssatz bezeichnen kann:

Wenn sich die Transformationsgruppe einer linearen Differentialgleichung (A) durch Adjunction der Lösungen einer anderen linearen Differentialgleichung (B) auf eine Untergruppe reducirt, die s Parameter weniger enthält wie die ursprüngliche, so reducirt sich die Gruppe von (B) durch

Adjunction der Lösungen von (A) in derselben Weise, und die neuen Transformationsgruppen sind beide Male in den ursprünglichen als ausgezeichnete Untergruppen enthalten.

Sei insbesondere die Transformationsgruppe der Differentialgleichung (B) eine einfache; wenn sich dann durch Adjunction der Lösungen von (B) die Transformationsgruppe von (A) wirklich reducirt, so muss sich zufolge des Reciprocitätssatzes die Gruppe von (B) durch Adjunction der Lösungen von (A) auf die identische Transformation reduciren, d. h. es sind die Lösungen von (B) rationale Differentialfunctionen der Lösungen $y_1, y_2, \cdot\ y_n$ von (A).

Wenn man sich also auf die Adjunction der Lösungen von linearen Hülfsdifferentialgleichungen mit einfacher Gruppe beschränkt, so bleibt man im Rahmen der Betrachtungen, die sich auf die Adjunction rationaler Differentialfunctionen der Elemente eines Fundamentalsystems der gegebenen Differentialgleichung beziehen und bei denen die gegebene specielle Differentialgleichung durch die allgemeine Differentialgleichung (α) unter Adjunction einer gewissen Gattung rationaler Differentialfunctionen ersetzt werden kann

Dies ist insbesondere der Fall, wenn es sich um die Frage handelt, ob eine vorgelegte lineare Differentialgleichung durch Quadraturen integrirt werden kann

In der That kann eine Quadratur, d. h. also die Ausführung eines Integrals

$$u = \int f(x)dx,$$

wo $f(x)$ eine dem Rationalitätsbereiche angehörige Function bedeutet, stets ersetzt werden durch die Integration der homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dv}{dx} = f(x)v, \tag{33}$$

wenn

$$u = \log v$$

gesetzt wird. Die Transformationsgruppe einer Gleichung von der Form (33) ist aber die homogene lineare Gruppe in einer Variabeln v, und diese ist offenbar einfach

Wenn also die Integration einer (homogenen) linearen Differentialgleichung erster Ordnung die Transformationsgruppe einer gegebenen linearen Differentialgleichung reducirt, so ist die Lösung der Hülfsdifferentialgleichung eine

rationale Differentialfunction der Elemente eines Fundamentalsystems der gegebenen Gleichung, und die reducirte Gruppe ist eine ausgezeichnete Untergruppe, die von einem Parameter weniger abhängt wie die ursprüngliche

156. **Bedingung für die Integrabilität einer linearen Differentialgleichung durch Quadraturen. Integrable Gruppen. Die allgemeine lineare Differentialgleichung ist nicht durch Quadraturen lösbar.**

Soll sich also die Integration der Differentialgleichung (α), deren Transformationsgruppe unter Adjunction der Differentialfunction $R(y)$ wieder durch G bezeichnet werden mag, durch eine Kette von lauter linearen homogenen Hülfsdifferentialgleichungen erster Ordnung absolviren lassen, d. h. soll es möglich sein, die Gruppe G durch successive Adjunction der Lösungen solcher Hülfsdifferentialgleichungen auf die identische Transformation zu reduciren, so muss sich die Transformationsgruppe der gegebenen Differentialgleichung allemal, wenn sie sich reducirt, auf eine ausgezeichnete Untergruppe reduciren, die einen Parameter weniger enthält Es muss demnach G eine ausgezeichnete Untergruppe G_1 besitzen, die einen Parameter weniger enthält wie G, ebenso G_1 eine ausgezeichnete Untergruppe G_2, die einen Parameter weniger enthält wie G_1 u s. w.

Eine aus r infinitesimalen Transformationen

$$\mathfrak{X}_1 f,\ \mathfrak{X}_2 f,\ \cdots \mathfrak{X}_r f$$

erzeugte Gruppe G, die diese Eigenschaft besitzt, nennt Herr Lie eine integrable Gruppe

Wir können also sagen: Damit eine lineare Differentialgleichung durch eine Kette von homogenen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung integrirbar sei, ist nothwendig, dass sie eine integrable Transformationsgruppe besitze

In analytischer Form lässt sich die Bedingung dafür, dass die r-gliedrige Gruppe G integrabel sei, dahin aussprechen, dass es möglich sein muss, r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen derselben

$$Y_1 f,\ Y_2 f,\ \quad Y_r f$$

so auszuwählen, dass Relationen von der Form

$$(34)\qquad (Y_\iota Y_{\iota+\varkappa}) = \sum_{s=1}^{\iota+\varkappa-1} c_{\iota,\iota+\varkappa,s} Y_s f \qquad \begin{pmatrix}\iota = 1, 2, & r-1\\ \varkappa = 1, 2, & r-\iota\end{pmatrix}$$

bestehen, wo die c Constanten bedeuten; denn in diesem Falle erzeugen die

$$Y_1 f, \cdots Y_i f$$

offenbar eine i-gliedrige Untergruppe, die (vergl. Nr. 140, S. 37) in der aus den

$$Y_1 f, \cdots Y_i f, \; Y_{i+1} f$$

erzeugten $(i+1)$-gliedrigen ausgezeichnet enthalten ist.

Herr Lie hat nun über integrable homogene lineare Gruppen einen wichtigen Satz aufgestellt, auf den wir kurz eingehen müssen. Sei

$$\mathfrak{X}f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\varkappa i} y_i \frac{\partial f}{\partial y_\varkappa} \tag{35}$$

eine infinitesimale homogene lineare Transformation, dann beweist man leicht mit Hülfe derselben Methode, die wir im dritten Abschnitte für die Reduction einer linearen Substitution auf die canonische Form angewandt haben, dass sich stets neue Veränderliche

$$z_i = \sum_{\varkappa=1}^{n} c_{i\varkappa} y_\varkappa \qquad (i = 1, 2, \quad n) \tag{36}$$

so einführen lassen, dass die infinitesimale Transformation $\mathfrak{X}f$ die **canonische Form**

$$b_{11} z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + (b_{21} z_1 + b_{22} z_2) \frac{\partial f}{\partial z_2} + \cdots + (b_{n1} z_1 + \cdots + b_{nn} z_n) \frac{\partial f}{\partial z_n} \tag{37}$$

annimmt.

Der Satz des Herrn Lie besagt nun, dass, wenn die infinitesimalen Transformationen

$$Y_1 f, \; Y_2 f, \; \cdots Y_i f$$

eine integrable lineare homogene Gruppe erzeugen, d. h. wenn zwischen diesen infinitesimalen Transformationen die Beziehungen (34) bestehen, dass sich dann stets neue Variable (36) so einführen lassen, dass **alle** $Y_\iota f$ $(\iota = 1, 2, \cdots i)$ **gleichzeitig** die canonische Form (37) annehmen.

Nach Einführung dieser neuen Variabeln $[z_i]$ ist also eine jede integrable lineare homogene Gruppe in der aus den infinitesimalen Transformationen

$$\begin{array}{llll} z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1}, & & & \\ z_1 \frac{\partial f}{\partial z_2}, & z_2 \frac{\partial f}{\partial z_2}, & & \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ z_1 \frac{\partial f}{\partial z_n}, & z_2 \frac{\partial f}{\partial z_n}, & \cdots & z_n \frac{\partial f}{\partial z_n} \end{array}$$

erzeugten Gruppe, d. h. in der Gruppe

$$(38)\qquad \begin{cases} \zeta_1 = \alpha_{11} z_1, \\ \zeta_2 = \alpha_{21} z_1 + \alpha_{22} z_2, \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ \zeta_n = \alpha_{n1} z_1 + \alpha_{n2} z_2 + \cdots + \alpha_{nn} z_n \end{cases}$$

als Untergruppe enthalten; wir können demnach das Lie'sche Theorem auch so aussprechen:

Jede integrable lineare homogene (aus infinitesimalen Transformationen erzeugte) Gruppe geht durch Transformation mit einer linearen Substitution in eine Untergruppe der Gruppe (38) über, oder, was dasselbe besagt, sie ist mit einer Untergruppe von (38) innerhalb der allgemeinen linearen homogenen Gruppe L gleichberechtigt

Auf Grund dieses Satzes werden wir nun im Stande sein zu übersehen, dass die für die Integrabilität einer linearen Differentialgleichung durch Quadraturen oben als nothwendig erkannte Bedingung zugleich hinreichend ist.

Sei also die Gruppe G unserer Differentialgleichung (α) integrabel und denken wir uns das Fundamentalsystem $[y_i]$ gleich von vorneherein so gewählt, dass G in der Gruppe von der Form (38) als Untergruppe enthalten sei.

Offenbar bleiben die rationalen Differentialfunctionen

$$\frac{d \log y_1}{dx}, \quad \frac{d \log D(y_1, y_2)}{dx}, \quad \frac{d \log D(y_1, y_2, y_3)}{dx}, \ldots \frac{d \log D(y_1, y_2, \ldots y_{n-1})}{dx}$$

ungeändert, wenn man auf die $[y_i]$ eine Substitution von der Form (38) ausübt; sie sind folglich Differentialinvarianten der Gruppe (38) und demnach auch der in (38) als Untergruppe enthaltenen Gruppe G, also sind sie, zufolge des Picard-Vessiot'schen Doppelsatzes, Functionen von x, die dem Rationalitätsbereiche angehören.

Setzen wir

$$\frac{d \log y_1}{dx} = f(x),$$

so ist

$$y_1 = e^{\int f(x)\, dx},$$

d. h. ein Integral unserer Differentialgleichung genügt einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung, deren Coefficienten dem Rationalitätsbereiche angehören Benützen wir dieses Integral nach dem in der Nr. 18 (Band I, S. 47) dargelegten Verfahren zur Reduction der Differentialgleichung (α), indem wir setzen

$$y = y_1 \int z\, dx,$$

so genügt z einer linearen homogenen Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren Coefficienten sich zufolge der Gleichungen (3) Nr 18 (Band I, S. 48) aus den Coefficienten von (α) und den successiven Ableitungen von $\log y_1$ rational zusammensetzen und somit dem Rationalitätsbereiche angehören. Für diese Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung constituiren die Ausdrücke

$$z_\varkappa = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_{\varkappa+1}}{y_1}\right) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n-1)$$

ein Fundamentalsystem, und da, wie sich aus den Formeln der Nummern 18 und 22 ergiebt,

$$D(y_1, y_2, \cdot \cdot y_\lambda) = y_1^\lambda D(z_1, z_2, \cdot \quad z_{\lambda-1})$$

ist, so sind die Ausdrücke

$$\frac{d \log z_1}{dx}, \quad \frac{d \log D(z_1, z_2)}{dx}, \ldots \frac{d \log D(z_1, z_2, \quad z_{n-2})}{dx}$$

Functionen, die dem Rationalitätsbereiche angehören. Die Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung für z hat also genau dieselbe Beschaffenheit wie die ursprüngliche für y, wir können somit das Verfahren der Nr. 18 weiter anwenden, indem wir setzen

$$z = z_1 \int u\, dx,$$

und so fortfahren, bis wir endlich zu einer linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dw}{dx} = \varphi(x) w$$

kommen, wo $\varphi(x)$ eine dem Rationalitätsbereiche angehörige Function bedeutet

Es ist dann

$$y_2 = y_1 \int z_1 dx = e^{\int f(x)\, dx} \int e^{\int f_1(x)\, dx} dx,$$

wo

$$f_1(x) = \frac{d \log z_1}{dx}$$

gesetzt wurde, und so fortfahrend erhalten wir endlich

$$y_n = e^{\int f(x)\, dx} \int e^{\int f_1(x)\, dx} dx \int \cdots \int e^{\int \varphi(x)\, dx} dx,$$

d. h. die Elemente des Fundamentalsystems der Differentialgleichung (α) bestimmen sich durch Quadraturen, und zwar sind zur Bestimmung von $y_\varkappa$ im Allgemeinen $\varkappa$ übereinandergesetzte Quadraturen erforderlich, so dass also die Integration von (α) im Allgemeinen

$$1 + 2 + \cdot \cdot + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Quadraturen erfordert.

Damit ist also in der That bewiesen, dass eine lineare Differentialgleichung, deren Transformationsgruppe integrabel ist, auch stets durch Quadraturen gelöst werden kann.

Wir erkennen zugleich, dass, wenn eine lineare Differentialgleichung durch Quadraturen integrirbar ist, eines ihrer Integrale eine dem Rationalitätsbereiche angehörige logarithmische Ableitung besitzt, und dass die Bestimmung der übrigen Integrale auf dem in der Nr 18 dargelegten Wege erfolgen kann, wobei dann immer nur lineare homogene Differentialgleichungen erster Ordnung mit dem Rationalitätsbereiche angehörenden Coefficienten zu lösen und auf deren Lösungen wiederholte Quadraturen auszuüben sind.

Die Bedingung dafür, dass die Transformationsgruppe der gegebenen Differentialgleichung integrabel sei, setzt implicite voraus, dass diese Gruppe eine aus infinitesimalen Transformationen erzeugte continuirliche ist Um dieses zu erreichen, wird man im Allgemeinen dem Rationalitätsbereiche noch die Wurzeln einer bestimmten algebraischen Gleichung mit dem Rationalitätsbereiche angehörigen Coefficienten zu adjungiren haben (vergl. Nr 154, S. 80) Wenn also z B die vorgelegte lineare Differentialgleichung in x rationale Coefficienten besitzt, so wird, falls dieselbe durch Quadraturen integrirbar sein soll, ihre Transformationsgruppe nach Adjunction einer gewissen algebraischen Function von x eine integrable sein müssen, und es wird sich dann eine ihrer Lösungen in der Form

$$e^{\int f(x)\,dx}$$

darstellen lassen, wo $f(x)$ eine rationale Function des adjungirten algebraischen Gebildes bedeutet, d h der Logarithmus einer Lösung ist ein zu diesem Gebilde gehöriges Abel'sches Integral.

Die entwickelte Theorie der durch Quadraturen integrirbaren linearen Differentialgleichungen ist der Galois'schen Theorie der durch Wurzelgrössen auflösbaren algebraischen Gleichungen analog Es ist nun auch leicht, einen Satz aufzustellen, der dem Ruffini-Abel'schen Satze von der Unauflösbarkeit der allgemeinen Gleichung (höheren als vierten Grades) durch Wurzelzeichen entspricht.

Es ist nämlich die allgemeine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung für $n > 1$ nicht durch Quadraturen integrirbar.

In der That ist die Transformationsgruppe dieser Differentialgleichung die allgemeine lineare homogene Gruppe L,

$$\eta_i = \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{i\varkappa} y_\varkappa; \quad |a_{i\varkappa}| \neq 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

Diese besitzt eine algebraische ausgezeichnete Untergruppe mit $n^2 - 1$ Parametern, nämlich diejenige, deren Transformationen die Bedingung

$$|a_{i\varkappa}| = 1 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

erfüllen und die Herr Lie als die specielle lineare homogene Gruppe bezeichnet. Die specielle lineare homogene Gruppe $\bar{L}$ ist aber, wie Herr Lie bewiesen hat, einfach, also ist L nicht integrabel

Siebentes Kapitel.

157. Probleme, die sich auf die Transformationsgruppe beziehen. Algebraische Beziehungen zwischen Integralen und deren Ableitungen. Der Fall algebraischer Integrale.

Nachdem wir so die auf die Betrachtung der Transformationsgruppe einer gegebenen Differentialgleichung gegründete Integrationstheorie dargelegt haben, wollen wir uns über die Probleme zu orientiren suchen, die sich an diese Theorie noch anknüpfen oder derselben unterordnen lassen.

Die erste Aufgabe, deren Lösung als wünschenswerth erscheint, ist die, alle möglichen Arten von Transformationsgruppen, die bei linearen homogenen Differentialgleichungen überhaupt auftreten können, aufzufinden. Das heisst mit andern Worten: Man suche für ein gegebenes n alle algebraischen Untergruppen der linearen homogenen Gruppe in n Variabeln. Diese Aufgabe ist für $n=2$ und $n=3$ gelöst. Wir kommen hierauf später zurück.

Kennt man eine algebraische Untergruppe G von L, so denke man sich eine zu derselben gehörige Differentialinvariante $R(y_1, y_2, \cdots y_n)$ aufgestellt. Dann besitzt die allgemeine lineare Differentialgleichung (α) unter Adjunction von $R(y)$ eine bestimmte Integrationstheorie, die allen denjenigen linearen Differentialgleichungen gemeinsam ist, deren Transformationsgruppe mit G übereinstimmt Man kann sich dann weiter die Aufgabe stellen, für einen gegebenen Rationalitätsbereich, etwa den der rationalen Functionen von x, alle linearen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung aufzufinden, deren Transformationsgruppe G ist Es wird sich also darum handeln, Functionen des Rationalitätsbereiches zu finden, die in den Gleichungen (29) (S. 76) die rechten Seiten bilden können.

Eine lineare Differentialgleichung (A), deren Transformationsgruppe G ist, hat die besondere Eigenschaft, dass zwischen den Elementen $y_1, y_2, \cdots y_n$ eines Fundamentalsystems und deren Ableitungen die durch die Gleichung

$$(39) \qquad R(y_1, y_2, \cdots y_n) = f(x)$$

dargestellte Beziehung besteht, wo $f(x)$ eine dem Rationalitätsbereiche angehörige Function, also z. B., wenn wir den einfachsten Fall betrachten, wo der Rationalitätsbereich aus den rationalen Functionen von x gebildet wird, eine rationale Function bedeutet. Aus dieser Beziehung folgen durch Differentiation nach x noch eine Reihe anderer Beziehungen, in denen wir uns stets die Ableitungen von höherer als der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung weggeschafft denken können, und die durch die Lösungen $[y_i]$ von (A) ebenfalls identisch befriedigt werden. Aber wenn die Gruppe G von r Parametern abhängt, so sind nur diejenigen dieser Beziehungen von einander und von (39) unabhängig, die durch weniger als (n^2-r)-malige Differentiation entstehen, denn $R(y)$ genügt in diesem Falle (vergl. Nr. 145, S. 52) einer algebraischen Differentialgleichung $(n^2-r)^{\text{ter}}$ Ordnung

Wenn umgekehrt von der Differentialgleichung (A) bekannt ist, dass die Elemente $y_1, y_2, \cdots y_n$ eines Fundamentalsystems und deren Ableitungen gewisse algebraische Gleichungen mit rationalen Coefficienten

$$(40)\qquad f_\varkappa\left(y_1, \cdots y_n, y_1', \cdots y_n', \cdots y_1^{(n-1)}, \cdots y_n^{(n-1)}, x\right) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \cdots)$$

erfüllen, so folgt aus den Sätzen der Nr 152 (S 77), dass diese Gleichungen erhalten bleiben, wenn wir auf die $[y_i]$ eine Transformation der Transformationsgruppe G der Differentialgleichung anwenden. Daraus kann man eine für die Gruppe G bedeutsame Folgerung ziehen.

Denken wir uns nämlich die Relationen (40) beliebig oft differentiirt und die Ableitungen höherer als $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der $y_1, y_2, \cdots y_n$ mit Hülfe der Differentialgleichung (A) entfernt. Dann entsteht ein gewisses Gleichungssystem für die n^2+1 Grössen

$$(41)\qquad x, y_1, \cdots y_n, y_1', \cdots y_n', y_1^{(n-1)}, \cdots y_n^{(n-1)},$$

dessen Gleichungen einander nie widersprechen können, weil sie ja zufolge der Voraussetzung durch die Lösungen $y_1, y_2, \cdots y_n$ befriedigt werden. In diesem Gleichungssysteme wird es dann eine gewisse Anzahl von einander unabhängiger Gleichungen

$$(42)\qquad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \cdots F_\gamma = 0$$

geben; d. h. diese γ Gleichungen (42) werden die Eigenschaft haben, dass, wenn man sie nach x differentiirt und überdies die Ableitungen höherer als $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der $[y_i]$ entfernt, sich nur Gleichungen ergeben, die schon eine Folge der Gleichungen (42) sind. Wie Herr Lie gelegentlich bemerkt hat, kann man diese Eigenschaft des Gleichungssystems (42) kurz dadurch charakterisiren, dass man sagt,

dasselbe gestatte in den n^2+1 Grössen (41) die infinitesimale Transformation

$$\mathfrak{X}f = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} y_i' \frac{\partial f}{\partial y_i} + \cdots + \sum_{i=1}^{n} y_i^{(n-1)} \frac{\partial f}{\partial y_i^{(n-2)}}$$
$$- \frac{1}{P_n(x)} \sum_{i=1}^{n} \left(P_{n-1}(x) y_i^{(n-1)} + \cdots + P_0(x) y_i\right) \frac{\partial f}{\partial y_i^{(n-1)}}.$$

Deuten wir nun die n^2+1 Grössen (41) als Coordinaten eines Punktes in der ebenen (n^2+1)-fachen Mannigfaltigkeit oder dem (n^2+1)-dimensionalen Raume R_{nn+1}, so erscheinen dieselben, wenn wir die $[y_i]$ als die so bezeichneten Lösungen der Differentialgleichung (A) ansehen, als Functionen von x; wir erhalten also in dem R_{nn+1} ein eindimensionales Gebilde, eine Curve, die wir als Integralcurve $\mathfrak{C}$ von (A) bezeichnen können. Diese Art der geometrischen Deutung eines Fundamentalsystems ist ausserordentlich anschaulich. Da nämlich ein Fundamentalsystem durch die in einem beliebigen nicht singulären x-Werthe vorgeschriebenen Anfangswerthe seiner n Elemente und deren $(n-1)$ ersten Ableitungen bestimmt ist, so können wir sagen, dass durch jeden Punkt des R_{nn+1} eine und nur eine Integralcurve geht, mit Ausnahme derjenigen Punkte, die auf der durch die Gleichung

$$D(y_1, y_2, \cdot\, y_n) = 0$$

bestimmten Mannigfaltigkeit liegen, letzteres aus dem Grunde, weil die Determinante eines Fundamentalsystems für keinen nicht singulären Werth von x verschwinden darf.

Auf der anderen Seite stellen die Gleichungen (42) eine algebraische Mannigfaltigkeit im R_{nn+1} dar, auf welcher unsere Integralcurve $\mathfrak{C}$ liegt. Diese algebraische Mannigfaltigkeit muss nun in sich selbst übergehen, wenn man auf die $y_i, y_i', \cdot\cdot\, y_i^{(n-1)}$ $(i=1,2,\ldots n)$ irgend eine Transformation der Gruppe G anwendet. Denkt man sich also die Gesammtheit derjenigen linearen homogenen Transformationen der y_i aufgestellt, die auf die $y_i, y_i', \cdot\cdot\, y_i^{(n-1)}$ simultan angewandt, bei unverändertem x jene Mannigfaltigkeit in sich selbst transformiren, so bilden dieselben offenbar eine Gruppe und zwar eine algebraische Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe L. In dieser Gruppe muss dann G als Untergruppe enthalten sein.

Wir sehen daraus, dass das Bestehen von Relationen von der Form (40) einen gewissen besonderen Gruppencharakter der Differentialgleichung (A) oder (vergl. Nr. 148, S. 63) einen besonderen Affect derselben bedingt, und dass sich demnach die Untersuchung von linearen Differentialgleichungen, zwischen deren Integralen solche

Relationen bestehen, in gewissem Sinne in die Theorie der Transformationsgruppen dieser Differentialgleichungen einordnet.

In der Entwickelung der Lehre von den linearen Differentialgleichungen wurde die Frage nach der Beschaffenheit einer Differentialgleichung, deren Lösungen gewisse algebraische Gleichungen erfüllen, zuerst von Herrn Fuchs im Zusammenhange mit der Frage untersucht, wann eine lineare Differentialgleichung durch algebraische Functionen integrirt werden kann Dass dieser Fall wirklich hierher gehört, lässt sich leicht übersehen.

Denken wir uns nämlich, die durch die Gleichungen (42) bestimmte Mannigfaltigkeit sei selbst eine Curve in dem R_{nn+1}. Dann muss diese Curve mit der Integralcurve $\mathfrak{C}$ zusammenfallen oder dieselbe wenigstens enthalten, so dass also $\mathfrak{C}$ selbst eine algebraische Curve darstellt. Das heisst aber nichts anderes, als es lassen sich die

$$y_1, \cdots y_n, y_1', \cdots y_n', \cdots y_1^{(n-1)}, \cdots y_n^{(n-1)}$$

aus den Gleichungen (42) als algebraische Functionen von x berechnen.

Wenn umgekehrt von der Differentialgleichung (A) bekannt ist, dass ihre Lösungen algebraische Functionen von x sind, so bestehen offenbar zwischen den Elementen $y_1, y_2, \cdots y_n$ eines Fundamentalsystems und x gewisse algebraische Gleichungen

158. **Algebraisch integrirbare lineare Differentialgleichungen. Für dieselben ist die Transformationsgruppe endlich.**

Verweilen wir einen Augenblick bei der Betrachtung einer solchen, wie wir kurz sagen, algebraisch integrirbaren Differentialgleichung und fragen insbesondere nach der Beschaffenheit der Transformationsgruppe einer derartigen Gleichung.

Wir setzen voraus, dass die Coefficienten der zu betrachtenden linearen Differentialgleichung (A) rationale Functionen von x sind Dann wird ein Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots y_n$ von (A) einem Systeme von algebraischen Gleichungen

$$f_\varkappa(y_1, y_2, \cdots y_n, x) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \nu, \ \nu \geq n) \tag{43}$$

genügen, wo die $f_\varkappa$ ganze rationale Functionen ihrer Argumente bedeuten, von dem wir voraussetzen können, dass es irreductibel ist Wir verstehen hierunter das Folgende.

Bedeutet $x = x_0$ einen regulären Werth von x, d. h einen Werth, in dessen Umgebung sich die Integrale von (A) in gewöhnliche Potenzreihen entwickeln lassen, so sei

(44) $y_1 = \mathfrak{P}_1(x|x_0),\quad y_2 = \mathfrak{P}_2(x|x_0),\ \cdots\ y_n = \mathfrak{P}_n(x|x_0)$

ein System solcher linear unabhängiger Potenzreihen, die der Differentialgleichung (A) und folglich auch dem Gleichungssysteme (43) Genüge leisten. Diese definiren ein eindeutig bestimmtes System particularer Lösungen $y_1, y_2, \cdots y_n$ von (A) in der Fläche $\overline{T}$, die aus der x-Ebene durch Aussonderung der wesentlichen singulären Stellen und Zerschneidung in eine einfach zusammenhängende Fläche entsteht Nach den Grundlagen der Functionentheorie muss dann jedes System von Potenzreihen, welches aus (44) durch analytische Fortsetzung entsteht, ebenfalls die Gleichungen (43) befriedigen. Das Gleichungssystem (43) wird nun als irreductibel bezeichnet, wenn auch umgekehrt jedes System von Potenzreihen, welches, für $y_1, y_2, \cdots y_n$ eingesetzt, dasselbe befriedigt, aus den Reihen (44) durch analytische Fortsetzung abgeleitet werden kann. Da aber jedes solche System von Potenzreihen die Differentialgleichung (A) befriedigen muss, so muss sich dasselbe durch die aus (44) entspringenden innerhalb $\overline{T}$ eindeutig definirten $y_1, y_2, \cdots y_n$ homogen linear mit constanten Coefficienten darstellen lassen, d. h. mit anderen Worten, jedes Lösungssystem der Gleichungen (43) geht aus den $y_1, y_2, \cdots y_n$ durch Anwendung einer homogenen linearen Transformation hervor. Die Gesammtheit dieser linearen Transformationen, deren Anzahl offenbar eine endliche sein muss, bildet dann im Sinne der Nr. 132 (S. 5) die Gruppe der Differentialgleichung (A).

Bilden wir uns nunmehr die empfindliche Function

$$u = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \cdots + A_n y_n$$

mit unbestimmten $A_1, A_2, \cdot A_n$, so ist dieselbe eine algebraische Function von x, d h. sie genügt einer gewissen irreductiblen algebraischen Gleichung

(45) $$\Theta(u) = 0,$$

deren Coefficienten rationale Functionen von x und den $A_1, A_2, \cdot \cdot A_n$ sind. Diese algebraische Gleichung ist in unserem Falle die in der Nr. 149 (S. 65) definirte Differentialgleichung niedrigster Ordnung (21), die für die Bestimmung der Transformationsgruppe von (A) massgebend ist. Da (45) als irreductibel vorausgesetzt ist, so gehen zufolge des Puiseux'schen Fundamentalsatzes der Theorie der algebraischen Functionen alle Lösungen dieser Gleichung aus einer derselben, also etwa aus u, durch die Umläufe der unabhängigen Variabeln x hervor. Wir erhalten demnach diese Lösungen aus u, indem wir die $y_1, y_2, \cdot y_n$ durch die aus denselben mittelst der Substitutionen der Gruppe der

Differentialgleichung (A) hervorgehenden Grössen ersetzen Die den verschiedenen Lösungen der Differentialgleichung (21), also in unserem Falle der Gleichung (45), entsprechenden Fundamentalsysteme sind aber mit den $y_1, y_2, \cdots y_n$ durch die Operationen der Transformationsgruppe der Differentialgleichung (A) verknüpft.

Wir schliessen hieraus, dass für eine algebraisch integrirbare lineare Differentialgleichung mit in x rationalen Coefficienten die Transformationsgruppe mit der Gruppe der Differentialgleichung zusammenfällt.

In diesem Falle ist also die Transformationsgruppe der Differentialgleichung eine endliche, d. h sie besteht nur aus einer endlichen Anzahl von Operationen, ist also jedenfalls abzählbar (vergl. Nr. 133, S. 11). Es ist dies aber zugleich der einzige Fall, wo die Transformationsgruppe einer linearen Differentialgleichung eine abzählbare Gruppe ist.

In der That besteht im Allgemeinen die Transformationsgruppe G einer linearen Differentialgleichung aus einer endlichen discreten Anzahl ν von continuirlichen Transformationsschaaren (Nr. 150, S. 68), die aus einer dieser Schaaren (nämlich aus derjenigen, welche die umfassendste in G enthaltene und von infinitesimalen Transformationen erzeugte continuirliche Untergruppe Γ darstellt) durch Zusammensetzung mit ν bestimmten Transformationen, unter denen sich auch die identische Transformation befindet, hervorgehen (Nr. 153, S. 79) Wenn diese continuirliche Untergruppe Γ eine r-gliedrige Gruppe und r von Null verschieden ist, so enthält Γ und somit G jedenfalls eine continuirliche Schaar von Transformationen, da ja die Definitionsgleichungen von Γ r stetig veränderliche Parameter in sich schliessen. G kann also (vergl Nr. 140, S. 38) dann und nur dann eine abzählbare Gruppe sein, wenn die Anzahl dieser Parameter, d. h. r gleich Null ist; dann reducirt sich Γ auf die identische Transformation und G besteht aus ν Transformationen, ist also eine endliche Gruppe

Gleichwohl bleibt auch in diesem Falle der Gruppe G ihr Charakter als algebraische Untergruppe von L gewahrt.

Um das einzusehen, brauchen wir nur auf die ursprüngliche Definition einer algebraischen Gruppe zurückzugehen, wie sie sich in der Nr. 136 (S. 21) aus der Betrachtung einer rationalen Differentialfunction ergab. Der Charakter einer algebraischen Untergruppe von L bestand nämlich darin, dass zwischen den n^2 Coefficienten der allgemeinen homogenen linearen Substitution eine gewisse Anzahl von algebraischen Beziehungen gesetzt wurde, die ein Gebilde in der n^2-fachen Mannigfaltigkeit dieser Coefficienten bestimmten. Wenn dieses Gebilde eines

von nn^{ter} Stufe ist, so liefern jene algebraischen Beziehungen eine endliche Anzahl discreter Werthesysteme der n^2 Substitutionscoefficienten, so dass wir also eine endliche Gruppe erhalten.

Wenn die Transformationsgruppe G einer linearen Differentialgleichung mit in x rationalen (oder allgemeiner mit in x algebraischen) Coefficienten eine endliche ist, so ist die Differentialgleichung aber offenbar algebraisch integrirbar. Denn bilden wir aus den Elementen des Fundamentalsystems $y_1, y_2, \cdots y_n$ und aus den daraus durch die sämmtlichen Transformationen von G, deren Anzahl etwa gleich ν sein möge, hervorgehenden Integralen eine symmetrische Function, so ist diese eine ganze, rationale Function der $y_1, y_2, \cdots y_n$, die bei den Transformationen der Transformationsgruppe ungeändert bleibt, also rational (beziehungsweise algebraisch) in x ausdrückbar. Jene $n\nu$ Integrale genügen also einer algebraischen Gleichung mit in x rationalen (beziehungsweise algebraischen) Coefficienten.

159. Beziehungen zwischen der Transformationsgruppe und der Gruppe einer linearen Differentialgleichung. Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe.

Wir hatten erkannt, dass im Falle einer algebraisch integrirbaren Differentialgleichung die Transformationsgruppe mit der Gruppe der Differentialgleichung zusammenfällt. Hieran schliesst sich naturgemäss die Frage, welche Beziehung im allgemeinen Falle zwischen der zu einer Differentialgleichung (A) mit rationalen Coefficienten gehörigen Transformationsgruppe G und der Gruppe g dieser Differentialgleichung besteht.

Um uns darüber zu orientiren, betrachten wir wieder eine empfindliche Function, also etwa

$$u = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \cdots + A_n y_n,$$

und die Differentialgleichung niedrigster Ordnung (21), der dieselbe genügt. Lassen wir die unabhängige Variable x einen beliebigen Umlauf vollziehen, so erleiden die $[y_i]$ eine Substitution der Gruppe g der Differentialgleichung und u verwandelt sich in eine andere Lösung u_i der Picard'schen Resolvente (19). Nach einem allgemeinen functionentheoretischen Principe muss aber, wenn eine Function u einer algebraischen Differentialgleichung genügt, auch jeder Zweig dieser Function, der durch analytische Fortsetzung aus u hervorgeht, dieselbe Differentialgleichung erfüllen, also ist u_i jedenfalls auch eine Lösung von (21). Die den verschiedenen Lösungen von (21) entsprechenden

Fundamentalsysteme von (A) sind aber mit $[y_\iota]$ genau durch die Transformationen von G verknüpft, also muss jede Transformation von g in G enthalten sein, d. h. die Gruppe g von (A) ist eine Untergruppe von G.

Sei nun $\overline{G}$ irgend eine algebraische Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe L, welche die abzählbare Gruppe g als Untergruppe enthält. Denken wir uns eine (rationale) Differentialfunction $\overline{R}(y)$ der $y_1, y_2, \cdots y_n$ bestimmt, die bei den Transformationen von $\overline{G}$ als Function von x ungeändert bleibt, dann bleibt dieselbe, da g in $\overline{G}$ enthalten ist, bei allen Umläufen von x ungeändert, ist also eine eindeutige Function von x. Dieselbe kann aber im Allgemeinen noch Unbestimmtheitsstellen besitzen, d. h. also eine transcendente Function von x sein. Dies ist offenbar dann und nur dann möglich, wenn eine oder mehrere der wesentlichen singulären Stellen der Differentialgleichung (A) Unbestimmtheitsstellen ihrer Integrale sind. Wenn dagegen (A) keine derartigen singulären Stellen besitzt, d. h. wenn die gegebene Differentialgleichung zur Fuchs'schen Classe gehört, so können wir leicht zeigen, dass jede rationale Differentialfunction der $y_1, y_2, \cdots y_n$, die gleich einer eindeutigen Function von x ist, nothwendig eine rationale Function von x sein muss.

Jede Lösung y_ι einer Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe ist nämlich in der Umgebung irgend einer Stelle $x = x_0$ in der Form

$$y_\iota = (x - x_0)^\varrho \{\varphi_0(x) + \log(x - x_0)\varphi_1(x) + \cdots + \varphi_\nu(x)[\log(x - x_0)]^\nu\}$$

darstellbar, wo ϱ eine Constante, $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots \varphi_\nu(x)$ nach positiven ganzen Potenzen von $x - x_0$ fortschreitende Reihen bedeuten Für $x = \infty$ ist an die Stelle von $x - x_0$ einfach $\frac{1}{x}$ zu setzen.

Setzen wir diese Ausdrücke und die sich aus denselben für die Ableitungen der y_ι ergebenden in den Algorithmus einer rationalen Differentialfunction $\overline{R}(y)$ ein, so ergiebt sich für $\overline{R}(y)$ eine in einer gewissen Umgebung von $x = x_0$ gültige Entwickelung von derselben Form. Soll nun $\overline{R}(y)$ gleich einer eindeutigen Function sein, so müssen in der Entwickelung dieser Function in der Umgebung jeder Stelle $x = x_0$ zunächst die Logarithmen wegfallen, und ferner können auch nur Potenzen von $x - x_0$ mit ganzzahligen Exponenten auftreten Es kann folglich $\overline{R}(y)$ an einer Stelle, in deren Umgebung sich diese Function nicht regulär verhält, nur von einer endlichen ganzzahligen Ordnung unendlich werden, also ist $\overline{R}(y)$ in der That eine rationale Function von x.

Hieraus folgt nun, mit Rücksicht auf den Picard-Vessiot'schen Doppelsatz, dass $\overline{R}(y)$ bei den Transformationen der Transformationsgruppe G unserer Differentialgleichung ungeändert bleiben muss, es ist also G nothwendig als Untergruppe in der Gruppe $\overline{G}$ enthalten. In diesem Falle ist also G in jeder algebraischen Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe L, die g zur Untergruppe hat, als Untergruppe enthalten, d. h. wir haben den Satz:

Wenn die Differentialgleichung (A) der Fuchs'schen Classe angehört, so ist ihre Transformationsgruppe die engste algebraische Gruppe linearer homogener Transformationen, die die Gruppe der Differentialgleichung als Untergruppe in sich schliesst.

Dass dieser Satz für Differentialgleichungen, die nicht der Fuchsschen Classe angehören, nicht immer gültig ist, kann man leicht an dem Beispiele der linearen Differentialgleichung mit constanten Coefficienten bewahrheiten.

Sei nämlich

$$y^{(n)} + c_1 y^{(n-1)} + \cdots + c_n y = 0$$

eine solche Differentialgleichung und setzen wir der Einfachheit wegen voraus, dass die charakteristische Gleichung (Nr. 69, Bd. I, S. 245)

$$\varphi(\varrho) = \varrho^n + c_1 \varrho^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

die n von einander verschiedenen Wurzeln $r_1, r_2, \cdots r_n$ habe, so sind (vergl. a. a. O.) die n Fundamentalintegrale

$$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}, \quad \cdots \quad y_n = e^{r_n x}$$

eindeutige Functionen von x. Die Gruppe g der Differentialgleichung besteht demnach allein aus der identischen Substitution und kann folglich selbst als eine algebraische Untergruppe $\overline{G}$ der allgemeinen linearen Gruppe L angesehen werden. Dagegen ist die Transformationsgruppe G z. B. durch die rationale Differentialfunction

$$\frac{1}{y_1} \frac{dy_1}{dx} = r_1$$

bestimmt, die offenbar dem Rationalitätsbereiche angehört. Man übersieht leicht, dass G die n-gliedrige aus den infinitesimalen Transformationen

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1}, \quad y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2}, \quad \cdots \quad y_n \frac{\partial f}{\partial y_n}$$

erzeugte Gruppe ist; dieselbe bietet zugleich ein Beispiel einer integrablen Gruppe dar.

160 Satz über die Monodromiegruppe. Anwendung auf den Fall der algebraischen Integrabilität und auf die Frage der Reductibilität. Reductibilität der Monodromiegruppe.

Aus dem in der vorigen Nummer bewiesenen Satze können wir einige wichtige Folgerungen ziehen.

Die Gruppe g der Differentialgleichung (A) hat mit der zu dieser Gleichung gehörigen Transformationsgruppe G, da sie in derselben als Untergruppe enthalten ist, die Eigenschaft gemein, dass jede rationale Differentialfunction der $y_1, y_2, \cdot \cdot y_n$, die gleich einer rationalen Function von x ist, bei den Transformationen der Gruppe g ungeändert bleibt. Dagegen gilt für g im Allgemeinen die erste Aussage des Picard-Vessiot'schen Doppelsatzes nicht, denn von einer rationalen Differentialfunction, die bei den Transformationen von g ungeändert bleibt, kann man nur behaupten, dass sie eine eindeutige Function von x sei

Dann und nur dann, wenn die Differentialgleichung (A) der Fuchs'schen Classe angehört, bleibt der Picard-Vessiot'sche Doppelsatz in vollem Umfange richtig, wenn man darin an die Stelle der Transformationsgruppe G die abzählbare Untergruppe g derselben treten lässt.

Diese Bemerkung rechtfertigt eine von Herrn F. Klein vorgeschlagene Benennung für die beiden Gruppen G und g, zufolge deren die Transformationsgruppe G als die Rationalitätsgruppe, die abzählbare Gruppe g als Monodromie- oder Eindeutigkeitsgruppe bezeichnet werden soll. Wir werden im Folgenden von dieser Bezeichnung in der Regel Gebrauch machen.

Die Endlichkeit der Monodromiegruppe g, die als nothwendig für die algebraische Integrirbarkeit einer linearen Differentialgleichung erkannt worden war, ist im Allgemeinen hierfür nicht hinreichend, wie schon die Thatsache lehrt, dass es lineare Differentialgleichungen giebt, deren allgemeines Integral eine transcendente eindeutige Function ist Soll das allgemeine Integral einer gegebenen linearen Differentialgleichung eine algebraische Function sein, so muss die Differentialgleichung offenbar zur Fuchs'schen Classe gehören; ferner ist nothwendig, dass die zu den singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen lauter rationale Wurzeln besitzen und dass in den Entwickelungen der canonischen Fundamentalsysteme keine Logarithmen auftreten. Allein auch diese nothwendigen Bedingungen sind nicht hinreichend.

Nothwendig und hinreichend dafür, dass eine lineare Differentialgleichung durch algebraische Functionen integrirt werden könne, ist, dass die Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe angehört und dass ihre Monodromiegruppe eine endliche ist

Denn aus der Endlichkeit der Monodromiegruppe folgt zunächst, dass das allgemeine Integral einer gewöhnlichen algebraischen Gleichung mit in x eindeutigen Coefficienten genügen muss, und daraus, dass die Differentialgleichung zur Fuchs'schen Classe gehört, ergiebt sich ferner, dass die die Coefficienten darstellenden eindeutigen Functionen keine Unbestimmtheitsstellen haben können, also rationale Functionen von x sind.

Um weitere Anwendungen der zwischen den beiden Gruppen G und g gefundenen Beziehungen geben zu können, greifen wir auf den Begriff der Irreductibilität einer linearen Differentialgleichung zurück, wie wir ihn im Anschlusse an Herrn Frobenius in den Nummern 27—29 erörtert hatten. Es wurden daselbst vorzüglich lineare Differentialgleichungen betrachtet, deren Coefficienten innerhalb eines gewissen Bereiches E eindeutige Functionen sind, und eine solche Differentialgleichung

$$\text{(I)} \qquad P(y) = y^{(n)} + \varphi_1 y^{(n-1)} + \cdots + \varphi_n y = 0$$

hiess reductibel, wenn sie mit einer linearen Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung

$$\text{(II)} \qquad Q(y) = y^{(m)} + \psi_1 y^{(m-1)} + \cdots + \psi_m y = 0, \quad (m < n),$$

und vom selben Charakter (d. h. deren Coefficienten auch innerhalb E eindeutig sind) Integrale gemein hatte Es gab dann stets mindestens eine irreductible Differentialgleichung (Nr. 27, Bd. I, S. 85)

$$\text{(III)} \qquad R(y) = y^{(\nu)} + \chi_1 y^{(\nu-1)} + \cdots + \chi_\nu y = 0, \quad (\nu < n),$$

vom selben Charakter, deren sämmtliche Lösungen die Differentialgleichung (I) befriedigen

Sei $y_1, y_2, \cdots y_n$ ein Fundamentalsystem von (I), $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_\nu$ ein solches von (III); dann lassen sich also $n\nu$ Constanten $c_{i\varkappa}$ bestimmen, für welche die Gleichungen

$$\text{(IV)} \qquad \eta_i = \sum_{\varkappa=1}^{n} c_{i\varkappa} y_\varkappa \qquad (i = 1, 2, \cdots \nu)$$

erfüllt sind und die ein rechteckiges System vom Range ν bilden (vergl. Nr. 34) Denken wir uns den Bereich E so gewählt, dass innerhalb desselben kein singulärer Punkt der Differentialgleichung (I)

liege, und dass er von endlichem, etwa λ-fachem Zusammenhange sei Zerschneiden wir E durch $(\lambda - 1)$ geeignet gewählte Querschnitte $l_1, l_2, \cdots l_{\lambda-1}$ in einen einfach zusammenhängenden Bereich $\overline{E}$, so erleiden die innerhalb $\overline{E}$ durch ihre Anfangswerthe eindeutig determinirten Integrale $y_1, y_2, \cdots y_n$ allemal, wenn die unabhängige Variable x einen oder mehrere dieser Querschnitte überschreitet, eine lineare Substitution, und die Gesammtheit dieser Substitutionen bildet offenbar eine Gruppe h, die wir als die Gruppe der Differentialgleichung (I) in Bezug auf den Bereich E bezeichnen wollen.

Die Ausdrücke (IV) können, wenn x die Querschnitte von E überschreitet, d. h. wenn auf die $y_1, y_2, \cdots y_n$ die Substitutionen von h ausgeübt werden, offenbar nur in lineare homogene Functionen ihrer selbst übergehen, da sie zufolge der gemachten Voraussetzung ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (III) constituiren. Und umgekehrt, wenn sich $n\nu$ Constanten $c_{\iota\varkappa}$, die ein rechteckiges System vom Range ν bilden, so angeben lassen, dass die mit denselben gebildeten Ausdrücke (IV) sich nur in lineare homogene Functionen ihrer selbst verwandeln, falls man auf die $y_1, y_2, \cdots y_n$ irgend eine Substitution der Gruppe h ausübt, so sind die Coefficienten der linearen Differentialgleichung

$$(-1)^n \frac{D(y, \eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n)}{D(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n)} = 0$$

innerhalb E eindeutige Functionen von x, und die Differentialgleichung (I) ist demnach reductibel Wir erhalten also den Satz:

Damit eine lineare Differentialgleichung (I) mit innerhalb E eindeutigen Coefficienten (in Bezug auf diesen Bereich) reductibel sei, ist nothwendig und hinreichend, dass die Gruppe h derselben in Bezug auf E die folgende Beschaffenheit besitzt: es lassen sich $\nu < n$ linear unabhängige homogene lineare Combinationen der Integrale $y_1, y_2, \cdots y_n$ mit von x unabhängigen Coefficienten angeben, die sich in homogene lineare Functionen ihrer selbst verwandeln, wenn man auf die $y_1, y_2, \cdots y_n$ die Substitutionen der Gruppe h ausübt

Wir drücken diese Beschaffenheit einer Gruppe h kurz so aus, dass wir sagen, h sei reductibel auf eine Gruppe in ν Variabeln

Betrachten wir nun die Differentialgleichung (A) mit rationalen Coefficienten. Wenn wir als Bereich E einen zweifach zusammenhängenden Theil des Bereiches T wählen, der aus der x-Ebene durch Aussonderung der wesentlichen singulären Stellen der Differentialgleichung hervorgeht, so besteht die Gruppe von (A) in Bezug auf

diesen so gewählten Bereich E einfach aus den sämmtlichen Potenzen einer einzigen Substitution. Von dieser Gruppe — so können wir uns jetzt ausdrücken — haben wir im dritten Abschnitte bewiesen, dass sie stets reductibel ist.

Nehmen wir nun als Bereich E die Fläche T selbst, dann ist die sich auf diesen Bereich beziehende Gruppe nichts anderes wie die Monodromiegruppe g der Differentialgleichung (A) Wenn nun diese Gruppe reductibel ist, so ist die Differentialgleichung (A) auch reductibel in dem Sinne, dass sie mit einer linearen Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung, deren Coefficienten innerhalb T eindeutig sind, Integrale gemein hat

Im Sinne der Erörterungen der Nr. 27 wird es aber naturgemäss scheinen, eine Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten nur dann als schlechthin reductibel zu bezeichnen, wenn sie mit einer linearen Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung mit ebenfalls rationalen Coefficienten Lösungen gemein hat. Für diese Art der Reductibilität ist die Reductibilität der Monodromiegruppe g offenbar auch nothwendig, jedoch im Allgemeinen nicht hinreichend. Um eine auch hierfür nothwendige und hinreichende Bedingung zu finden, müssen wir an Stelle der Monodromiegruppe die Transformations- oder Rationalitätsgruppe G in Betracht ziehen.

161 **Reductibilität der Transformationsgruppe. Fuchs'sche Classe.**

Zunächst folgt aus dem allgemeinen Satze der Nr. 27 (Bd. I, S. 85, oben), dass die Differentialgleichung (A), falls sie in dem soeben angegebenen Sinne reductibel ist, durch die sämmtlichen Lösungen einer gewissen Differentialgleichung niedrigerer Ordnung

$$(1) \qquad L(y) = y^{(\nu)} + f_1 y^{(\nu-1)} + \cdots + f_\nu y = 0, \quad (\nu < n),$$

deren Coefficienten $f_1, f_2, \ldots f_\nu$ rationale Functionen von x sind, befriedigt werden muss. Sei $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_\nu$ ein Fundamentalsystem dieser Differentialgleichung, so ist auch wieder

$$(2) \qquad \mathfrak{y}_\iota = \sum_{\varkappa=1}^{n} \gamma_{\iota\varkappa} y_\varkappa \qquad (\iota = 1, 2, \ldots \nu),$$

und die Constanten $\gamma_{i\varkappa}$ bilden ein rechteckiges System vom Range ν.

Da nun

$$(3) \qquad f_\varkappa = (-1)^\nu \frac{D_\varkappa(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots \mathfrak{y}_\nu)}{D(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots \mathfrak{y}_\nu)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots \nu)$$

ist, so sind die Coefficienten von (1) rationale Differentialfunctionen

der $y_1, y_2, \cdots y_n$, die zugleich rationale Functionen von x sind; sie bleiben also zufolge des Picard-Vessiot'schen Doppelsatzes bei den Transformationen von G ungeändert. Möge nun durch irgend eine Transformation von G die Function $\mathfrak{y}_i$ übergehen in $\bar{\mathfrak{y}}_i$, dann verwandelt sich also die linke Seite der identischen Gleichung

$$\mathfrak{y}_i^{(\nu)} + f_1 \mathfrak{y}_i^{(\nu-1)} + \cdots + f_\nu \mathfrak{y}_i = 0$$

durch Ausübung dieser Transformation in

$$\bar{\mathfrak{y}}_i^{(\nu)} + f_1 \bar{\mathfrak{y}}_i^{(\nu-1)} + \cdots + f_\nu \bar{\mathfrak{y}}_i,$$

und dieser Ausdruck muss auch identisch verschwinden, da (vergl. Nr. 152, S. 77) eine Beziehung zwischen den $y_1, y_2, \cdots y_n$ und ihren Ableitungen mit Coefficienten, die dem Rationalitätsbereiche angehören, bei Ausübung einer Transformation der Gruppe G erhalten bleibt. Also ist auch $\bar{\mathfrak{y}}_i$ eine Lösung von (1), d. h die linearen Combinationen (2) der $y_1, y_2, \cdots y_n$ verwandeln sich in lineare homogene Functionen ihrer selbst, wenn auf die $y_1, y_2, \cdots y_n$ irgend eine Transformation von G ausgeübt wird, oder mit anderen Worten, die Gruppe G ist reductibel auf eine Gruppe von ν Variabeln.

Nehmen wir nun umgekehrt an, die Transformationsgruppe G der Differentialgleichung besitze diese Eigenschaft; dann lassen sich also $n\nu$ Constanten $\gamma_{i\varkappa}$ so bestimmen, dass die mit Hülfe derselben gebildeten ν Ausdrücke (2) linear unabhängig und überdies so beschaffen sind, dass sie sich in lineare homogene Functionen ihrer selbst verwandeln, wenn die $y_1, y_2, \cdots y_n$ eine Transformation von G erfahren. Da die Ausdrücke (3) die Eigenschaft haben, bei jeder linearen Transformation der $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_\nu$ ungeändert zu bleiben, so sind diese Determinantenquotienten rationale Differentialfunctionen der $y_1, y_2, \cdots y_n$, die sich bei den Transformationen von G nicht ändern, sie sind also rationale Functionen von x, d h. die Ausdrücke (2) bilden ein Fundamentalsystem der linearen Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung

$$L(y) = (-1)^\nu \frac{D(y, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_\nu)}{D(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_\nu)} = 0$$

mit in x rationalen Coefficienten Wir haben also den Satz:

Eine lineare Differentialgleichung (A) mit in x rationalen Coefficienten ist dann und nur dann reductibel in dem Sinne, dass sie mit einer linearen Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung mit ebenfalls rationalen Coefficienten Lösungen gemein hat, wenn ihre Transformationsgruppe G reductibel ist.

Wenn die vorgelegte Differentialgleichung (A) der Fuchs'schen Classe angehört und man weiss, dass ihre Monodromiegruppe g reductibel ist, so folgt daraus allein schon, dass die Differentialgleichung in dem jetzt betrachteten Sinne reductibel sein muss. In der That, mögen die linearen Combinationen (2) die Eigenschaft haben, linear unabhängig zu sein und in lineare homogene Functionen ihrer selbst überzugehen, wenn die $y_1, y_2, \cdot\cdot\, y_n$ eine Substitution der Gruppe g erfahren; dann sind die Determinantenquotienten (3) nicht nur eindeutig, sondern, weil die y_i keine Unbestimmtheitsstellen besitzen sollten, auch rational in x; d. h.:

Wenn die vorgelegte Differentialgleichung der Fuchsschen Classe angehört, so ist für ihre Reductibilität in dem jetzt festgehaltenen Sinne schon die Reductibilität der Monodromiegruppe nothwendig und hinreichend

Wir bemerken gleich hier, dass die Zweckmässigkeit des auf die Reductibilität der Transformationsgruppe gegründeten Begriffes der Reductibilität einer linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten unter anderem auch daraus erhellt, dass, wie wir an späterer Stelle (im vierten Kapitel des folgenden Abschnittes) zeigen werden, für eine vorgelegte Differentialgleichung stets durch Ausführung algebraischer Operationen entschieden werden kann, ob dieselbe in diesem Sinne reductibel ist, oder nicht. Wenn im Folgenden von Reductibilität einer linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten schlechthin die Rede ist, so wollen wir stets diese Art der Reductibilität darunter verstehen.

Zehnter Abschnitt.

Specielle Probleme der Gruppentheorie. Invarianten.

Erstes Kapitel.

162. **Riemann's Problemstellung. Existenzbeweise.**

Die vorhergehenden Betrachtungen haben uns gezeigt, dass die Monodromiegruppe g nur für die Differentialgleichungen der Fuchs-schen Classe im Stande ist, die Transformationsgruppe G bei den auf die Reductibilität bezüglichen Fragen zu ersetzen. Dagegen führt die Untersuchung der Eigenschaften der Monodromiegruppe einer Differentialgleichung auf Probleme, die weit tiefer in die Natur der Integrale eindringen, als es bei den auf die Betrachtung der Transformationsgruppe gegründeten Aufgaben der Fall ist Es liegt das eben daran, dass die Monodromiegruppe eine Untergruppe der Transformationsgruppe ist, und dass Differentialgleichungen, deren Transformationsgruppen übereinstimmen, verschiedene Monodromiegruppen haben können

Während die Structur der Transformationsgruppe diejenigen Fälle erkennen lässt, in denen sich die Integration einer vorgelegten Differentialgleichung auf die Integration einfacherer Differentialgleichungen zurückführen lässt, liefert die Monodromiegruppe ein vollständiges Bild von der Verzweigungsart eines Fundamentalsystems und leistet dadurch für die lineare Differentialgleichung dasselbe, wie die Riemann'sche Fläche für eine algebraische Gleichung mit rationalen Coefficienten.

Wenn man also im Sinne der von Riemann in die Analysis eingeführten Principien eine Function durch ihre singulären Stellen und die Art, wie sie sich in der Umgebung dieser Stellen verhält, bestimmen will, so wird man für die Integrale einer linearen Differentialgleichung von der Monodromiegruppe derselben ausgehen müssen In der That hat Riemann diesen Ausgangspunkt für seine Theorie der durch die Gauss'sche Differentialgleichung (Nr. 70, Bd. I, S. 252) definirten Function gewählt und hat auch (vergl. Nr 130) den Versuch gemacht, in analoger Weise, wie es ihm für diese Function gelungen

war, die Theorie der allgemeinen linearen Differentialgleichungen genügenden Functionen zu begründen. Leider lässt sich aber die Riemann'sche Methode, die in der Theorie der algebraischen Functionen zu so glänzenden Ergebnissen geführt hat, mit den der Analysis gegenwärtig zu Gebote stehenden Hülfsmitteln für die Theorie der linearen Differentialgleichungen nicht unmittelbar nutzbar machen. Der Grund hierfür liegt in der Schwierigkeit der sogenannten Existenzbeweise

Schon in der Theorie der algebraischen Functionen und deren Integralen bietet es bedeutende Schwierigkeiten dar, zu beweisen, dass zu einer gegebenen Riemann'schen Fläche stets algebraische Functionen gehören, die auf derselben eindeutig sind. Riemann begegnet diesen Schwierigkeiten in seinen Arbeiten, indem er sich bei Führung des fraglichen Nachweises der Existenz eines Princips bedient, welches Dirichlet bei Fragen der Potentialtheorie angewandt hat, das aber, wie Herr Weierstrass bemerkte, nicht ganz einwandfrei ist Erst die Arbeiten der Herren Carl Neumann und H. A. Schwarz (vergl. Nr. 212) haben eine auf anderen Principien beruhende Begründung für die Riemann'schen Existenztheoreme und damit den Riemann'schen Arbeiten eine neue Grundlage gegeben

Aber noch ungleich grösser scheinen die Schwierigkeiten zu sein, die sich bei den analogen Aufgaben der Theorie der linearen Differentialgleichungen darbieten Hier würde es sich darum handeln, wenn eine gewisse abzählbare homogene lineare Gruppe g in n Variabeln etwa dadurch gegeben ist, dass man eine Basis (Nr 132, S. 6) derselben kennt, ein System von n Functionen der unabhängigen Variabeln x zu finden, welches einer linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten genügt, deren Monodromiegruppe die gegebene Gruppe ist.

In der nachgelassenen Notiz „Zwei allgemeine Sätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten" behandelt Riemann sogar eine noch viel speciellere Aufgabe. Er geht von gewissen linearen Substitutionen

$$A, B, \cdot \quad G$$

aus und verlangt Functionen $y_1, y_2, \cdot\cdot y_n$, die in der ganzen Ebene mit Ausnahme gewisser Punkte

$$x = a, b, \cdot \quad g$$

eindeutig und endlich sind, die durch einfache Umläufe von x um diese Punkte die gegebenen linearen Substitutionen erleiden und die überdies nirgends „von unendlich hoher Ordnung unendlich werden", d. h in unserer modernen Terminologie überall bestimmt sind.

Wenn solche Functionen existiren, so genügen sie offenbar der linearen homogenen Differentialgleichung

$$(-1)^n \frac{D(y, y_1, y_2, \cdots y_n)}{D(y_1, y_2, \quad y_n)} = 0,$$

deren Coefficienten rationale Functionen von x sind und die der Fuchs'schen Classe angehört Es handelt sich aber darum, die Existenz solcher Functionen nachzuweisen, und das ist eine Aufgabe, die ohne Zuhülfenahme der Theorie der linearen Differentialgleichungen bis jetzt nur in ganz vereinzelten speciellen Fällen gelöst worden ist. Wir werden an späterer Stelle den fraglichen Existenzbeweis für gewisse besonders charakterisirte Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Benutzung des Schwarz-Neumann'schen Verfahrens liefern und noch weiterhin zu zeigen versuchen, in wie weit die Theorie der von Herrn Poincaré eingeführten „Fonctions-Z-Fuchsiennes" im Stande ist, zu einer Lösung jener Aufgaben im allgemeinen Falle zu führen Jedenfalls können wir an dieser Stelle nicht den Standpunkt Riemann's einnehmen. Dagegen werden wir der erwähnten nachgelassenen Aufzeichnung Riemann's einen Begriff entlehnen, der für unsere Theorie von der grössten Bedeutung ist, und den wir zunächst in einer etwas allgemeineren Fassung, als er bei Riemann auftritt, entwickeln wollen.

163. Differentialgleichungen mit denselben Verzweigungspunkten und denselben Fundamentalsubstitutionen. Cogrediente Functionssysteme und Differentialgleichungen. Beziehungen zwischen solchen.

Für die Fragen der Theorie der Abel'schen Functionen kommen, wie Riemann erkannt hat, hauptsächlich diejenigen Eigenschaften einer algebraischen Function in Betracht, die erhalten bleiben, wenn man auf die jene algebraische Function definirende irreductible Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

eine eindeutig umkehrbare rationale Transformation

$$x = \varphi(\xi, \eta),$$
$$y = \psi(\xi, \eta)$$

anwendet, d h. eine Transformation, aus welcher sich auch umgekehrt

$$\xi = f(x, y),$$
$$\eta = g(x, y)$$

ergiebt, wo f, g ebenso wie φ, ψ rationale Functionen ihrer Argumente bedeuten. Um diese Eigenschaften von einer gegebenen algebraischen Gleichung abstrahiren zu können, ist es daher erforderlich, die Gesammtheit derjenigen (irreductiblen) Gleichungen zu betrachten, die

durch solche eindeutig umkehrbare rationale Transformationen in einander übergeführt werden können, und Riemann fasst darum diese Gesammtheit in den Begriff einer Classe von Gleichungen zusammen. Hält man insbesondere die unabhängige Variable fest, so liefern die Gleichungen einer Classe ein System gleichverzweigter algebraischer Functionen, d. h. ein System von Functionen, die auf derselben Riemann'schen Fläche eindeutig sind.

Das Analoge für die linearen Differentialgleichungen würde darin bestehen, dass man die Gesammtheit derjenigen linearen Differentialgleichungen in's Auge fasste, die dieselbe Monodromiegruppe haben, wobei von vorneherein sowohl die abhängige wie die unabhängige Variable in den verschiedenen Differentialgleichungen verschieden zu denken wären. Nun kann man aber leicht einsehen (vergl. hierfür eine Arbeit des Herrn Staeckel, Crelle's Journal Bd 111, S. 290ff.), dass eine lineare homogene Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad P(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n y = 0$$

im Allgemeinen nur dann durch Einführung einer neuen unabhängigen Variabeln

$$\xi = f(x, y)$$

in eine ebenfalls lineare homogene Differentialgleichung übergeht, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

d. h. also, wenn ξ eine blosse Function von x ist. Die Transformation der unabhängigen Variabeln ist demnach von der der abhängigen ganz unabhängig, so dass wir die Frage auf die nach linearen Differentialgleichungen mit derselben unabhängigen Variabeln und derselben Monodromiegruppe einschränken können. Riemann fasst die Aufgabe im Anschlusse an seinen in der vorigen Nummer skizzirten Ausgangspunkt noch enger, indem er (in unserer Ausdrucksweise) nach denjenigen Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe frägt, welche dieselben wesentlichen singulären Punkte besitzen und für die sich Fundamentalsysteme angeben lassen, die bei Umläufen um irgend einen der singulären Punkte dieselben Fundamentalsubstitutionen erleiden.

Wenn wir nur die Integrale einer linearen Differentialgleichung an sich untersuchen, so kommen die ausserwesentlich singulären Stellen nicht weiter in Betracht, da sich in der Umgebung derselben die Integrale regulär verhalten; fragen wir nur nach der Monodromiegruppe, so können wir auch diejenigen wesentlichen singulären Punkte bei Seite lassen, in deren Umgebung die Integrale sich eindeutig verhalten,

und uns auf die Betrachtung der wirklichen Verzweigungspunkte beschränken. Wir wollen daher vorerst Differentialgleichungen untersuchen, deren Integrale dieselben Verzweigungspunkte und bei geeigneter Wahl der Fundamentalsysteme auch dieselben Fundamentalsubstitutionen besitzen

Gehen wir von einer Differentialgleichung

$$(1) \qquad A(y) = y^{(n)} + A_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + A_0 y = 0$$

aus, deren Coefficienten innerhalb eines Bereiches E, den wir der Einfachheit wegen als einfach zusammenhängend wählen, eindeutig und nur an den Stellen

$$a_1, \; a_2, \cdot \; \cdot a_s, \; a_{s+1}, \cdot \; \cdot$$

nicht regulär sein mögen. Seien die singulären Punkte

$$a_1, \; a_2, \cdots a_s$$

wirkliche Verzweigungspunkte der Integrale, während die übrigen

$$a_{s+1}, \; a_{s+2}, \cdots$$

diejenigen Stellen sein mögen, die entweder ausserwesentlich singulär oder doch so beschaffen sind, dass sich das allgemeine Integral von (1) in der Umgebung derselben eindeutig verhält Sondern wir aus E die Stellen $a_1, a_2, \cdot \; a_s$ aus und zerschneiden die so entstehende $(s+1)$-fach zusammenhängende Fläche E durch die Querschnitte

$$l_1, \; l_2, \cdot \cdot \; l_s$$

in eine einfach zusammenhängende $\overline{E}$, so erleidet ein Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdot \cdot \; y_n$ von (1), wenn x den Querschnitt $l_\varkappa$ überschreitet, eine lineare Substitution $L_\varkappa$, und wenn wir voraussetzen, dass die Integrale von (1) innerhalb $\overline{E}$ eindeutig sind, so besteht zwischen den s Fundamentalsubstitutionen $L_1, L_2, \; \cdot \; L_s$ die Beziehung

$$(2) \qquad L_1 L_2 \cdots L_s = 1.$$

Diese Substitutionen bilden dann eine Basis der zum Bereiche E gehörigen Monodromiegruppe h der Differentialgleichung (1)

Wir betrachten nun ein Functionssystem $z_1, z_2, \cdots z_n$, welches innerhalb $\overline{E}$ eindeutig und so beschaffen ist, dass es beim Ueberschreiten der Querschnitte $l_1, l_2, \cdots l_s$ dieselben Substitutionen erfährt, wie das Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots y_n$.

Im Anschlusse an eine in der Invariantentheorie der algebraischen Formen übliche Bezeichnung sagen wir von dem Functionssysteme $[z_\varkappa]$, es sei mit $[y_\varkappa]$ cogredient innerhalb E. Das System der

Ableitungen beliebig hoher Ordnung der $[y_x]$ bietet ein Beispiel für ein solches mit $[y_x]$ innerhalb E cogredientes Functionssystem dar.

Setzen wir

(3) $$z_x = B_0 y_x + B_1 y_x' + \cdots + B_{n-1} y_x^{(n-1)} \qquad (x = 1, 2, \ldots n),$$

so lassen sich aus diesen Gleichungen die $B_0, B_1, \cdots B_{n-1}$ berechnen, da die Determinante $D(y_1, y_2, \cdots y_n)$ nicht identisch verschwindet, und wir finden

(4) $$B_x = \frac{\Delta_x}{D(y_1, y_2, \ldots y_n)} \qquad (x = 0, 1, \ldots n-1),$$

wenn wir mit Δ_x die Determinante bezeichnen, welche aus

$$D(y_1, y_2, \cdots y_n)$$

dadurch hervorgeht, dass man die Elemente der $(x+1)^{\text{ten}}$ Verticalreihe durch $z_1, z_2, \cdots z_n$ ersetzt.

Da die $z_1, z_2, \ldots z_n$ bei jedem geschlossenen Wege, den x innerhalb E vollzieht, dieselbe Substitution erfahren wie die $y_1, y_2, \cdots y_n$ und deren Ableitungen, so multipliciren sich Zähler und Nenner der Ausdrücke (4) bei jedem solchen Umlaufe mit der Determinante der correspondirenden Substitution von h, die Ausdrücke bleiben folglich ungeändert, d. h.:

Die Coefficienten $B_0, B_1, \cdots B_{n-1}$ sind innerhalb E eindeutige Functionen von x.

Wenn umgekehrt ein Functionssystem $z_1, z_2, \cdots z_n$ mit den $y_1, y_2, \cdots y_n$ durch Gleichungen von der Form (3) verknüpft ist, worin die $B_0, B_1, \cdots B_{n-1}$ innerhalb E eindeutige Functionen sind, so erfährt offenbar das Functionssystem $z_1, z_2, \cdots z_n$ bei jedem geschlossenen Wege, den x innerhalb E zurücklegt, dieselbe Substitution wie das Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots y_n$, d. h. die beiden Functionssysteme sind dann innerhalb E cogredient. Also ist das Bestehen von Gleichungen von der Form (3) nothwendig und hinreichend für die Cogredienz der Systeme $[z_x]$ und $[y_x]$.

Da die Ableitungen jeder Ordnung der $z_1, z_2, \cdots z_n$ offenbar auch mit $y_1, y_2, \cdots y_n$ cogrediente Systeme bilden, so genügen die $z_1, z_2, \ldots z_n$ einer homogenen linearen Differentialgleichung mit innerhalb E eindeutigen Coefficienten:

(5) $$C(z) = C_n z^{(n)} + C_{n-1} z^{(n-1)} + \cdots + C_0 z = 0.$$

Dieselbe besitzt im Allgemeinen innerhalb E andere singuläre Stellen wie die Differentialgleichung (1), nur die Verzweigungspunkte der Integrale sind für beide Differentialgleichungen identisch.

Im Allgemeinen, d. h. wenn die $B_0, B_1, \cdots B_{n-1}$ willkürliche Functionen von der erforderlichen Beschaffenheit sind, ist die Differentialgleichung (5) nicht von niedrigerer Ordnung als (1), und die Functionen $z_1, z_2, \cdots z_n$ bilden ein Fundamentalsystem von (5).

In der That ergiebt sich diese Differentialgleichung, indem man den Ausdruck

$$(6) \qquad z = B_0 y + B_1 y' + \cdots + B_{n-1} y^{(n-1)} = B(y)$$

n-mal nach x differentiirt, die Ableitungen höherer als $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von y mit Hülfe der Differentialgleichung (1) wegschafft und zwischen den so entstehenden $(n+1)$ linearen Gleichungen die n Grössen

$$y, y', \cdots y^{(n-1)}$$

eliminirt. Wir wollen von einer so gebildeten Differentialgleichung auch sagen, sie sei mit (1) innerhalb E cogredient.

Würde nun die Differentialgleichung von niedrigerer als der n^{ten} Ordnung sein, so müsste zwischen den durch die Gleichungen (3) definirten Grössen $z_1, z_2, \cdots z_n$ eine homogene lineare Relation

$$\gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 + \cdots + \gamma_n z_n = 0$$

mit constanten Coefficienten bestehen. Diese Relation besagt aber, dass das Integral

$$\eta = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \cdots + \gamma_n y_n$$

von (1) der Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$B(y) = 0$$

Genüge leisten würde. Dies ist aber, wenn die $B_0, B_1, \cdots B_{n-1}$ willkürlich gewählte Functionen von der erforderlichen Beschaffenheit sind, unter keinen Umständen möglich, da ja eine Differentialgleichung (1) kein nicht identisch verschwindendes Integral mit einer „willkürlichen" Differentialgleichung gemein haben kann.

Denken wir uns die aus der Gleichung (6) durch Differentiation und Entfernung der Ableitungen höherer als $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von y hervorgehenden Gleichungen in der Form

$$(7) \qquad z^{(\varkappa)} = B_{\varkappa 0} y + B_{\varkappa 1} y' + \cdots + B_{\varkappa, n-1} y^{(n-1)} \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n-1)$$

geschrieben; dann ist nach dem Multiplicationstheoreme der Determinanten

$$(\alpha) \qquad D(z_1, z_2, \cdots z_n) = |B_{\varkappa i}| \, D(y_1, y_2, \cdots y_n) \qquad (i, \varkappa = 0, 1, \cdots n-1).$$

Also ist, wenn die $z_1, z_2, \cdots z_n$ von einander linear unabhängig, d. h. wenn (5) von der n^{ten} Ordnung ist, die Determinante

$$|B_{i\varkappa}| \qquad (i, \varkappa = 0, 1, \quad n-1)$$

nicht identisch Null, und man kann demnach aus dem Gleichungssysteme (7) y und seine sämmtlichen $(n-1)$ ersten Ableitungen als homogene lineare Ausdrücke der

$$z, z', \cdot\cdot \quad z^{(n-1)}$$

mit innerhalb E eindeutigen Coefficienten berechnen. Folglich ist auch das allgemeine Integral jeder innerhalb E mit (1) cogredienten Differentialgleichung in derselben Weise durch z und seine Ableitungen darstellbar, wie durch y und dessen Ableitungen; wir haben also den Satz:

Für willkürliche $B_0, B_1, \cdot\cdot B_{n-1}$, die innerhalb E eindeutige Functionen von x sind, ist die Differentialgleichung, der z genügt, von nicht niedrigerer als der n^{ten} Ordnung, und die Beziehung zwischen einer solchen Differentialgleichung und der Differentialgleichung (1) ist eine gegenseitige, d. h. jede mit (1) cogrediente Differentialgleichung n^{ter} Ordnung ist mit (1) völlig gleichberechtigt

164. Sätze über reductible Differentialgleichungen.

Wir fragen nun, wann kann es sich ereignen, dass die Differentialgleichung (5), der z genügt, von niedrigerer als der n^{ten} Ordnung wird?

Hierzu ist, wie gezeigt wurde, erforderlich, dass eine Lösung der Differentialgleichung (1) die Differentialgleichung

$$B(y) = 0$$

befriedigt; in diesem Falle ist also (1) innerhalb E reductibel

Wenn umgekehrt die Differentialgleichung (1) in diesem Sinne reductibel ist, so muss sich nach den Sätzen der Nr. 27 (Bd I, S. 84 ff.) ihre linke Seite in die Form setzen lassen

$$A(y) = HK(y),$$

wo K einen Differentialausdruck μ^{ter} Ordnung $(\mu < m)$, H einen solchen $(n-\mu)^{\text{ter}}$ Ordnung bedeutet, und wo die Coefficienten dieser beiden Differentialausdrücke innerhalb des Bereiches E eindeutige Functionen sind. Setzen wir nun

$$u = K(y),$$

so ist die Differentialgleichung, der u genügt, mit (1) innerhalb E cogredient; dieselbe ist aber offenbar nichts anderes wie

$$H(u) = 0$$

und somit von niedrigerer als der n^{ten} Ordnung.

Bedeutet ferner w das allgemeine Integral einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, die mit (1) in Bezug auf E cogredient ist, so ist, wie wir bewiesen haben, u in der Form

$$u = K(y) = L_0 w + L_1 w' + \cdots + L_{n-1} w^{(n-1)} = L(w)$$

darstellbar, wo die $L_0, L_1, \cdots L_{n-1}$ innerhalb E eindeutig sind. Da $K(y)$ für gewisse Integrale von (1) verschwindet, so hat die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung für w mit der Differentialgleichung niedrigerer Ordnung

$$L(w) = 0$$

Integrale gemein, ist also jedenfalls reductibel. Wir können demnach sagen:

Unter den Differentialgleichungen, die mit (1) in Bezug auf E cogredient sind, giebt es dann und nur dann solche von niedrigerer als der n^{ten} Ordnung, wenn die Differentialgleichung (1) reductibel ist. Ferner sind alle innerhalb E cogredienten Differentialgleichungen gleichzeitig irreductibel oder reductibel.

Wir hatten erkannt, dass die Gleichung (1) nothwendig reductibel sein muss, wenn die Differentialgleichung (5) für z von niedrigerer als der n^{ten} Ordnung ist, denn es musste in diesem Falle für ein Integral η von (1) der Ausdruck

$$B(\eta) = 0$$

sein. Etwas allgemeiner kann man fragen, was sich für die Differentialgleichung (1) erschliessen lässt, wenn für ein Integral η derselben zwar $B(\eta)$ nicht verschwindet, aber einem anderen nicht verschwindenden Integrale η_1 von (1) gleich wird.

Da zufolge der Voraussetzung $B(y)$ für kein Integral von (1) verschwindet, ist die Differentialgleichung (5) nothwendig von der n^{ten} Ordnung. Sie hat mit (1) das nicht identisch verschwindende Integral

$$\eta_1 = B(\eta)$$

gemein. Es giebt folglich, wenn die Differentialgleichungen (1) und (5) nicht identisch sind, nach den Sätzen der Nr. 16 (Bd. I, S. 45) eine Differentialgleichung von niedrigerer als der n^{ten} Ordnung, deren Coefficienten sich aus den Coefficienten von (1) und (5) durch Differentiationen und rationale Operationen zusammensetzen und die durch alle gemeinsamen Lösungen von (1) und (5) befriedigt wird. Also wäre in diesem Falle die Differentialgleichung (1) reductibel.

Wenn aber (1) mit (5) identisch ist, so bilden die n Ausdrücke

(8) $$B(y_\varkappa) = \eta_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

ein Fundamentalsystem von (1); es ist demnach

$$\eta_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_{\varkappa\lambda} y_\lambda \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

wo die $\alpha_{\nu\lambda}$ Constanten bedeuten, für welche

$$|\alpha_{\varkappa\lambda}| \neq 0 \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots n)$$

ist Bestimmt man nun ω als Wurzel der charakteristischen Gleichung

$$|\alpha_{\varkappa\lambda} - \delta_{\varkappa\lambda}\omega| = 0 \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots n),$$

wo wie gewöhnlich

$$\delta_{\varkappa\lambda} = 0 \quad \text{für} \quad \varkappa \neq \lambda, \quad \delta_{\lambda\lambda} = 1$$

zu nehmen ist, so lassen sich aus den n homogenen Gleichungen

$$c_1\alpha_{1\varkappa} + c_2\alpha_{2\varkappa} + \cdots + c_n\alpha_{n\varkappa} = \omega c_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

die n Constanten $c_1, c_2, \cdots c_n$ bestimmen, und man hat

$$c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \cdots + c_n\eta_n = \omega(c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n).$$

Multiplicirt man also die Gleichungen (8) der Reihe nach mit den $c_\varkappa$ und addirt für $\varkappa = 1, 2, \cdots n$, so kommt

$$\omega\sum_{\varkappa=1}^{n} c_\varkappa y_\varkappa = B\left(\sum_{\varkappa=1}^{n} c_\varkappa y_\varkappa\right),$$

d h. das Integral

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} c_\varkappa y_\varkappa$$

von (1) genügt der homogenen linearen Differentialgleichung niedrigerer als n^{ter} Ordnung

$$B(z) = \omega z,$$

also ist auch in diesem Falle (1) reductibel, und wir haben den Satz:

Wenn zwei Lösungen η, η_1 der Differentialgleichung (1) durch eine Gleichung von der Form

$$\eta_1 = B(\eta)$$

mit einander verknüpft sind, so ist die Gleichung (1) (innerhalb E) reductibel.

Um das so gewonnene Ergebniss noch in etwas anderer Form aussprechen zu können, bemerken wir mit Herrn Heffter das Folgende:

Wenn die Differentialgleichung (1) durch die Transformation (6)

in die cogrediente Differentialgleichung (5) übergeführt wird, so befriedigen also die sämmtlichen Lösungen von (1) die Differentialgleichung

$$CB(y) = 0,$$

und es ist folglich (Nr 17, Bd. I, S. 45) die linke Seite dieser Differentialgleichung in der Form

$$CB = DA \tag{9}$$

darstellbar, wo D einen Differentialausdruck mit innerhalb E eindeutigen Coefficienten bedeutet.

Wenn umgekehrt die beiden Differentialausdrücke C und A in der Beziehung stehen, dass sich zwei ebenso beschaffene Differentialausdrücke B, D bestimmen lassen, für welche die Gleichung (9) erfüllt ist, wenn ferner C nicht von höherer Ordnung ist wie A, und B für höchstens soviel linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung $A = 0$ verschwindet, als die Differenz der Ordnungen von A und C beträgt, so lässt sich aus den n Ausdrücken

$$B(y_\varkappa) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

offenbar ein Fundamentalsystem von C zusammensetzen, d. h. es sind dann auch die Differentialgleichungen (1) und (5) cogredient.

Ist insbesondere A so beschaffen, dass sich zwei Differentialausdrücke B, D so angeben lassen, dass die Gleichung

$$AB = DA$$

erfüllt ist und dass B nicht für alle Lösungen der Differentialgleichung $A = 0$ verschwindet, so ist diese letztere Differentialgleichung reductibel.

165. Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten. Der Artbegriff. Sätze von Fuchs. Die Transformationsgruppen von Differentialgleichungen derselben Art.

Die vorhergehenden Betrachtungen gestatten in gewissem Sinne eine Uebertragung auf den Fall, wo man, statt für die Coefficienten der Differentialausdrücke $A(y)$, $B(y)$, $C(z)$ die Eindeutigkeit innerhalb E vorauszusetzen, irgend eine andere Eigenschaft der Coefficienten zu Grunde legt, die durch Differentiation und Ausübung rationaler Operationen nicht gestört wird (vergl. Nr 27, Bd. I, S. 83).

Es bleiben dann nämlich die Sätze über die Reductibilität von (1), wie man aus der Herleitung ersieht, ohne Weiteres bestehen, wenn man die Cogredienz der Differentialgleichungen (1) und (5) durch das Bestehen einer Gleichung (6) zwischen den abhängigen Variabeln definirt. Will man dagegen den Begriff der Cogredienz auf die Ueber-

einstimmung der Verzweigungspunkte und der zu denselben gehörigen Fundamentalsubstitutionen gründen, so gelten jene Reductibilitätssätze im Allgemeinen nur, wenn die über die Coefficienten der Differentialausdrücke gemachten Voraussetzungen in Monodromieeigenschaften derselben bestehen. Diese beiden Gesichtspunkte sind also allemal wohl auseinander zu halten; wir wollen dies in dem besonders wichtigen Falle, wo die Coefficienten als rationale Functionen von x vorausgesetzt werden, des Näheren erörtern.

Sei also die Differentialgleichung (A) (S. 111) mit in x rationalen Coefficienten vorgelegt, dann ist die ganze x-Ebene als Bereich E anzusehen. Die singulären Stellen der Differentialgleichung sondern wir in vier Kategorien:

1 die wirklichen Verzweigungspunkte der Integrale,

$$a_1,\ a_2,\ \cdots\ a_r;$$

2 diejenigen wesentlichen singulären Stellen, in deren Umgebung die Integrale zwar eindeutig aber unbestimmt sind;

3. diejenigen wesentlichen singulären Stellen, in denen die Integrale wie rationale Functionen (d. h. von ganzzahliger Ordnung) unendlich werden;

4. die ausserwesentlichen singulären Stellen

Wenn eine homogene lineare Differentialgleichung (B) mit (A) die wirklichen Verzweigungspunkte ihrer Integrale und überdies auch bei geeigneter Wahl der Fundamentalsysteme die zugehörigen Fundamentalsubstitutionen gemein hat, so wird sie als mit (A) schlechthin cogredient zu bezeichnen sein. Ihre abhängige Variable z ist mit y durch eine Gleichung von der Form

$$\text{(C)} \qquad z = r_0 y + r_1 y' + \cdots + r_{n-1} y^{(n-1)} = R(y)$$

verknüpft, wo die $r_0, r_1, \cdots r_{n-1}$ eindeutige Functionen von x bedeuten, auch brauchen die Coefficienten von (B) nur eindeutige, nicht rationale Functionen von x zu sein.

Wenn die mit (A) cogrediente Differentialgleichung

$$\text{(B)} \qquad Q(y) = q_0 y^{(n)} + q_1 y^{(n-1)} + \cdots + q_n y = 0$$

rationale Coefficienten hat ($q_0 =$ const.), und beide Gleichungen (A) und (B) der Fuchs'schen Classe angehören, so berechnen sich aus den Gleichungen

$$z_\varkappa = r_0 y_\varkappa + r_1 y_\varkappa' + \cdots + r_{n-1} y_\varkappa^{(n-1)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

die aus (C) hervorgehen, indem man für y die Elemente $y_1, y_2, \cdots y_n$ eines Fundamentalsystems der Differentialgleichung (A) einsetzt, die

$$r_0, r_1, \cdot \cdot r_{n-1}$$

durch die Formeln

$$r_\varkappa = \frac{\Delta_\varkappa}{D(y_1, y_2, \quad y_n)} \qquad (\varkappa = 0, 1, \quad n-1)$$

als eindeutige Functionen, und da dieselben als rationale Differentialfunctionen der $y_1, y_2, \cdot \quad y_n, z_1, z_2, \quad \cdot z_n$ auch keine Unbestimmtheitsstellen haben können, als rationale Functionen von x.

Wir sagen, nach Herrn Poincaré, von der Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten (B), sie gehöre mit (A) zur selben Art, wenn die abhängige Variable z von (B) mit y durch eine Gleichung von der Form (C), in der die $r_0, r_1, \cdot \cdot r_{n-1}$ rationale Functionen bedeuten, verknüpft ist Für Differentialgleichungen derselben Art stimmen demnach nicht nur die singulären Stellen der Kategorie 1., sondern auch die der Kategorie 2 überein. Wir können gleich den Satz aussprechen:

Cogrediente Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe gehören zur selben Art.

Die Reductibilitätssätze der vorigen Nummer bleiben richtig, wenn man die Reductibilität einer linearen Differentialgleichung im Sinne der Nr 160 (S. 105) fasst und an die Stelle der Cogredienz die Zugehörigkeit zur selben Art setzt; d. h. wir haben die Sätze:

Eine mit (A) zur selben Art gehörige Differentialgleichung kann nur dann von niedrigerer als der n^{ten} Ordnung sein, wenn (A) reductibel ist.

Die sämmtlichen mit (A) zur selben Art gehörigen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung sind mit (A) völlig gleichberechtigt und sind gleichzeitig mit (A) irreductibel oder nicht.

Wenn zwei Integrale η, η_1 von (A) durch eine Gleichung der Form

$$\eta_1 = r_0\eta + r_1\eta' + \cdots + r_{n-1}\eta^{(n-1)}$$

mit rationalen $r_0, r_1, \cdots r_{n-1}$ verknüpft sind, so ist (A) reductibel.

Der erste und zweite dieser Sätze rührt von Herrn Fuchs, der dritte von Herrn Frobenius her.

Ferner ergeben sich leicht die folgenden Sätze:

Wenn sich genau $\mu \leq n$ linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung (A) an der singulären Stelle $x = a$ bestimmt verhalten, so verhalten sich ebensoviele linear unabhängige Integrale einer jeden mit (A) zur selben Art gehörigen Differentialgleichung (B) an eben dieser Stelle

bestimmt, sofern der Differentialausdruck $R(y)$, der die abhängige Variable z von (B) durch y darstellt, für keines der sich bei $x = a$ bestimmt verhaltenden Integrale von (A) verschwindet.

Wenn die Stelle $x = a$ für die Differentialgleichung (A) eine Stelle der Bestimmtheit ist, so ist sie auch eine Stelle der Bestimmtheit für jede mit (A) zur selben Art gehörige Differentialgleichung.

Wenn (A) zur Fuchs'schen Classe gehört, so gehört auch ede Differentialgleichung derselben Art zur Fuchs'schen Classe.

Wir nennen Lösungen y, z der zur selben Art gehörigen Differentialgleichungen (A), (B), die durch die Gleichung (C) mit einander erknüpft sind, entsprechende Integrale. Wenn (A), (B) beide von er n^{ten} Ordnung sind, also insbesondere wenn (A) irreductibel ist, können ir auch von entsprechenden Fundamentalsystemen reden.

Im Folgenden setzen wir der Einfachheit wegen voraus, dass die etrachteten zur selben Art gehörigen Differentialgleichungen auch von erselben Ordnung sind.

Entsprechende Fundamentalsysteme von Differentialgleichungen derelben Art erleiden stets, insbesondere also auch bei jedem Umlaufe er unabhängigen Variabeln x, dieselbe Substitution. Also haben für ntsprechende Fundamentalsysteme Differentialgleichungen derselben Art ieselbe Monodromiegruppe

Sie haben aber auch dieselbe Transformationsgruppe.

Um dies zu beweisen, betrachten wir die zur selben Art gehörigen, urch die Beziehung (C) zwischen den abhängigen Variabeln verüpften Differentialgleichungen (A) und (B) mit den entsprechenden undamentalsystemen $[y_\varkappa]$, $[z_\varkappa]$.

Bilden wir die empfindlichen Functionen (Nr 147, S. 60)

$$u(y) = \sum_{\varkappa=1}^{n} A_{0\varkappa} y_\varkappa + \sum_{\varkappa=1}^{n} A_{1\varkappa} y_\varkappa' + \cdots + \sum_{\varkappa=1}^{n} A_{n-1,\varkappa} y_\varkappa^{(n-1)},$$

$$v(y) = \sum_{\varkappa=1}^{n} B_{0\varkappa} z_\varkappa + \sum_{\varkappa=1}^{n} B_{1\varkappa} z_\varkappa' + \cdots + \sum_{\varkappa=1}^{n} B_{n-1,\varkappa} z_\varkappa^{(n-1)},$$

o die $A_{\iota\varkappa}$, $B_{\iota\varkappa}$ willkürliche Functionen bedeuten, und die beiden in ezug auf die höchste Ableitung im algebraischen Sinne irreductiblen gebraischen Differentialgleichungen niedrigster Ordnung mit in x und n $A_{\iota\varkappa}$ nebst deren Ableitungen, beziehungsweise x und den $B_{\iota\varkappa}$ nebst ren Ableitungen rationalen Coefficienten (vergl. Nr. 149, S. 65)

$$(10) \qquad \Theta(u, u', \cdot \cdot u^{(\nu)}; A_{\iota\varkappa}, x) = 0,$$

$$(11) \qquad \mathrm{H}(v, v', \cdot \cdot v^{(\mu)}; B_{\iota\varkappa}, x) = 0,$$

denen $u(y)$ beziehungsweise $v(z)$ Genüge leistet. Dann können wir bekanntlich (Nr. 150, S. 69) die Transformationsgruppen der Differentialgleichung (A) beziehungsweise (B) wie folgt definiren:

Bezeichnen wir durch

$$u(Sy), \quad v(Tz)$$

dasjenige, was aus $u(y)$ beziehungsweise $v(z)$ wird, wenn wir auf die $[y_\varkappa]$ die Substitution S, beziehungsweise auf die $[z_\varkappa]$ die Substitution T anwenden, so bilden diejenigen Substitutionen S, für welche $u(Sy)$ die Differentialgleichung (10) befriedigt, die Transformationsgruppe G von (A) und diejenigen Substitutionen T, für welche $v(Ty)$ der Differentialgleichung (11) genügt, die Transformationsgruppe H von (B).

Setzen wir nunmehr in $v(z)$ für die $[z_\varkappa]$ und deren Ableitungen die sich aus den Ausdrücken

$$z_\varkappa = R(y_\varkappa)$$

ergebenden Werthe ein, so erhält $v(z)$ die Gestalt

$$(12) \qquad v(z) = \sum_{\varkappa=1}^{n} \sum_{\iota=0}^{n-1} \overline{A}_{\iota\varkappa} y_\varkappa^{(\iota)} = \bar{u}(y)$$

und genügt folglich der Differentialgleichung

$$(13) \qquad \Theta(\bar{u}, \bar{u}', \cdot \cdot \bar{u}^{(\nu)}; \overline{A}_{\iota\varkappa}, x) = 0.$$

Diese Differentialgleichung hat mit der Differentialgleichung (11) ein Integral gemein, sie muss folglich durch alle Integrale der Differentialgleichung (11), die wir ja (vergl. Nr 150, S. 67) als im Koenigsberger'schen Sinne irreductibel voraussetzen können, befriedigt werden Also genügen auch die Functionen $v(Tz)$, wo T eine der Gruppe H angehörige Substitution bedeutet, der Differentialgleichung (13). Nun ist aber offenbar

$$v(Tz) = \bar{u}(Ty);$$

andererseits können wir $\bar{u}(y)$ ebenso wie $u(y)$ als die zu (A) gehörige empfindliche Function ansehen, und es sind demnach die Lösungen von (13) in der Form

$$\bar{u}(Sy)$$

enthalten, wo S die Transformationen der Gruppe G durchläuft. Also muss jede Transformation T von H in G vorkommen, und da die Beziehung zwischen den Differentialgleichungen (A) und (B) eine gegenseitige ist, so folgt hieraus, wie behauptet wurde, die Identität der beiden Gruppen G und H.

166. Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe. Allgemeine Bemerkungen.

Sei $F(y)$ eine rationale Differentialfunction der $[y_\varkappa]$, die dem Rationalitätsbereiche angehört, d. h gleich einer rationalen Function

$$F(y) = f(x)$$

von x ist, und möge ebenso $\Phi(z)$ eine rationale Differentialfunction der $[z_\varkappa]$ bedeuten, die einen in x rationalen Werth

$$\Phi(z) = g(x)$$

besitzt. Dann verwandelt sich $\Phi(z)$, wenn man für die $[z_\varkappa]$ und ihre Ableitungen ihre Ausdrücke durch die $[y_\varkappa]$ und deren Ableitungen einsetzt, in eine rationale Differentialfunction

$$\Phi(z) = \overline{F}(y)$$

der $[y_\varkappa]$, die gleich einer rationalen Function von x ist. Daraus kann man aber im Allgemeinen nicht schliessen, dass die beiden Differentialfunctionen $F(y)$ und $\overline{F}(y)$, wenn man in denselben die $y_1, y_2, \cdots y_n$ als unbestimmte Functionen auffasst, zur selben Gattung gehören, und ebensowenig, dass auch die rationale Differentialfunction der $[z_\varkappa]$

$$\overline{F}(z)$$

gleich einer rationalen Function von x wird.

Ein solcher Schluss ist nur in dem Falle zulässig, wo die formelle Invarianz mit der Invarianz als Function von x zusammenfällt, d. h. nur dann, wenn die Transformationsgruppe der beiden Differentialgleichungen (A), (B) die allgemeine lineare homogene Gruppe L ist. In diesem Falle verwandelt sich in der That jede invariante Differentialfunction der $[y_\varkappa]$ in eine derselben Gattung angehörige Function, wenn man an die Stelle der $[y_\varkappa]$ und ihrer Ableitungen die $[z_\varkappa]$ und ihre Ableitungen setzt. Denn jede solche Invariante ist ja, wie wir gezeigt haben (Nr 136, S. 20), eine rationale Function der Determinantenquotienten

$$\frac{D_\varkappa(y_1, y_2, \quad y_n)}{D(y_1, y_2, \quad y_n)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \quad n),$$

und für diese ist offenbar

$$\frac{D_\varkappa(z_1, z_2, \quad z_n)}{D(z_1, z_2, \quad z_n)} = \mathfrak{R}_\varkappa(x)\,\frac{D_\varkappa(y_1, y_2, \cdot\, y_n)}{D(y_1, y_2, \quad y_n)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \quad n),$$

wo die $\mathfrak{R}_\varkappa(x)$ rationale Functionen von x bedeuten.

Wir hatten oben (S. 120) bemerkt, dass cogrediente Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe nothwendig zur selben Art gehören; auf Grund des am Schlusse der vorigen Nummer bewiesenen Satzes folgt hieraus, dass für cogrediente Differentialgleichungen der Fuchs'schen

Classe auch die Transformationsgruppen übereinstimmen. Dies ist aber nur ein besonderer Fall des folgenden Satzes:

Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe, die dieselbe Monodromiegruppe haben, besitzen auch dieselbe Transformationsgruppe.

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge des in der Nr. 159 (S. 101) gefundenen Ergebnisses, wonach die Transformationsgruppe einer Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe die engste algebraische lineare homogene Gruppe ist, welche die Monodromiegruppe dieser Gleichung als Untergruppe enthält.

Wir erkennen hieraus, dass nicht nur, wie bereits in der Nr. 161 (S. 107) bemerkt wurde, in den auf Reductibilität bezüglichen Fragen, sondern überhaupt bei allen auf den Gruppencharakter bezüglichen Untersuchungen die Betrachtung der Monodromiegruppe ausreicht, wenn es sich um Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe handelt So erklärt sich auch die im ersten Augenblicke vielleicht auffallende Erscheinung, dass in der historischen Entwickelung unserer Theorie die Transformationsgruppe einer linearen Differentialgleichung erst verhältnissmässig spät (1887 in der Arbeit von Herrn Picard) aufgetreten ist, wenn man bedenkt, dass fast alle tiefer gehenden Specialuntersuchungen der Theorie der linearen Differentialgleichungen sich auf Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe beziehen. Dagegen ist zu erwarten, dass aus dem Studium der Transformationsgruppe für die Theorie derjenigen Differentialgleichungen, deren Integrale Unbestimmtheitsstellen darbieten, noch wichtige Ergebnisse zu ziehen sein werden.

Man kann den Artbegriff auch etwas allgemeiner fassen, als wir es gethan haben, indem man sagt, zwei Differentialgleichungen (A) und (B), deren Coefficienten sich innerhalb eines gewissen Bereiches E wie rationale Functionen verhalten, gehören zur selben Art in Bezug auf diesen Bereich, wenn ihre abhängigen Variabeln durch eine Gleichung (C) verknüpft sind, in welcher die Coefficienten $r_0, r_1, \ldots r_{n-1}$ Functionen bedeuten, die innerhalb E den Charakter von rationalen Functionen haben. Wir werden aber im Folgenden nur gelegentlich von dieser Auffassung Gebrauch machen, da es keine Schwierigkeiten darbietet, zu erkennen, was von den auf Differentialgleichungen derselben Art schlechthin bezüglichen Untersuchungen eine Uebertragung auf jenen allgemeineren Artbegriff zulässt Ehe wir jedoch auf tiefere Untersuchungen über Differentialgleichungen derselben Art eingehen, wollen wir eine wichtige Classe von Differentialgleichungen kennen lernen, die unter diesen Begriff fallen und die uns zu interessanten allgemeinen Eigenschaften einer linearen Differentialgleichung führen werden.

Zweites Kapitel.

167. Systeme von Subdeterminanten der Determinante eines Fundamentalsystems. Associirte Differentialgleichungen. Der Franke'sche Satz.

Sei $y_1, y_2, \cdots y_n$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (A) und betrachten wir die Determinante

$$D(y_1, y_2, \cdot \cdot y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdot\cdot & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdot & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

dieses Fundamentalsystems.

Wir denken uns dann die sämmtlichen Subdeterminanten m^{ter} Ordnung dieser Determinante gebildet, wo $m < n$; die Anzahl dieser Subdeterminanten ist offenbar gleich

$$\nu^2 = \left\{\frac{n(n-1) \quad (n-m+1)}{1 \quad 2 \cdot m}\right\}^2 = (n_m)^2.$$

Diejenigen dieser Subdeterminanten, die aus den Elementen des Systems

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdot\cdot & y_m \\ y_1' & y_2' & \cdot & y_m' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdot\cdot & y_m^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

gebildet sind, wollen wir durch

$$u_{11}, \quad u_{21}, \cdots u_{\nu 1}$$

bezeichnen und insbesondere

$$u_{11} = D(y_1, y_2, \cdot \quad y_m)$$

nehmen Ferner bezeichnen wir jene Determinanten, die aus $u_{\varkappa 1}$ dadurch entstehen, dass man die $y_1, y_2, \cdot\, y_m$ und deren Ableitungen durch die Ableitungen gleich hoher Ordnung irgend einer andern Combination von m verschiedenen der Integrale

$$y_1, y_2, \cdots y_n$$

ersetzt, durch

$$u_{\varkappa 2},\ u_{\varkappa 3},\ \cdots\ u_{\varkappa\nu},$$

so dass also

$$u_{\iota\varkappa} \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, \cdots \nu)$$

jene ν^2 Subdeterminanten m^{ter} Ordnung darstellen. Diejenigen Determinanten, welche aus

$$u_{11},\ u_{21},\ \cdots\ u_{\nu 1}$$

hervorgehen, wenn wir in denselben an die Stelle von $y_1, y_2, \cdots y_m$ irgend ein System von m linear unabhängigen Lösungen

$$\mathfrak{y}_1,\ \mathfrak{y}_2,\ \cdots\ \mathfrak{y}_m$$

der Differentialgleichung (A) setzen, mögen endlich durch

$$u_1,\ u_2,\ \cdots\ u_\nu$$

bezeichnet werden.

Bilden wir die Ableitung von u_i nach x und schaffen die eventuell auftretenden Ableitungen höherer als $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der $\mathfrak{y}_1, \cdots \mathfrak{y}_m$ mit Hülfe der Differentialgleichung (A) weg, so ist offenbar

$$\frac{du_i}{dx} = \overset{1}{\varphi}_{i1} u_1 + \overset{1}{\varphi}_{i2} u_2 + \cdots + \overset{1}{\varphi}_{i\nu} u_\nu \qquad (\iota = 1, 2, \cdots \nu),$$

und ebenso allgemein für die λ^{te} Ableitung

$$(1) \qquad \frac{d^\lambda u_\iota}{dx^\lambda} = \overset{\lambda}{\varphi}_{i1} u_1 + \overset{\lambda}{\varphi}_{i2} u_2 + \cdots + \overset{\lambda}{\varphi}_{i\nu} u_\nu \qquad (\iota = 1, 2, \cdots \nu),$$

wo die $\overset{\lambda}{\varphi}_{i\varkappa}$ rationale Functionen bedeuten, die sich aus den Coefficienten von (A) durch Differentiation und rationale Operationen zusammensetzen lassen.

Die Gleichungen (1) bleiben, wie aus ihrer Bildungsweise sofort zu übersehen ist, bestehen, wenn man in denselben die $u_1, u_2, \cdots u_\nu$ durch irgend eines der Systeme

$$u_{1\varkappa},\ u_{2\varkappa},\ \cdots\ u_{\nu\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \nu)$$

ersetzt.

Nehmen wir die Gleichungen (1) für $\lambda = 1, 2, \cdots \nu$ und denken wir uns aus den so entstehenden ν Gleichungen die $\nu - 1$ Grössen

$$u_\varkappa, \quad \varkappa \neq i,$$

eliminirt, so ergiebt sich eine Gleichung von der Form

$$(2_i) \qquad \overset{i}{P}_\nu \frac{d^\nu u_i}{dx^\nu} + \overset{i}{P}_{\nu-1} \frac{d^{\nu-1} u_i}{dx^{\nu-1}} + \cdots + \overset{i}{P}_0 u_i = 0,$$

der die Functionen

$$u_{i1},\ u_{i2},\ \cdots\ u_{i\nu}$$

Genüge leisten und deren Coefficienten rationale Functionen von x sind. Der Coefficient der ν^{ten} Ableitung ist

$$(3_i) \qquad (-1)^{i-1} \overset{i}{P}_\nu = \left| \overset{\lambda}{\varphi}_{i\varkappa} \right| \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, & \nu - 1 \\ \varkappa = 1, 2, & i-1, i+1, & \nu \end{pmatrix}$$

Wenn diese Determinante von Null verschieden ist, so ist demnach die Differentialgleichung (2_i) auch wirklich von der ν^{ten} Ordnung. Wenn wir für $i = 1$ den Index 1 in der Gleichung (2_i) weglassen, so genügt also u_1 für jede Wahl der $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_m$ der Differentialgleichung

$$(2) \qquad P_\nu \frac{d^\nu u}{dx^\nu} + P_{\nu-1} \frac{d^{\nu-1} u}{dx^{\nu-1}} + \cdot \quad + P_0 u = 0,$$

die demnach auch durch

$$u_{11}, u_{12}, \cdots u_{1\nu}$$

befriedigt wird

Wenn diese letztere Differentialgleichung wirklich von der ν^{ten} Ordnung, d. h wenn

$$(3) \qquad P_\nu = \left| \overset{\lambda}{\varphi}_{1\varkappa} \right| \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, & \nu - 1 \\ \varkappa = 2, 3, & \nu \end{pmatrix}$$

von Null verschieden ist, so kann man aus dem Gleichungssysteme, das sich aus (1) für

$$i = 1, \quad \lambda = 1, 2, \cdot \quad \nu - 1$$

ergiebt, die $\nu - 1$ Grössen $u_2, u_3, \cdots u_\nu$ berechnen und erhält

$$(\alpha) \qquad u_\varkappa = \chi_{\varkappa 0} u_1 + \chi_{\varkappa 1} u_1' + \cdot \quad \cdot + \chi_{\varkappa, \nu-1} u_1^{(\nu-1)} \qquad (\varkappa = 2, 3, \quad \nu),$$

wo die $\chi_{\varkappa\lambda}$ rationale Functionen von x bedeuten; in diesem Falle sind also die Differentialgleichungen (2_i) für $i = 2, 3, \cdots \nu$ mit der Differentialgleichung (2) von derselben Art.

Wir setzen im Folgenden voraus, dass die Determinante P_ν von Null verschieden ist, was offenbar im Allgemeinen, d. h. für willkürliche Wahl der rationalen Functionen, welche die Coefficienten von (A) bilden, der Fall sein wird Die Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung (2) soll dann die $(n-m)^{\text{te}}$ der ursprünglichen Differentialgleichung (A) associirte Differentialgleichung genannt werden. Wir haben nunmehr einige Eigenschaften dieser Differentialgleichung zu entwickeln

Hierbei bedürfen wir eines merkwürdigen von Herrn Franke herrührenden Determinantensatzes, der wie folgt lautet:

Bilden wir aus den Elementen der Determinante

$$\Delta = \left| a_{i\varkappa} \right| \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdot n)$$

die sämmtlichen Subdeterminanten m^{ter} Ordnung und bezeichnen dieselben durch

$$b_{\iota\varkappa} \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, \quad \nu, \; \nu = n_m),$$

so dass

$$b_{11} = |a_{\iota\nu}| \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, \quad m)$$

gesetzt wird und

$$b_{21}, b_{31}, \quad \cdot b_{\nu 1}$$

die aus b_{11} durch Abänderung der ersten Indices der $a_{\iota\nu}$,

$$b_{\iota 2}, b_{\iota 3}, \cdots b_{\iota\nu}$$

die aus $b_{\iota 1}$ durch Abänderung der zweiten Indices der $a_{\iota\nu}$ hervorgehenden dieser Determinanten bedeuten, dann ist die Determinante

$$\overset{m}{\varDelta} = |b_{\iota\varkappa}| \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, \quad \nu)$$

eine Potenz der ursprünglichen Determinante, und zwar ist

$$\overset{m}{\varDelta} = (\varDelta)^{(n-1)(m-1)}.$$

Man nennt in der Determinantentheorie das System der

$$(b_{\iota\varkappa}) \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, \quad \nu)$$

das $(n-m)^{\text{te}}$ dem Systeme der

$$(a_{\iota\varkappa}) \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, \quad n)$$

associirte System, und entsprechend auch die Determinante $\overset{m}{\varDelta}$ die $(n-m)^{\text{te}}$ associirte Determinante von $\varDelta$.

Auf einen Beweis dieses Franke'schen Satzes gehen wir an dieser Stelle nicht ein, weil sich derselbe indirect als eine Folge der nachstehenden Betrachtungen ergeben wird. Wie Borchardt bemerkt hat, ist der in Rede stehende Satz als besonderer Fall in dem sogenannten Sylvester'schen Determinantensatze enthalten, für den Herr Frobenius im 86. Bande des Crelle'schen Journals (S. 54) einen eleganten Beweis geliefert hat.

Wenden wir den Franke'schen Satz auf die Determinante

$$D(y_1, y_2, \cdots y_n) = \left|y_\varkappa^{(\iota-1)}\right| \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, \quad n)$$

an, so besagt derselbe, dass die aus den $u_{\iota\varkappa}$ $(\iota, \nu = 1, 2, \quad \nu)$ gebildete Determinante

$$\underset{(\iota, \varkappa = 1, 2, \quad \nu)}{|u_{\iota\varkappa}|} = [D(y_1, y_2, \quad y_n)]^{(n-1)(m-1)}$$

ist. Hieraus folgt, da die $y_1, y_2, \cdot \cdot y_n$ ein Fundamentalsystem bilden:

Die aus den $u_{\iota\varkappa}$ $(\iota, \varkappa = 1, 2, \quad \nu)$ gebildete Determinante ist nicht identisch Null.

Betrachten wir die Gleichungen

$$(\beta)\qquad \frac{d^\lambda u_{1\varkappa}}{dx^\lambda} = \overset{\lambda}{\varphi}_{11} u_{1\varkappa} + \overset{\lambda}{\varphi}_{12} u_{2\varkappa} + \cdots + \overset{\lambda}{\varphi}_{1\nu} u_{\nu\varkappa}$$
$$(\varkappa = 1, 2, \ldots \nu,\ \lambda = 1, 2, \ldots \nu - 1),$$

die sich aus (1) ergeben, indem man $i = 1$ nimmt und die $u_1, u_2, \cdots u_\nu$ durch die $u_{1\varkappa}, u_{2\varkappa}, \ldots u_{\nu\varkappa}$ ersetzt, so erkennen wir, dass nach dem Multiplicationstheoreme der Determinanten

$$D(u_{11}, u_{12}, \cdots u_{1\nu}) = \left|\overset{\lambda}{\varphi}_{1\varkappa}\right| \cdot \left|u_{i\varkappa}\right| \quad \begin{pmatrix}\lambda = 1, 2, \ldots \nu - 1 \\ \varkappa = 2, 3, \ldots \nu\end{pmatrix} \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots \nu \\ \varkappa = 1, 2, \ldots \nu\end{pmatrix}$$

ist.

Wenn also, wie wir voraussetzten, die Determinante P_ν nicht verschwindet, so ist auch die Determinante des Functionssystems

$$u_{11}, u_{12}, \cdots u_{1\nu}$$

nicht identisch Null, d. h. dieses Functionssystem stellt ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (2) dar.

168. Die Fundamentalgleichungen der associirten Differentialgleichungen. Geometrische Deutung. Integralcurve.

Es möge für den am Schlusse der vorigen Nummer bewiesenen Satz noch ein zweiter Beweis angedeutet werden, der sich nicht auf den Franke'schen Satz stützt und der uns zu einer Reihe wichtiger Bemerkungen Anlass geben wird.

Sei $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ ein Fundamentalsystem von (A), welches mit $y_1, y_2, \cdots y_n$ durch die Gleichungen

$$\eta_i = \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{i\varkappa} y_\varkappa \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

verknüpft ist, wo also

$$\Delta = \left|a_{i\varkappa}\right| \neq 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

Dann ist bekanntlich

$$\left|\eta_\varkappa^{(i-1)}\right| = \left|a_{i\varkappa}\right| \cdot \left|y_\varkappa^{(i-1)}\right| \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \ldots n),$$

bilden wir also aus den Elementen der Determinante

$$D(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n) = \left|\eta_\varkappa^{(i-1)}\right|$$

die Subdeterminanten m^{ter} Ordnung und bezeichnen dieselben derart durch

$$v_{i\varkappa} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \ldots \nu),$$

dass $v_{\iota\varkappa}$ aus $u_{\iota\varkappa}$ hervorgeht, indem wir in $u_{\iota\varkappa}$ die $y_1, y_2, \cdots y_n$ durch die $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ ersetzen, so ist nach dem in der Nr 30 (Bd. I, S. 93, Gleichung (5)) erwähnten Satze über die Subdeterminanten componirter Systeme, bei geeigneter Wahl der Bezeichnung,

$$v_{\iota\varkappa} = \sum_{h=1}^{\nu} b_{h\varkappa} u_{\iota h} \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, \cdots \nu),$$

also insbesondere für $\iota = 1$

$$(4) \qquad v_{1\varkappa} = \sum_{h=1}^{\nu} b_{h\varkappa} u_{1h} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \nu),$$

die $v_{1\varkappa}$ sind demnach ebenfalls Lösungen der Differentialgleichung (2).

Wir wollen im Folgenden die $u_{1\varkappa}$ als die dem Fundamentalsysteme $y_1, y_2, \cdots y_n$ entsprechenden Lösungen der $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Differentialgleichung bezeichnen, dann können wir also den Satz aussprechen:

Wenn die Integrale $y_1, y_2, \cdots y_n$ der Differentialgleichung (A) eine lineare Substitution S erfahren, so erfahren die entsprechenden Integrale der $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Differentialgleichung die $(n-m)^{\text{te}}$ associirte Substitution von S.

Sei nun $x = a$ ein Verzweigungspunkt der Integrale von (A) und bedeute $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ das zu diesem Punkte gehörige canonische Fundamentalsystem. Wir setzen der Einfachheit wegen voraus, dass die Wurzeln

$$\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$$

der zu $x = a$ gehörigen Fundamentalgleichung sämmtlich von einander verschieden sind Dann ist also

$$\eta_\varkappa = (x-a)^{r_\varkappa} \mathfrak{P}_\varkappa(x \mid a) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

wo $\mathfrak{P}_\varkappa(x \mid a)$ eine nach ganzen Potenzen von $x - a$ fortschreitende Reihe und $r_\varkappa$ einen der Werthe von

$$\frac{1}{2\pi i} \log \omega_\varkappa$$

bedeutet.

Bilden wir die den $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ entsprechenden Lösungen

$$v_{1\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \nu)$$

der Differentialgleichung (2), dann ist also

$$v_{1\varkappa} = \begin{vmatrix} \eta_{\varkappa_1} & \eta_{\varkappa_2} & \cdots & \eta_{\varkappa_m} \\ \eta'_{\varkappa_1} & \eta'_{\varkappa_2} & \cdots & \eta'_{\varkappa_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta^{(m-1)}_{\varkappa_1} & \eta^{(m-1)}_{\varkappa_2} & \cdots & \eta^{(m-1)}_{\varkappa_m} \end{vmatrix},$$

wo $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_m$ ein System von m verschiedenen der Zahlen $1, 2, \cdots n$ bedeutet. Folglich haben wir in der Umgebung von $x = a$ für $v_{1\varkappa}$ die Entwickelung

(5) $$v_{1\varkappa} = (x-a)^{r_{\varkappa_1} + r_{\varkappa_2} + \cdots + r_{\varkappa_m}} P_\varkappa(x|a) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \nu),$$

wo $P_\varkappa(x|a)$ eine nach ganzen Potenzen von $x - a$ fortschreitende Reihe darstellt. Setzen wir

(6) $$\Omega_\varkappa = e^{2\pi i (r_{\varkappa_1} + r_{\varkappa_2} + \cdots + r_{\varkappa_m})} = \omega_{\varkappa_1}\omega_{\varkappa_2}\cdots\omega_{\varkappa_m},$$

so müssen diese ν Grössen nach den Ergebnissen des dritten Abschnittes der zum Punkte $x = a$ gehörigen Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (2) genügen; im Allgemeinen sind dieselben von einander verschieden, wir wollen dies der Einfachheit wegen annehmen. Dann sind die ν Integrale (5) linear unabhängig (vergl. Nr. 31, Bd. I, S. 100) und bilden folglich ein Fundamentalsystem und zwar das zu $x = a$ gehörige canonische Fundamentalsystem der Differentialgleichung (2).

Hieraus folgt nun sofort, dass auch jedes einem Fundamentalsysteme $y_1, y_2, \cdots y_n$ von (A) entsprechende Lösungssystem $u_{1\varkappa}$ der Differentialgleichung (2) ein Fundamentalsystem von (2) sein muss; denn bestünde zwischen den $u_{1\varkappa}$ eine homogene lineare Beziehung mit constanten Coefficienten, so würde aus den Gleichungen (4) das Bestehen einer eben solchen Relation zwischen den $v_{1\varkappa}$ folgen.

Beiläufig lernen wir, dass die Grössen (6) die Wurzeln der zum Punkte $x = a$ gehörigen Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (2) darstellen. Wir wollen uns diese Fundamentalgleichung bilden.

Wenn das Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots y_n$ von (A) bei einem einfachen Umlaufe der unabhängigen Variabeln x um den Punkt $x = a$ die Substitution

$$\Sigma = (\alpha_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

erfährt, so lautet die zu $x = a$ gehörige Fundamentalgleichung von (A)

(7) $$|\alpha_{\varkappa i} - \delta_{\varkappa i}\omega| = 0 \qquad (\varkappa, i = 1, 2, \cdots n)$$

Das entsprechende Fundamentalsystem $u_{11}, u_{12}, \cdots u_{1\nu}$ der $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Differentialgleichung (2) erleidet dann bei demselben Umlaufe die $(n-m)^{\text{te}}$ associirte Substitution

$$(\beta_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots \nu)$$

von Σ, und die zu $x = a$ gehörige Fundamentalgleichung von (2) lautet demgemäss

(8) $$|\beta_{\varkappa i} - \delta_{\varkappa i}\omega| = 0 \qquad (\varkappa, i = 1, 2, \cdots \nu)$$

Also sind, wie Herr G. Rados bemerkt hat, die Wurzeln der Gleichung (8) die Producte von je m verschiedenen der Wurzeln der Gleichung (7), und hieraus ergiebt sich nun, wenn wir in den linken Seiten der Gleichungen (7) und (8) $\omega = 0$ setzen, der Franke'sche Satz, da ja die Determinanten

$$|\alpha_{\iota\varkappa}| = \pm\, \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, \ldots n),$$
$$|\beta_{\iota\varkappa}| = \pm\, \Omega_1 \Omega_2 \cdots \Omega_\nu \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, \ldots \nu)$$

sind.

Die hier durchgeführten Betrachtungen leiten uns zu einer sehr wichtigen und folgenreichen Auffassung der Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung hin, die wir jetzt darlegen werden, indem wir an gewisse geometrische, von H G Grassmann in seiner „Ausdehnungslehre" eingeführte Gesichtspunkte anknüpfen

Hat man n stetig veränderliche reale Grössen

$$x_1, x_2, \cdots x_n,$$

die nur abgesehen von einem allen gemeinsamen Factor bestimmt sind, so kann man dieselben als die homogenen Coordinaten eines Punktes einer $(n-1)$-fach ausgedehnten ebenen Mannigfaltigkeit, oder, wie man sich kürzer ausdrückt, eines $(n-1)$-dimensionalen Raumes R_{n-1} auffassen. Jedes Grössensystem, dessen n Elemente nicht sämmtlich verschwinden, bestimmt auf diese Weise einen Punkt des R_{n-1}.

Betrachtet man die Coordinaten von m verschiedenen solchen Punkten

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} x_1' & x_2' & \cdots & x_n', \\ x_1'' & x_2'' & \cdots & x_n'', \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ x_1^{(m)} & x_2^{(m)} & \cdots & x_n^{(m)}, \end{cases}$$

die so beschaffen sind, dass die nm Grössen (I) ein System vom Range m bilden, dann bestimmt die Gesammtheit derjenigen Punkte, deren Coordinaten sich in der Form

$$\text{(II)} \qquad x_h = \lambda_1 x_h' + \lambda_2 x_h'' + \cdots + \lambda_m x_h^{(m)} \qquad (h = 1, 2, \ldots n)$$

darstellen lassen, wo die $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m$ Constanten bedeuten, eine in dem R_{n-1} enthaltene Mannigfaltigkeit $(n-m)^{\text{ter}}$ Stufe, $(m-1)^{\text{ter}}$ Dimension. Man kann dieselbe durch $(n-m)$ homogene lineare Gleichungen zwischen den laufenden Coordinaten eines veränderlich gedachten Punktes darstellen; Grassmann hat aber neben dieser Darstellung durch Gleichungen auch eine Bestimmung jener ebenen Mannigfaltigkeit durch Coordinaten eingeführt.

Er definirt nämlich als die homogenen Coordinaten der durch die Gleichungen (II) bestimmten ebenen Mannigfaltigkeit oder (wie wir kürzer sagen wollen) Ebene $(n-m)^{\text{ter}}$ Stufe, ein System von Zahlen, welches den aus dem System (I) gebildeten

$$v = \frac{n(n-1) \cdots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdots m}$$

Determinanten m^{ter} Ordnung proportional ist. Diese Definition rechtfertigt sich dadurch, dass man zu denselben Coordinaten kommt, wenn man statt von den m Punkten mit den Coordinaten (I) von irgend welchen anderen m Punkten der Ebene $(n-m)^{\text{ter}}$ Stufe, die nicht schon in einer Ebene $(n-m+1)^{\text{ter}}$ Stufe liegen, ausgeht.

Im Sinne einer bei der geometrischen Interpretation functionentheoretischer Verhältnisse seit Clebsch üblichen Uebertragungsweise behält man die für den Fall realer Grössen $x_1, x_2, \cdots x_n$ eingeführte Terminologie auch in dem Falle bei, wo diese Grössen beliebige complexe Werthe anzunehmen vermögen.

Wir werden also die Werthe, welche ein Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots y_n$ der Differentialgleichung (A) an irgend einer Stelle x annimmt, auch als die homogenen Coordinaten eines Punktes im R_{n-1} auffassen können und auf diese Weise, wenn wir x alle complexen Werthe durchlaufen lassen, ein Gebilde $(n-2)^{\text{ter}}$ Stufe, eine Curve, wie wir sagen wollen, im R_{n-1} erhalten. Wir denken uns diese Curve $\mathfrak{C}$ in der Form

(9) $$y_\varkappa = y_\varkappa(x) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

dargestellt. Es entspricht dann jedem nicht singulären Werthe von x ein Punkt der Curve $\mathfrak{C}$, da ja für keinen solchen Werth alle n Integrale $y_1, y_2, \cdots y_n$ verschwinden können; bei dieser geometrischen Interpretation wird also ein Uebelstand vermieden, der sich in der Nr. 133 (S. 11) bei der daselbst dargelegten geometrischen Deutung unangenehm bemerkbar machte.

169. Geometrische Deutung der Integrale der associirten Differentialgleichungen. Contragredienz.

Es kann weder die Curve $\mathfrak{C}$ in ihrer Totalität noch ein beliebig kleines continuirliches Stück von $\mathfrak{C}$ in einer Ebene irgend welcher Stufe des R_{n-1} liegen; denn dies würde das Bestehen von homogenen linearen Beziehungen mit von x unabhängigen Coefficienten zwischen den $y_1, y_2, \cdots y_n$ zur Folge haben. Diese Curve ist also eine $(n-2)$-fach gekrümmte, oder, wie sich Herr Lie ausdrückt, eine möglichst gekrümmte Curve des R_{n-1}.

Betrachten wir $m(<n)$ einander unendlich benachbarte reguläre Punkte der Curve $\mathfrak{C}$ und denken uns durch dieselben eine Ebene $(n-m)^{\text{ter}}$ Stufe hindurchgelegt, so nennen wir diese eine Tangentialebene $(n-m)^{\text{ter}}$ Stufe der Curve $\mathfrak{C}$.

Auf Grund der Principien der Differentialrechnung ist es leicht einzusehen, dass, wenn $y_1(x), y_2(x), \cdots y_n(x)$ die Coordinaten eines regulären Punktes unserer Curve sind, die $(m-1)$ Punkte, deren Coordinaten durch

$$\begin{array}{llll} y_1'(x), & y_2'(x), & \cdots & y_n'(x), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_1^{(m-1)}(x), & y_2^{(m-1)}(x), & \cdots & y_n^{(m-1)}(x) \end{array}$$

dargestellt werden, der durch den Punkt mit den Coordinaten

$$y_1(x), y_2(x), \cdots y_n(x)$$

hindurchgelegten Tangentialebene $(n-m)^{\text{ter}}$ Stufe angehören. Die homogenen Coordinaten dieser Tangentialebene im Sinne von Grassmann sind also proportional den ν aus den Elementen des Systems

$$\begin{array}{llll} y_1(x), & y_2(x), & \cdots & y_n(x), \\ y_1'(x), & y_2'(x), & \cdots & y_n'(x), \\ \cdot & & & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_1^{(m-1)}(x), & y_2^{(m-1)}(x), & \cdots & y_n^{(m-1)}(x) \end{array}$$

gebildeten Determinanten m^{ter} Ordnung; dies sind aber genau unsere Determinanten $u_{11}, u_{12}, \cdots u_{1\nu}$. D. h:

Die Coordinaten der in dem Punkte $(y_1, y_2, \cdots y_n)$ der Integralcurve $\mathfrak{C}$ gelegten Tangentialebene $(n-m)^{\text{ter}}$ Stufe sind proportional den dem Fundamentalsysteme $[y_\varkappa]$ entsprechenden Lösungen der $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Differentialgleichung von (A).

Betrachten wir insbesondere die Tangentialebene erster Stufe (die wir für $n>3$ wohl auch als Tangentialebene schlechthin, ebenso wie die Ebene erster Stufe, kurz als Ebene bezeichnen), so sind deren Coordinaten proportional den zu den Elementen $y_1^{(n-1)}, \cdots y_n^{(n-1)}$ gehörigen Subdeterminanten der Determinante

$$D(y_1, y_2, \cdots y_n);$$

diese n Subdeterminanten sind aber nach den Ergebnissen der Nr. 22 (Bd. I, S. 62) nichts anderes wie die mit dem Factor

$$D(y_1, y_2, \cdots y_n) = \text{const.}\, e^{-\int p_1 dx}$$

multiplicirten Elemente des dem Fundamentalsysteme $[y_x]$ adjungirten Fundamentalsystems $z_1, z_2, \cdot z_n$ der zu (A) adjungirten Differentialgleichung (A'). Wir können also sagen:

Die erste Associirte der Differentialgleichung (A) geht aus der zu (A) adjungirten Differentialgleichung (A') dadurch hervor, dass man in der letzteren die abhängige Variable z mit dem Factor

$$e^{-\int p_1 dx}$$

multiplicirt.

Die Elemente $z_1, z_2, \cdots z_n$ des zu $y_1, y_2, \cdots y_n$ adjungirten Fundamentalsystems können als die Coordinaten der Tangentialebene (für $n = 3$ der Tangente im Sinne der gewöhnlichen Geometrie), die an die Integralcurve $\mathfrak{C}$ im Punkte $(y_1, y_2, \cdots y_n)$ gelegt ist, aufgefasst werden.

Die Gleichungen

$$(10) \qquad z_x = z_x(x) \qquad (x = 1, 2, \quad n)$$

stellen dann, wie wir sagen können, die Curve $\mathfrak{C}$ in Ebenencoordinaten (für $n = 3$, in Liniencoordinaten) dar.

Die Ausübung einer linearen Substitution auf die Coordinaten $x_1, x_2, \cdot x_n$ kann geometrisch in doppelter Weise gedeutet werden. Hält man den Punkt fest, dessen Coordinaten proportional sind den $x_1, x_2, \cdot x_n$, so kann man die Ausdrücke

$$(11) \qquad \xi_x = \sum_{i=1}^{n} a_{xi} x_i \qquad (x = 1, 2, \quad n),$$

$$|a_{ix}| \neq 0 \qquad (i, x = 1, 2, \quad n),$$

als die Coordinaten desselben Punktes in einem neuen Coordinatensysteme, dessen Fundamental-n-flach durch die n Ebenen

$$\sum_{i=1}^{n} a_{xi} x_i = 0 \qquad (x = 1, 2, \quad n)$$

gebildet wird, auffassen. Betrachtet man dagegen das Coordinatensystem als fest, so wird durch die Gleichungen (11) jedem Punkte $(x_1, x_2, \cdot x_n)$ des R_{n-1} ein wohlbestimmter anderer Punkt $(\xi_1, \xi_2, \cdot\cdot \xi_n)$ zugeordnet, und man nennt diese Art der Zuordnung bekanntlich eine collineare. Wir werden uns im Folgenden stets dieser letzteren Interpretation bedienen und dementsprechend jede lineare Transformation (11) als eine Collineation auffassen.

Es stehen dann also alle Integralcurven, die zu einer linearen Differentialgleichung (A) gehören, in collinearer

Beziehung zu einander, und jede Integralcurve wird durch die Collineationen der Monodromiegruppe der Differentialgleichung in sich selbst transformirt.

Wenn die $y_1, y_2, \cdots y_n$ irgend eine lineare Substitution

$$S = (a_{\iota\varkappa}) \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

erfahren, so erfahren, wie wir in der Nr 168 (S. 130) gezeigt haben, die entsprechenden Lösungen $u_{11}, u_{12}, \cdots u_{1\nu}$ der $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Differentialgleichung die $(n-m)^{\text{te}}$ associirte Substitution

$$(b_{\iota\varkappa}) \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, \cdots \nu),$$

deren Elemente die Subdeterminanten m^{ter} Ordnung der Determinante

$$|a_{\iota\varkappa}| \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

sind.

Wir schliessen daraus, dass die Monodromiegruppe der $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Differentialgleichung aus den $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Substitutionen der Monodromiegruppe h von (A) besteht; wir nennen diese Gruppe wohl auch die $(n-m)^{\text{te}}$ associirte von h.

Aber auch zwischen der Transformationsgruppe von (A) und der seiner $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Differentialgleichung besteht eine ähnliche Beziehung.

In der That ist zunächst klar, dass die Gesammtheit der $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Substitutionen der Substitutionen einer Gruppe selbst wieder eine Gruppe bildet, denn nach dem Satze über die Subdeterminanten componirter Systeme (Nr. 30, Bd I, S. 93, Gleich. (5)) ist die $(n-m)^{\text{te}}$ associirte einer aus zwei Substitutionen componirten Substitution in derselben Reihenfolge aus den $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten der beiden Componenten zusammengesetzt

Wir können also allgemein zu jeder Gruppe linearer homogener Substitutionen eine $(n-m)^{\text{te}}$ associirte Gruppe herstellen.

Sei nun H die Transformationsgruppe von (A) und bilden wir die $(n-m)^{\text{te}}$ associirte Gruppe $H^{(n-m)}$ von H Bedeute ferner

$$\Re(u_{11}, u_{12}, \cdots u_{1\nu})$$

eine rationale Differentialfunction der $u_{1\varkappa}$, die bei den Transformationen von $H^{(n-m)}$ ungeändert bleibt, dann ist diese Function auch als rationale Differentialfunction der $y_1, y_2, \cdots y_n$ darstellbar und bleibt als solche bei den Transformationen von H ungeändert; sie ist also rational in x. Umgekehrt möge $\Re(u)$ rational durch x ausdrückbar sein, dann

bleibt $\Re(u)$, als Function der $y_1, y_2, \cdots y_n$ dargestellt, bei den Transformationen von H ungeändert, also als Function der $u_{1\varkappa}$ bei den Transformationen von $H^{(n-m)}$. Das heisst, die Gruppe $H^{(n-m)}$ besitzt die beiden durch den Picard-Vessiot'schen Doppelsatz ausgedrückten Eigenschaften der Transformationsgruppe der $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Differentialgleichung, sie muss also nach einer in der Nr 151 (S. 73) gemachten Bemerkung mit dieser Transformationsgruppe identisch sein

Dividirt man die Elemente der ersten einer Substitution S associirten Substitution durch die Determinante von S, so erhält man die zu S reciproke Substitution Adjungirte Fundamentalsysteme erfahren nach dem Satze der Nr. 23 (Bd. I, S. 65) stets einander reciproke Substitutionen Also haben wir den Satz:

Die Transformationsgruppe und die Monodromiegruppe der einer Differentialgleichung adjungirten Differentialgleichung bestehen aus den reciproken Substitutionen der entsprechenden Gruppen der ursprünglichen Differentialgleichung.

Oder, da beide Gruppen aus paarweise inversen Transformationen bestehen und (Nr. 30, Bd. I, S. 95; vergl. Nr. 150, S. 70) die inverse der reciproken die transponirte ursprüngliche Substitution ist, so können wir auch sagen:

Transformationsgruppen sowohl wie Monodromiegruppen adjungirter Differentialgleichungen gehen durch Transposition ihrer Substitutionen auseinander hervor.

Da Differentialgleichungen derselben Art und gleicher Ordnung dieselbe Transformations- und Monodromiegruppe besitzen, wenn man entsprechende, d. h. durch die die Artbeziehung darstellende Relation mit einander verknüpfte Fundamentalsysteme zu Grunde legt, so gelten dieselben Beziehungen auch zwischen der Gruppe einer Differentialgleichung (A) und der Gruppe irgend einer mit der adjungirten von (A) zur selben Art gehörigen Differentialgleichung. Wenn wir uns also einer in der Invariantentheorie der algebraischen Formen gebräuchlichen Ausdrucksweise bedienen, wonach zwei Systeme von Grössen, die einander reciproke Substitutionen erleiden, als contragredient bezeichnet werden (vergl. Nr. 23, Bd. I, S. 66), so können wir sagen:

Ein Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots y_n$ von (A) ist mit dem entsprechenden Fundamentalsysteme $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n$ einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, die mit der Adjungirten von (A) zur selben Art gehört, contragredient in Bezug auf alle Transformationen der Transformationsgruppe von (A).

Sind zwei Variabelnsysteme

$$x_1, x_2, \cdots x_n,$$
$$\xi_1, \xi_2, \cdot \cdot \xi_n$$

contragredient in Bezug auf eine Substitution S, welche die $x_1, x_2, \cdot\cdot x_n$ erfahren, so folgt aus einfachen Determinantensätzen, dass die bilineare Form

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \cdot\cdot + x_n\xi_n$$

bei Anwendung der Substitution S ungeändert bleibt. Bilden wir also den Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^{(\alpha)}\xi_i^{(\beta)},$$

wo α, β irgendwelche der Zahlen 0, 1, 2, $\cdot\cdot$ bedeuten, so bleibt derselbe bei allen Substitutionen der Transformationsgruppe H von (A) ungeändert. Dieser Ausdruck ist aber eine rationale Differentialfunction der $y_1, y_2, \cdots y_n$, er hat folglich einen in x rationalen Werth. Als Beispiel hierfür können die in der Nr 23 (Bd. I, S. 63, Gleich. (19)) aufgestellten Relationen zwischen den Elementen adjungirter Fundamentalsysteme gelten.

170. Algebraische Beziehungen zwischen den Elementen eines Fundamentalsystems der höheren Associirten. Princip der Dualität.

Die geometrischen Sätze über die Coordinaten der Ebenen verschiedener Stufe lassen sich nun in ebenso viele Sätze über die Beziehungen zwischen den Fundamentalsystemen der zu (A) associirten Differentialgleichungen umbilden.

Besonders wichtig ist der Satz, dass zwischen den Coordinaten der Ebenen 2^{ter}, 3^{ter}, $\cdot\cdot (n-2)^{\text{ter}}$ Stufe identische homogene algebraische Beziehungen von höherem als dem ersten Grade bestehen; es folgt aus demselben:

Die Elemente eines Fundamentalsystems der 2^{ten}, 3^{ten}, $\cdot$ $(n-2)^{\text{ten}}$ associirten Differentialgleichung befriedigen nichtlineare homogene algebraische Gleichungen.

Wir wollen für den Fall einer Differentialgleichung vierter Ordnung

$$(\mathrm{A}_4) \qquad \frac{d^4y}{dx^4} + p_1\frac{d^3y}{dx^3} + p_2\frac{d^2y}{dx^2} + p_3\frac{dy}{dx} + p_4 y = 0$$

die zwischen den Integralen der zweiten associirten Differentialgleichung, die also in diesem Falle von der sechsten Ordnung ist, bestehende Relation herleiten Wir bilden aus dem Systeme

$$\begin{pmatrix} y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ y_1', & y_2', & y_3', & y_4' \end{pmatrix}$$

die sechs möglichen Determinanten zweiter Ordnung

$$y_\iota y_\varkappa' - y_\varkappa y_\iota' = \omega_{\iota\varkappa} \qquad (\iota < \varkappa),$$

dann bilden diese im Allgemeinen ein Fundamentalsystem der zweiten associirten Differentialgleichung. Der Laplace'sche Determinantensatz, auf die identisch verschwindende Determinante

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_4' \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_4' \end{vmatrix}$$

angewandt, liefert die gesuchte Beziehung

$$(\gamma) \qquad \omega_{12}\omega_{34} - \omega_{13}\omega_{24} + \omega_{14}\omega_{23} = 0;$$

es ist die aus den Elementen der analytischen Geometrie wohlbekannte Gleichung, die zwischen den Plücker'schen Coordinaten einer geraden Linie des gewöhnlichen dreidimensionalen Raumes besteht.

Um die analogen Relationen im allgemeinsten Falle aufstellen zu können, knüpfen wir an das in der neueren Geometrie so fruchtbar gewordene Princip der Dualität an.

Aus dem Begriffe des ebenen $(n-1)$-fach ausgedehnten Raumes R_{n-1} folgt, dass ebenso wie $(n-1)$ Punkte (Ebenen $(n-1)^{\text{ter}}$ Stufe) von allgemeiner Lage eine Ebene (erster Stufe) bestimmen, auch umgekehrt $(n-1)$ Ebenen von allgemeiner Lage einen Punkt (ihren Schnittpunkt) bestimmen Allgemein wird durch $(n-m)$ Ebenen von allgemeiner Lage eine Ebene m^{ter} Stufe bestimmt, ebenso wie $(n-m)$ Punkte gerade zur Bestimmung einer Ebene $(n-m)^{\text{ter}}$ Stufe hinreichen. Daraus folgt, dass jeder Satz der Geometrie des R_{n-1}, der sich auf Lagenverhältnisse von ebenen Gebilden bezieht, in einen ebenfalls richtigen Satz übergeht, wenn man darin an die Stelle des Wortes „Ebene" das Wort „Punkt", und allgemein an die Stelle des Wortes „Ebene m^{ter} Stufe" das Wort „Ebene $(n-m)^{\text{ter}}$ Stufe", für $m = 2, 3, \cdots n-2$, setzt. Dies ist das Princip der Dualität. Es stehen also im R_{n-1}

die Ebene m^{ter} Stufe | und die Ebene $(n-m)^{\text{ter}}$ Stufe

$$(m = 1, 2, \cdots n-1)$$

einander dualistisch gegenüber. Je nachdem n gerade oder ungerade ist, giebt es oder giebt es nicht ein sich selbst dualistisches ebenes Gebilde.

Im Sinne dieser Auffassung werden wir also zunächst den als Punktcoordinaten gedeuteten Lösungen $y_1, y_2, \cdots y_n$ der gegebenen Differentialgleichung (A) die entsprechenden Lösungen der ersten associirten Differentialgleichung oder die von denselben nur durch den gemeinsamen Factor

$$(12) \qquad \frac{\text{const}}{D(y_1, y_2, \cdots y_n)} = e^{\int p_1 dx}$$

verschiedenen Elemente des adjungirten Fundamentalsystems $z_1, z_2, \cdots z_n$ der zu (A) adjungirten Differentialgleichung als Ebenencoordinaten gegenüberstellen. Die bekannten Beziehungen zwischen adjungirten Fundamentalsystemen und die in der Nr. 169 (S 137) aufgestellten Sätze entsprechen der dualistischen Beziehung zwischen Punkt und Ebene Entsprechend werden wir dann allgemein die Lösungen

$$u_{11}, u_{12}, \cdots u_{1\nu} \qquad (\nu = n_m)$$

der $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Differentialgleichung, die wir durch $(A^{(n-m)})$ bezeichnen wollen, mit den Lösungen der m^{ten} associirten Differentialgleichung $(A^{(m)})$ in Beziehung zu setzen suchen.

Wir bezeichnen die zu der Subdeterminante m^{ter} Ordnung $u_{\iota\varkappa}$ von $D(y_1, y_2, \cdots y_n)$ adjungirte Subdeterminante $(n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung durch

$$v_{\nu-\iota+1,\, \nu-\varkappa+1},$$

so dass also, wenn, abgesehen vom Vorzeichen,

$$u_{\iota\varkappa} = \left|y_\alpha^{(\beta-1)}\right| \qquad (\alpha = i_1, i_2, \cdots i_m,\ \beta = \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_m)$$

ist, ebenfalls abgesehen vom Vorzeichen

$$v_{\nu-\iota+1,\, \nu-\varkappa+1} = \left|y_\alpha^{(\beta-1)}\right| \qquad (\alpha = i_1', i_2', \cdots i_{n-m}',\ \beta = \varkappa_1', \varkappa_2', \cdots \varkappa_{n-m}')$$

zu nehmen ist, wo die beiden Zahlenreihen

$$i_1, i_2, \cdots i_m, i_1', i_2', \cdots i_{n-m}',$$
$$\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_m, \varkappa_1', \varkappa_2', \cdots \varkappa_{n-m}'$$

je eine Permutation der Zahlen $1, 2, \cdots n$ darstellen. Die Anzahl der $v_{\iota\varkappa}$ stimmt dann wegen der Gleichung

$$n_m = n_{(n-m)} = \nu$$

mit der Anzahl der $u_{\iota\varkappa}$ überein; überdies denken wir uns die Bezeichnung so gewählt, dass

$$(13) \qquad v_{1\varkappa} = \left|y_\alpha^{(\beta-1)}\right| \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots n-m,\ \beta = \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_{n-m})$$

ist, so dass also die

$$v_{11}, v_{12}, \cdots v_{1\nu}$$

das den $y_1, y_2, \cdots y_n$ entsprechende Fundamentalsystem der m^{ten} associirten Differentialgleichung $(A^{(m)})$ darstellen

Dann bestehen nach dem Laplace'schen Determinantensatze die Gleichungssyteme

$$\sum_{\varkappa=1}^{\nu} u_{\iota\varkappa} v_{\nu-\iota+1,\,\nu-\varkappa+1} = D(y_1, y_2, \cdot\; y_n), \tag{14}$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{\nu} u_{\lambda\varkappa} v_{\nu-\iota+1,\,\nu-\varkappa+1} = 0; \quad \lambda \neq i; \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{\nu} u_{i\varkappa} v_{\nu-\iota+1,\,\nu-\varkappa+1} = D(y_1, y_2, \quad \cdot\, y_n), \tag{16}$$

$$\sum_{i=1}^{\nu} u_{\iota\lambda} v_{\nu-\iota+1,\,\nu-\varkappa+1} = 0, \quad \lambda \neq \varkappa, \tag{17}$$

wenn wir uns die Vorzeichen der $u_{\iota\varkappa}$, $v_{i\varkappa}$ in geeigneter Weise gewählt denken.

Diesen Gleichungen sind noch die folgenden an die Seite zu stellen. Bedeuten $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-m}$ irgendwelche $(n-m)$ linear unabhängige Lösungen von (A) und $v_\varkappa$ diejenige Determinante, die aus den $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-m}$ nebst deren Ableitungen ebenso gebildet ist, wie $v_{\iota\varkappa}$ aus den $y_1, y_2, \cdot\; y_{n-m}$ nebst deren Ableitungen, so bestehen die den Gleichungen (α) (Nr. 167, S. 127) analogen Beziehungen

$$v_\varkappa = \psi_{\varkappa 0} v_1 + \psi_{\varkappa 1} v_1' + \cdot\;\cdot + \psi_{\varkappa,\,\nu-1} v_1^{(\nu-1)}, \tag{α'}$$

wo die $\psi_{\varkappa i}$ rationale Functionen von x bedeuten Wenn nun die n Integrale

$$\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdot\; \mathfrak{y}_m, \eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-m}$$

ein Fundamentalsystem von (A) constituiren, so ist die Determinante

$$D(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \quad \cdot\, \mathfrak{y}_m, \eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-m}) = \text{const.}\, e^{-\int p_1 dx}; \tag{18}$$

bezeichnen wir also mit $v_{\nu-i+1}$ die zur Subdeterminante m^{ter} Ordnung u_ι adjungirte Subdeterminante $(n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung von (18), so ist nach dem Laplace'schen Satze

$$\sum_{i=1}^{\nu} u_\iota v_{\nu-\iota+1} = \text{const.}\, e^{-\int p_1 dx}.$$

Setzen wir in dieser Gleichung die sich aus (α), (α') ergebenden Werthe ein, so erhalten wir linker Hand einen Ausdruck von der Gestalt

$$\sum_{\alpha=0}^{\nu-1}\sum_{\beta=0}^{\nu-1} u_1^{(\alpha)} v_1^{(\beta)} P_{\alpha\beta},$$

wo die $P_{\alpha\beta}$ rationale Functionen von x bedeuten, d. h. eine bilineare Form von u_1, v_1 und deren $(\nu-1)$ ersten Ableitungen. Schreiben wir u an die Stelle von u_1, v an die Stelle von v_1, so ist also

$$(19) \qquad Z = \sum_{\alpha=0}^{\nu-1}\sum_{\beta=0}^{\nu-1} u^{(\alpha)} v^{(\beta)} P_{\alpha\beta} = \text{const. } e^{-\int p_1 dx},$$

und hierin bedeuten nun u, v irgend zwei geeignet gewählte Integrale der Differentialgleichungen $(A^{(n-m)})$, $(A^{(m)})$. Insbesondere ist die Gleichung (19) stets erfüllt für

$$u = u_{1\varkappa}, \quad v = v_{1,\nu-\varkappa+1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdot \ \nu),$$

für diese Integralpaare folgt dieselbe auch unmittelbar aus den Gleichungen (16).

Wenn n eine gerade Zahl

$$n = 2m$$

ist, so fallen die Differentialgleichungen $(A^{(m)})$, $(A^{(n-m)})$ zusammen, die $v_{i\nu}$ sind mit den $u_{i\varkappa}$ identisch, und die im Allgemeinen bilineare Form Z verwandelt sich in eine quadratische Form

$$(20) \qquad \sum_{\alpha=0}^{\nu-1}\sum_{\beta=0}^{\nu-1} u^{(\alpha)} u^{(\beta)} P_{\alpha\beta} = \text{const. } e^{-\int p_1 dx}.$$

Ferner folgt in diesem Falle aus (15) für $\lambda = 1$, $i = \nu$ die Beziehung

$$(21) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{\nu} u_{1\varkappa} u_{1,\nu-\varkappa+1} = 0,$$

die für $n = 4$ in die für die Differentialgleichung vierter Ordnung gefundene Beziehung (γ) (S. 139) übergeht.

171 Beziehungen zwischen den Adjungirten der associirten Differentialgleichungen.

Wir wollen nun die Adjungirte der Differentialgleichung $(A^{(n-m)})$ aufsuchen, oder, genauer gesprochen, die erste Associirte dieser Differentialgleichung.

Zufolge unserer Voraussetzung bilden die

$$u_{11}, u_{12}, \cdot \cdot u_{1\nu}$$

ein Fundamentalsystem von $(A^{(n-m)})$; die Integrale der ersten Associirten von $(A^{(n-m)})$ sind also nichts Anderes, wie die zu den Elementen

$$u_{11}^{(\nu-1)}, u_{12}^{(\nu-1)}, \cdots u_{1\nu}^{(\nu-1)}$$

gehörigen Subdeterminanten der Determinante

$$\left|u_{1\varkappa}^{(\iota-1)}\right| \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, \cdots \nu),$$

wir bezeichnen die zu $u_{1\varkappa}^{(\nu-1)}$ gehörige dieser Subdeterminanten durch $w_{1\varkappa}$. Dann folgt zunächst aus der in der Nr. 167 (S. 129) gefundenen Gleichung

$$(22) \qquad \left|u_{1\varkappa}^{(\iota-1)}\right|_{(\iota, \varkappa = 1, 2, \cdots \nu)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \overset{1}{\varphi}_{11} & \overset{1}{\varphi}_{12} & \cdots & \overset{1}{\varphi}_{1\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overset{(\nu-1)}{\varphi_{11}} & \overset{(\nu-1)}{\varphi_{12}} & \cdots & \overset{(\nu-1)}{\varphi_{1\nu}} \end{vmatrix} \cdot \left|u_{\iota\varkappa}\right|_{(\iota, \varkappa = 1, 2, \cdots \nu)}$$

nach dem Satze über die Subdeterminanten componirter Systeme (Nr 30, Bd. I, S. 93)

$$(23) \qquad w_{1\varkappa} = \sum \left|\overset{(\iota-1)}{\varphi_{1h}}\right| \left|u_{h\lambda}\right| \qquad \begin{pmatrix} \iota = 1, 2, \cdots \nu-1, \\ h = h_1, h_2, \cdots h_{\nu-1}, \\ \lambda = 1, 2, \cdots \varkappa-1, \varkappa+1, \cdots \nu \end{pmatrix},$$

wo sich das Summenzeichen auf die ν möglichen Combinationen

$$h_1, h_2, \cdots h_{\nu-1}$$

von je $(\nu-1)$ der Zahlen $1, 2, \cdots \nu$ bezieht und

$$\overset{0}{\varphi}_{11} = 1, \quad \overset{0}{\varphi}_{1\lambda} = 0 \qquad (\lambda > 1)$$

zu nehmen ist

Bilden wir nun das Determinantenproduct

$$(24) \qquad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1\nu} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2\nu} \\ \cdot & & & \cdot \\ u_{\nu 1} & u_{\nu 2} & \cdots & u_{\nu\nu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_{1\nu} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ v_{1,\nu-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{11} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1\nu} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & & & \\ D & u_{\nu 2} & u_{\nu 3} & \cdots & u_{\nu\nu} \end{vmatrix},$$

wo D kurz für $D(y_1, y_2, \cdots y_n)$ geschrieben wurde und die Richtigkeit der Gleichung (24) sofort erhellt, wenn man die Gleichungen (14), (15) beachtet, so ist also, abgesehen vom Vorzeichen,

$$(25) \qquad \left|u_{\iota\varkappa}\right|_{(\iota, \varkappa = 1, 2, \cdots \nu)} \cdot v_{1\nu} = D(y_1, y_2, \cdots y_n) \left|u_{h\lambda}\right|_{\begin{pmatrix} h = 1, 2, \cdots \nu-1 \\ \lambda = 2, 3, \cdots \nu \end{pmatrix}}.$$

Ebenso folgt allgemein

$$\left|u_{\iota\varkappa}\right|_{(\iota, \varkappa = 1, 2, \cdots \nu)} \cdot v_{\alpha\beta} = D(y_1, y_2, \cdots y_n) \left|u_{h\lambda}\right|_{\begin{pmatrix} h = 1, \cdots \nu-\alpha, \nu-\alpha+2, \cdots \nu \\ \lambda = 1, \cdots \nu-\beta, \nu-\beta+2, \cdots \nu \end{pmatrix}}.$$

Setzen wir die sich hieraus ergebenden Werthe in die rechte Seite der Gleichung (23) ein, so erhalten wir mit Rücksicht auf den Frankeschen Satz

$$w_{1\varkappa} = [D(y_1, y_2, \cdot \cdot y_n)]^{(n-1)(m-1)-1} \sum_{h=2}^{\nu} \Phi_h v_{\nu-h+1, \nu-\varkappa+1},$$

wo die Φ_h rationale Functionen von x bedeuten, und wenn wir noch die sich aus (α') (S. 141) ergebenden Gleichungen

$$v_{\nu-h+1, \mu} = \psi_{\nu-h+1, 0} v_{1\mu} + \psi_{\nu-h+1, 1} v'_{1\mu} + \cdots + \psi_{\nu-h+1, \nu-1} v^{(\nu-1)}_{1\mu}$$

beachten,

$$(26) \qquad w_{1\varkappa} = [D(y_1, y_2, \cdot \cdot y_n)]^{(n-1)(m-1)-1} \sum_{h=0}^{\nu-1} \Psi_h v^{(h)}_{1, \nu-\varkappa+1}$$
$$(\varkappa = 1, 2, \ldots \nu),$$

wo die Ψ_h ebenfalls rationale Functionen von x sind.

Die Integrale der zu $(A^{(n-m)})$ adjungirten Differentialgleichung gehen aus den

$$w_{11}, w_{12}, \cdots w_{1\nu}$$

durch Division mit

$$\left|u^{(i-1)}_{i\varkappa}\right| = P_\nu \left|u_{i\varkappa}\right| = P_\nu [D(y_1, y_2, \cdot \ldots y_n)]^{(n-1)(m-1)}$$

hervor, die Gleichung (26) enthält also den Satz:

Die lineare Differentialgleichung, welche aus der Adjungirten der $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Differentialgleichung von (A) dadurch hervorgeht, dass man die abhängige Variable dieser Adjungirten mit $D(y_1, y_2, \ldots y_n)$ multiplicirt, gehört mit der m^{ten} Associirten zur selben Art.

In diesem Satze findet die dualistische Beziehung zwischen den Ebenen $(n-m)^{\text{ter}}$ und m^{ter} Stufe des R_{n-1} ihren Ausdruck

Drittes Kapitel.

172. **Transformation der Differentialgleichung. Canonische Form.**

Um den am Schlusse der vorigen Nummer ausgesprochenen Satz und noch einige andere sich an denselben anschliessende Sätze in eleganterer Form darstellen zu können, wenden wir uns jetzt einer principiell wichtigen Betrachtung zu, die mit der Interpretation der $y_1, y_2, \cdot\cdot y_n$ als homogener Punktcoordinaten zusammenhängt.

Da die homogenen Coordinaten eines Punktes nur abgesehen von einem allen gemeinsamen Factor bestimmt sind, so werden wir dieselbe Curve $\mathfrak{C}$ erhalten, wenn wir die Integrale

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \cdot\ \cdot\ y_n(x)$$

sämmtlich mit einem Factor multipliciren, der auch noch eine Function von x sein kann. Dies kommt aber darauf hinaus, dass wir durch die Gleichung

$$(1)\qquad y = \lambda \bar{y},$$

wo λ eine Function von x bedeutet, in die Differentialgleichung (A) (S. 111) eine neue abhängige Variable einführen. Die sich für $\bar{y}$ ergebende, transformirte Differentialgleichung lautet:

$$(\bar{\text{A}})\qquad \bar{y}^{(n)} + \bar{p}_1 \bar{y}^{(n-1)} + \bar{p}_2 \bar{y}^{(n-2)} + \cdots + \bar{p}_n \bar{y} = 0,$$

wo (vergl. Nr. 81, Bd. I, S. 287)

$$(2)\qquad \begin{cases} \bar{p}_1 = p_1 + n \dfrac{\lambda'}{\lambda}, \\ \bar{p}_2 = p_2 + (n-1)\, p_1 \dfrac{\lambda'}{\lambda} + n_2 \dfrac{\lambda''}{\lambda}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \bar{p}_n = p_n + p_{n-1} \dfrac{\lambda'}{\lambda} + \cdot\cdot + \dfrac{\lambda^{(n)}}{\lambda} \end{cases}$$

gesetzt wurde. Zufolge der ersten Gleichung des Systems (2) muss der Factor λ der Gleichung

$$(3)\qquad \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1}{n}(\bar{p}_1 - p_1)$$

genügen, d. h. es muss

$$(4)\qquad \lambda = e^{\frac{1}{n}\int(\bar{p}_1 - p_1)dx}$$

sein. Wir sehen hieraus, dass wir den Coefficienten $\bar{p}_1$ noch willkürlich vorschreiben können, ist dieser aber fixirt, so sind die übrigen Coefficienten der transformirten Differentialgleichung auch vollkommen bestimmt.

Wenn insbesondere $\bar{p}_1$ als rationale Function gewählt wird, so sind die Coefficienten der transformirten Differentialgleichung, falls man λ durch die Gleichung (4) bestimmt, stets rationale Functionen von x, da sich ja nach (3)

$$\frac{\lambda^{(\varkappa)}}{\lambda} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3 \cdots)$$

als rationale Function von x berechnen lässt.

Die Gesammtheit der Transformationen (1), wo λ durch eine Gleichung von der Form (3) mit willkürlichem $\bar{p}_1$ definirt wird, bildet offenbar eine Gruppe. Dieselbe hängt von den Bestimmungsstücken der noch willkürlich zu wählenden Function $\bar{p}_1$ als Parametern ab, sie ist also von wesentlich anderer Beschaffenheit, wie die im neunten Abschnitte betrachteten Gruppen. Denken wir uns z. B. p_1 als rationale Function und die Gradzahlen des Zählers und Nenners von p_1 fixirt, so stellt die Gleichung (1) eine continuirliche Schaar dieser Gruppe dar, die von einer bestimmten endlichen Anzahl von Parametern abhängt. Solcher Schaaren enthält aber unsere Gruppe unendlich viele, während die im neunten Abschnitte untersuchten Gruppen stets nur aus einer endlichen Anzahl continuirlicher Schaaren zusammengesetzt waren Nichtsdestoweniger lassen sich in gewissem Sinne auch für diese Gruppen Differentialinvarianten aufstellen.

Wir können nämlich an Stelle der Gruppe (1) die durch die Gleichungen (2) dargestellte Gruppe von Transformationen der $p_1, p_2, \cdots p_n$ in die $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \cdots \bar{p}_n$ betrachten und fragen nun: giebt es Differentialfunctionen der $p_1, p_2, \cdots p_n$, die formell ungeändert bleiben, wenn man in denselben die $p_1, p_2, \cdots p_n$ durch die $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \cdots \bar{p}_n$ ersetzt?

Bilden wir

$$\mu = e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx}, \quad \bar{\mu} = e^{-\frac{1}{n}\int \bar{p}_1 dx},$$

so ist nach Gleichung (4)

$$\lambda = \frac{\mu}{\bar{\mu}};$$

wenn also

$$y = \mu \mathfrak{y}, \quad \bar{y} = \bar{\mu} \bar{\mathfrak{y}}$$

gesetzt wird, so erhalten wir

$$\mathfrak{y} = \bar{\mathfrak{y}}.$$

In der Differentialgleichung für $\mathfrak{y}$, die wir schon in der Nr. 81 (Bd I, S. 288) kennen gelernt haben, ist der Coefficient der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung gleich Null; dieselbe hat also die Form

$$(\mathfrak{A}) \qquad \mathfrak{y}^{(n)} + \mathfrak{p}_2 \mathfrak{y}^{(n-2)} + \mathfrak{p}_3 \mathfrak{y}^{(n-3)} + \cdot \cdot + \mathfrak{p}_n \mathfrak{y} = 0.$$

Die $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \cdots \mathfrak{p}_n$ sind rationale ganze Functionen der $p_1, p_2, \cdots p_n$ und ihrer Ableitungen; man findet

$$\mathfrak{p}_2 = -\frac{n-1}{2} p_1' - \frac{n-1}{2n} p_1^2 + p_2,$$

$$\mathfrak{p}_3 = -\frac{1}{3} \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} p_1'' + \frac{2}{3n^2} \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} p_1^3 - \frac{n-2}{n} p_1 p_2 + p_3,$$

$$\mathfrak{p}_4 = -\frac{1}{4}(n-1)_3 p_1^{(3)} + \frac{3}{4n}(n-1)_3 p_1'^2 + \frac{3}{2n^2}(n-1)_3 p_1^2 p_1'$$
$$- \frac{3}{4n^3}(n-1)_3 p_1^4 - \frac{1}{n}(n-2)_2 p_1' p_2 + \frac{1}{n^2}(n-2)_2 p_1^2 p_2$$
$$- \frac{n-3}{n} p_1 p_3 + p_4,$$

$$\mathfrak{p}_5 = (n-1)_4 \left\{ -\frac{1}{5} p_1^{(4)} + \frac{2}{n} p_1' p_1'' + \frac{2}{n^2} p_1^2 p_1'' - \frac{4}{n^3} p_1^3 p_1' + \frac{4}{5n^4} p_1^5 \right\}$$
$$+ (n-2)_3 \left\{ -\frac{1}{n} p_1'' p_2 + \frac{3}{n^2} p_1 p_1' p_2 - \frac{1}{n^3} p_1^3 p_2 \right\}$$
$$+ (n-3)_2 \left\{ -\frac{1}{n} p_1' p_3 + \frac{1}{n^2} p_1^2 p_3 \right\} - \frac{n-4}{n} p_1 p_4 + p_5,$$

. . . .

Es sind aber offenbar die $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \cdots \mathfrak{p}_n$ genau dieselben rationalen ganzen Functionen der $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \cdots \bar{p}_n$ und ihrer Ableitungen, also sind es die gesuchten Differentialinvarianten der durch die Gleichungen (2) bei willkürlichem λ dargestellten Gruppe, und wir können sagen, dass die Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) selbst gewissermassen eine Invariante für die Transformationen (1) der Differentialgleichung (A) bildet.

Für diejenigen Betrachtungen, die sich an die Interpretation der $y_1, y_2, \cdot y_n$ als homogener Coordinaten eines Punktes im R_{n-1} anschliessen, werden wir demnach zweckmässig von der Form ($\mathfrak{A}$) der Differentialgleichung als canonischer Form Gebrauch machen können

In Bezug auf diese canonische Form hatten wir bereits in der Nr. 81 (Bd. I, S. 288) gezeigt, dass für dieselbe

1) die Determinante eines jeden Fundamentalsystems gleich einer Constanten,

2) die Determinante jeder Substitution, die ein Fundamentalsystem bei einem Umlaufe der unabhängigen Variabeln erleidet, gleich Eins ist.

Die letztere Eigenschaft können wir auch so ausdrücken, dass wir sagen, die Monodromiegruppe der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) sei unimodular (vergl. a a. O.), oder sie sei eine Untergruppe der speciellen linearen Gruppe $\bar{L}$ (Nr. 156, S. 92). Es ist aber auch die Transformationsgruppe von ($\mathfrak{A}$) entweder die specielle lineare Gruppe $\bar{L}$ selbst oder doch in $\bar{L}$ als Untergruppe enthalten In der That ist ja offenbar

$$D(y_1, y_2, \cdots y_n)$$

eine Differentialfunction, die bei den Transformationen von $\bar{L}$ und auch nur bei diesen linearen Transformationen ungeändert bleibt; die Transformationsgruppe einer Differentialgleichung (A) mit rationalen Coefficienten und dem Fundamentalsysteme $y_1, y_2, \cdots y_n$ wird also dann und nur dann eine Untergruppe von $\bar{L}$ (beziehungsweise $\bar{L}$ selbst) sein, wenn

$$D(y_1, y_2, \cdots y_n) = \text{const.}\, e^{-\int p_1 dx}$$

rational in x, d. h. wenn der Coefficient p_1 der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung die logarithmische Ableitung einer rationalen Function ist. Das letztere ist ja aber der Fall, wenn dieser Coefficient wie in ($\mathfrak{A}$) den Werth Null hat.

Beiläufig bemerken wir, dass sich demnach durch eine Transformation von der Form (1) jede lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten in eine solche transformiren lässt, deren Transformationsgruppe eine unimodulare ist; man braucht zu dem Ende λ nur durch die Gleichung (4) zu bestimmen, nachdem man für $\bar{p}_1$ die logarithmische Ableitung irgend einer rationalen Function gesetzt hat.

173. Integralquotienten. Associirte Differentialgleichungen für die canonische Form.

Bei Anwendung der Transformation (1) bleibt der Quotient irgend zweier particularer Integrale der Differentialgleichung (A) ungeändert. Wir schliessen daraus, dass die linke Seite der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) nur von den Integralquotienten, nicht wie im Allgemeinen von den Integralen eines Fundamentalsystems selbst abhängen kann. Dies bestätigt sich sehr einfach, indem wir beachten, dass, wenn

$$y_\varkappa = \mu\, \mathfrak{y}_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

gesetzt wird, so dass also

$$\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n$$

ein Fundamentalsystem von ($\mathfrak{A}$) bedeutet, zufolge der Gleichung (12) der Nr. 22 (Bd. I, S. 60)

$$D(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n) = \mathfrak{y}_1^n D\left(1, \frac{\mathfrak{y}_2}{\mathfrak{y}_1}, \cdot \cdot \frac{\mathfrak{y}_n}{\mathfrak{y}_1}\right) \tag{5}$$

ist. Setzen wir also die Quotienten

$$\frac{\mathfrak{y}_\varkappa}{\mathfrak{y}_1} = \frac{y_\varkappa}{y_1} = \eta_{\varkappa-1} \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdot \; n), \tag{6}$$

und bezeichnen den constanten Werth der Determinante (5) durch c, so ist

$$\mathfrak{y}_1^n = \frac{c}{D(\eta_1', \eta_2', \quad \eta_{n-1}')}, \tag{7}$$

da offenbar

$$D\left(1, \frac{\mathfrak{y}_2}{\mathfrak{y}_1}, \cdot \cdot \frac{\mathfrak{y}_n}{\mathfrak{y}_1}\right) = \begin{vmatrix} \eta_1' & \eta_2' & \cdots \eta_{n-1}' \\ \eta_1'' & \eta_2'' & \cdot\cdot \; \eta_{n-1}'' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_1^{(n-1)} & \eta_2^{(n-1)} & \cdots \eta_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

ist.

Also ist, abgesehen von einem constanten Factor, ein Fundamentalsystem von ($\mathfrak{A}$) und damit diese Differentialgleichung selbst bestimmt, wenn die $(n-1)$ Integralquotienten (6) von ($\mathfrak{A}$) oder (A) bekannt sind. Die Betrachtung der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) an Stelle der allgemeinen (A) kommt somit darauf hinaus, dass wir statt eines Fundamentalsystems von Integralen ein — so wollen wir uns ausdrücken — Fundamentalsystem von Integralquotienten (6) untersuchen. Hierin liegt die principielle Bedeutung der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$).

Bemerken wir ferner, dass die Eigenschaft 1) der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) für die Form derselben auch charakteristisch ist. In der That folgt daraus, dass die Determinante eines Fundamentalsystems $y_1, y_2, \cdot\cdot y_n$ einer Differentialgleichung (A) gleich einer Constanten ist,

$$e^{-\int p_1 dx} = \text{const.},$$

also $p_1 = 0$, d. h. der Coefficient der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung verschwindet. Wir schliessen hieraus, dass, wenn in einer Differentialgleichung der Coefficient der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung verschwindet, dies auch nothwendig für die adjungirte Differentialgleichung der Fall sein muss, ein Ergebniss, welches übrigens auch unmittelbar aus der expliciten Form des adjungirten Differentialausdruckes (Nr. 24, Bd I, S. 69) abzulesen ist.

Denken wir uns nun für die Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) die associirten Differentialgleichungen der verschiedenen Stufen aufgestellt, indem wir dabei die für (A) eingeführten Bezeichnungen festhalten und nur statt der lateinischen Buchstaben deutsche schreiben.

Dann ist zunächst die erste associirte Differentialgleichung von ($\mathfrak{A}$) mit der zu ($\mathfrak{A}$) adjungirten Differentialgleichung identisch, und das Theorem der Nr. 171 (S. 144) lässt sich einfach so aussprechen:

Die Adjungirte der $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Differentialgleichung von (A) gehört mit der m^{ten} Associirten zur selben Art

Wir wollen zwei Fundamentalsysteme der $(n-m)^{\text{ten}}$ und der m^{ten} associirten Differentialgleichung dann als einander entsprechende bezeichnen, wenn das eine aus dem adjungirten des anderen durch die die Artbeziehung darstellenden Relationen hervorgeht. Offenbar sind dann diejenigen Fundamentalsysteme von $(\mathfrak{A}^{(n-m)})$ und $(\mathfrak{A}^{(m)})$ einander entsprechend, die einem und demselben Fundamentalsysteme von ($\mathfrak{A}$) entsprechen, d. h. also z B.

$$\mathfrak{u}_{11}, \mathfrak{u}_{12}, \cdots \mathfrak{u}_{1\nu} \quad \text{und} \quad \mathfrak{v}_{1\nu}, \mathfrak{v}_{1\,\nu-1}, \cdots \mathfrak{v}_{11}.$$

Diese Fundamentalsysteme sind demnach contragredient und es gelten für dieselben die allgemeinen, in der Nr. 169 (S. 138) für derartige Systeme aufgestellten Sätze. Es ist also

$$\sum_{\varkappa=1}^{\nu} \mathfrak{u}_{1\varkappa}^{(\alpha)} \mathfrak{v}_{1,\,\nu-\varkappa+1}^{(\beta)}$$

für irgendwelche nicht negativen, ganzzahligen Werthe der α, β gleich einer rationalen Function von x. Beispiele hierfür liefern die Relationen (14), (15) der Nr. 170 (S. 141).

In Bezug auf die associirte Differentialgleichung $(\mathfrak{A}^{(n-m)})$ ist noch zu bemerken, dass für dieselbe der Coefficient der $(\nu-1)^{\text{ten}}$ Ableitung im Allgemeinen zwar nicht verschwindet, aber jedenfalls gleich der logarithmischen Ableitung einer rationalen Function wird. In der That ist

$$\left|\mathfrak{u}_{i\varkappa}\right|_{(i,\varkappa=1,2,\cdots\nu)} = [D(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n)]^{(n-1)(m-1)} = \text{const.},$$

und folglich nach Gleichung (22) Nr. 171 (S. 143)

$$D(\mathfrak{u}_{11}, u_{12}, \cdots \mathfrak{u}_{1\nu}) = \Phi_m,$$

wo Φ_m eine rationale Function von x bedeutet. Es sind also auch für die associirten Differentialgleichungen von ($\mathfrak{A}$) Transformations- und Monodromiegruppen unimodular.

Wenn in einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung der Coefficient der $(n-1)^{ten}$ Ableitung zwar nicht Null, aber gleich der logarithmischen Ableitung einer rationalen Function ist, so bleiben die für die Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) eben abgeleiteten Sätze dennoch bestehen, d. h. es sind dann auch in den $(n-m)^{ten}$ associirten Differentialgleichungen die Coefficienten der $(\nu-1)^{ten}$ Ableitung logarithmische Ableitungen rationaler Functionen, und die Adjungirte der $(n-m)^{ten}$ Associirten gehört mit der m^{ten} Associirten zur selben Art. Von dieser Bemerkung werden wir später Gebrauch zu machen haben.

Es lassen sich noch zahlreiche Sätze über die associirten Differentialgleichungen aufstellen, namentlich solche, die sich auf die Associirten der Associirten beziehen, z. B. Beziehungen zwischen den Associirten einer Differentialgleichung und denen ihrer Adjungirten. Allgemein gilt der von Herrn Forsyth aufgestellte Satz, dass das System der abhängigen Variablen der zu einer Differentialgleichung associirten Differentialgleichungen insofern ein in sich abgeschlossenes ist, als durch Bildung von Associirten der associirten Differentialgleichungen immer nur solche abhängige Variable auftreten, die durch die Elemente jenes Systems ganz und rational darstellbar sind. Wir begnügen uns mit diesem flüchtigen Hinweise, indem wir bemerken, dass die genaue Formulirung und Herleitung dieser Sätze insofern keine wesentlichen Schwierigkeiten darbietet, als dieselben auf bekannten Determinantensätzen (vergl. die Abhandlung Franke's im Bd 61 des Crelle'schen Journals) beruhen. Wir haben uns auf die Darlegung derjenigen Beziehungen beschränkt, die bis jetzt bei speciellen Problemen Anwendung gefunden haben, und wollen jetzt ebenfalls mit Rücksicht auf solche Anwendungen noch eine etwas allgemeinere Formulirung der auf die associirten Differentialgleichungen bezüglichen Untersuchungen vorführen.

174. Verallgemeinerung des Begriffes der associirten Differentialgleichungen. Associirte Arten und Gruppen.

Wir wollen der einfacheren Ausdrucksweise wegen von vorneherein annehmen, dass in der Differentialgleichung (A) der Coefficient p_1 der $(n-1)^{ten}$ Ableitung die logarithmische Derivirte einer rationalen Function sei. Dann ist also die Determinante eines Fundamentalsystems eine rationale Function, und Transformations- sowie Monodromiegruppe sind unimodular

Diese Eigenschaft bleibt nun erhalten, wenn wir von der Differentialgleichung (A) durch eine Beziehung

(C) $$z = r_0 y + r_1 y' + \cdots + r_{n-1} y^{(n-1)} = R(y)$$

zu einer Differentialgleichung (B) derselben Art übergehen. Denn wenn $y_1, y_2, \cdots y_n$; $z_1, z_2, \cdots z_n$ entsprechende Fundamentalsysteme von (A) und (B) sind, also die Gleichungen

$$z_\varkappa = r_0 y_\varkappa + r_1 y_\varkappa' + \cdots + r_{n-1} y_\varkappa^{(n-1)}$$

und die daraus durch Differentiation und Anwendung der Differentialgleichung (A) folgenden

$$z_\varkappa^{(\lambda)} = r_{\lambda 0} y_\varkappa + r_{\lambda 1} y_\varkappa' + \cdots + r_{\lambda\, n-1} y_\varkappa^{(n-1)} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n-1)$$

bestehen, so ist

$$D(z_1, z_2, \cdots z_n) = \underset{(i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)}{\left| r_{i-1, \varkappa-1} \right|} D(y_1, y_2, \cdots y_n),$$

wo

$$r_{0, \varkappa-1} = r_{\varkappa-1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

gesetzt wurde, d. h. es ist auch in (B) die Determinante des Fundamentalsystems rational.

Mögen nun n mit (A) zur selben Art gehörige Differentialgleichungen

($^\lambda$A) $${}^\lambda y^{(n)} + {}^\lambda p_1 {}^\lambda y^{(n-1)} + \cdots + {}^\lambda p_n {}^\lambda y = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n)$$

vorgelegt sein, die mit (A) durch die Beziehungen

($^\lambda$C) $${}^\lambda y = {}^\lambda r_0 y + {}^\lambda r_1 y' + \cdots + {}^\lambda r_{n-1} y^{(n-1)} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n)$$

verknüpft und von der n^{ten} Ordnung sind. Seien ferner die rationalen Functionen, welche die Coefficienten der Gleichungen ($^\lambda$C) bilden, so beschaffen, dass die Determinante

(1) $$\underset{(i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)}{\left| {}^i r_{\varkappa-1} \right|} \neq 0$$

ist, dann lassen sich die Gleichungen ($^\lambda$C) nach $y, y', \cdots y^{(n-1)}$ auflösen, und es ist folglich die abhängige Variable z jeder mit (A) zur selben Art gehörigen Differentialgleichung ebenso wie jede Ableitung von z homogen linear mit rationalen Coefficienten durch die

$${}^1 y, {}^2 y, \cdots {}^n y$$

darstellbar.

Sei $y_1, y_2, \cdots y_n$ ein Fundamentalsystem von (A) und

(2) $${}^\lambda y_\varkappa = {}^\lambda r_0 y_\varkappa + {}^\lambda r_1 y_\varkappa' + \cdots + {}^\lambda r_{n-1} y_\varkappa^{(n-1)} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots n),$$

dann bilden die

$${}^\lambda y_1, {}^\lambda y_2, \cdots {}^\lambda y_n$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $({}^{\lambda}A)$ und es ist

(3) $$\left|{}^{\lambda}y_{\varkappa}\right| = \left|{}^{\lambda}r_{\varkappa-1}\right| \cdot \left|y_{\varkappa}^{(\lambda-1)}\right| \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots n),$$

also zufolge der Ungleichung (1)

(4) $$D = \left|{}^{\lambda}y_{\varkappa}\right| \neq 0 \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots n).$$

Bilden wir die sämmtlichen Subdeterminanten m^{ter} Ordnung der Determinante D

$$\mathfrak{U}_{\iota\varkappa} \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, \cdots \nu;\ \nu = n_m),$$

wobei die Indexbezeichnung so gewählt sein mag, dass wenn

$$\mathfrak{U}_{\iota\varkappa} = \left|{}^{\lambda}y_{\mu}\right| \qquad \begin{pmatrix}\lambda = \iota_1, \iota_2, \cdots \iota_m \\ \mu = \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_m\end{pmatrix}$$

gesetzt wird, bei denjenigen $\mathfrak{U}_{\iota\varkappa}$, die denselben ersten Index ι haben, die Zahlen $\iota_1, \iota_2, \cdots \iota_m$ dieselben sind, während bei den $\mathfrak{U}_{\iota\varkappa}$ mit demselben zweiten Index $\varkappa$ die Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_m$ übereinstimmen Wir wollen auch gleich

$$\mathfrak{U}_{\iota} = \left|{}^{\lambda}\mathfrak{y}_{\mu}\right| \qquad \begin{pmatrix}\lambda = \iota_1, \iota_2, \cdots \iota_m \\ \mu = 1, 2, \cdots m\end{pmatrix}$$

setzen, wo

(5) $${}^{\lambda}\mathfrak{y}_{\mu} = {}^{\lambda}r_0 \mathfrak{y}_{\mu} + {}^{\lambda}r_1 \mathfrak{y}_{\mu}' + \cdots + {}^{\lambda}r_{n-1} \mathfrak{y}_{\mu}^{(n-1)} \qquad (\mu = 1, 2, \cdots m),$$

und $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_m$ irgend m linear unabhängige Integrale von (A) sind

Zufolge des oft benutzten Satzes über die Subdeterminanten componirter Systeme ist alsdann

(6) $$\left|{}^{\iota}y_{\varkappa}\right| = \sum_{(h_1, h_2, \cdots h_m)} \left|{}^{\iota}r_{h-1}\right| \left|y_{\varkappa}^{(h-1)}\right| \qquad \begin{pmatrix}\iota = \iota_1, \iota_2, \cdots \iota_m \\ \varkappa = \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_m \\ h = h_1, h_2, \cdots h_m\end{pmatrix}$$

und allgemein

(7) $$\left|{}^{\iota}\mathfrak{y}_{\varkappa}\right| = \sum_{(h_1, h_2, \cdots h_m)} \left|{}^{\iota}r_{h-1}\right| \left|\mathfrak{y}_{\varkappa}^{(h-1)}\right| \qquad \begin{pmatrix}\iota = \iota_1, \iota_2, \cdots \iota_m \\ \varkappa = 1, 2, \cdots m \\ h = h_1, h_2, \cdots h_m\end{pmatrix},$$

wo sich die Summenzeichen auf alle ν möglichen Combinationen $h_1, h_2, \cdots h_m$ der Zahlen $1, 2, \cdots n$ zu je m beziehen Die Gleichungen (7) lassen sich in der Form

(7a) $$\mathfrak{U}_{\iota} = \sum_{\lambda=1}^{\nu} \overline{R}_{\iota\lambda} u_{\lambda} \qquad (\iota = 1, 2, \cdots \nu)$$

darstellen, oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (α) der Nr. 167 (S. 127) in der Form

(8) $$\mathfrak{U}_i = R_{i0} u_1 + R_{i1} u_1' + \cdots + R_{i,\nu-1} u_1^{(\nu-1)},$$

wo die $\overline{R}_{i\varkappa}$ sowohl wie die $R_{i\varkappa}$ rationale Functionen von x bedeuten; dies besagt aber:

Die Grössen $\mathfrak{U}_i$ genügen für jede Wahl des Integralsystems $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_m$ einer homogenen linearen Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung $(\mathrm{A}_i^{(n-m)})$; diese Differentialgleichungen gehören für alle Werthe $i = 1, 2, \cdots \nu$ mit der $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Differentialgleichung $(\mathrm{A}^{(n-m)})$ von (A) zur selben Art, und im Allgemeinen bilden die Determinanten

$$\mathfrak{U}_{i1}, \mathfrak{U}_{i2}, \cdots \mathfrak{U}_{i\nu}$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $(\mathrm{A}_i^{(n-m)})$.

Die letztere Aussage ergiebt sich daraus, dass zufolge der Gleichungen (7) die Gleichung (8) befriedigt wird, wenn man an die Stelle von $\mathfrak{U}_i$ setzt $\mathfrak{U}_{i\varkappa}$ und zugleich an die Stelle von u_1 das particulare Integral $u_{1\varkappa}$ von $(\mathrm{A}^{(n-m)})$

Aus dem eben bewiesenen Satze folgt als besonderer Fall der nachstehende Satz:

Die $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Differentialgleichungen aller zu einer und derselben Art gehörigen Differentialgleichungen gehören ebenfalls zu einer und derselben Art; wir wollen diese die $(n-m)^{\text{te}}$ associirte Art der ursprünglichen Art nennen.

Wenn, wie wir es voraussetzten, in den Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung der durch (A) bestimmten Art die Coefficienten der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitungen die logarithmischen Derivirten rationaler Functionen sind, so ist also die allen diesen Differentialgleichungen gemeinsame Transformationsgruppe H unimodular; wir sagen dann kurz, die Art selbst sei unimodular. Offenbar ist dann auch die $(n-m)^{\text{te}}$ associirte Art unimodular, und es gehört demnach insbesondere die adjungirte Differentialgleichung jeder mit (A) zur selben Art gehörigen Differentialgleichung in die erste associirte Art. Wir haben folglich den Satz:

Die sämmtlichen adjungirten Differentialgleichungen der zu einer unimodularen Art gehörigen Differentialgleichungen gehören selbst wieder zu einer Art, und es ist dann offenbar auch umgekehrt jede zu dieser „adjungirten" Art gehörige

Differentialgleichung die adjungirte einer Differentialgleichung der ursprünglichen Art.

Hieraus folgt auf Grund des Satzes der Nr. 173 (S. 150):

Die Differentialgleichungen der $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten und der m^{ten} associirten Art sind einander paarweise adjungirt.

Bei den vorhergehenden Betrachtungen haben wir stillschweigend die Voraussetzung gemacht, dass die $(n-m)^{\text{te}}$ associirte Differentialgleichung $(A^{(n-m)})$ der zum Ausgangspunkte gewählten Differentialgleichung auch wirklich von der ν^{ten} Ordnung sei, denn nur wenn dies der Fall ist, können wir durch dieselbe die $(n-m)^{\text{te}}$ associirte Art definiren (vergl. Nr. 163, S. 115). Im Anschlusse hieran bemerken wir, dass der Fall, dass eine der Differentialgleichungen $(A_\iota^{(n-m)})$ von niedrigerer als der ν^{ten} Ordnung wird, nur dann eintreten kann, wenn die $(n-m)^{\text{te}}$ associirte Art reductibel ist. So können wir uns nämlich ausdrücken, da wir nach dem in der Nr. 165 (S 120) bewiesenen Fuchs'schen Satze wissen, dass, wenn eine Differentialgleichung der Art reductibel ist, dies auch für jede Differentialgleichung der Art gelten muss. Die Reductibilität der $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Art hängt wesentlich ab von der Structur der zur Transformationsgruppe H von (A) gehörigen $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Gruppe $H^{(n-m)}$ (vergl Nr. 169, S. 136).

Es ist nämlich nach den Sätzen der Nr. 161 (S. 106) die $(n-m)^{\text{te}}$ associirte Art dann und nur dann reductibel, wenn die Gruppe $H^{(n-m)}$ in dem a. a. O. fixirten Sinne reductibel ist.

Eine lineare Differentialgleichung ist stets mit ihrer adjungirten gleichzeitig reductibel oder irreductibel (Nr 27, Bd I, S. 85); wenn also die Differentialgleichung (A) irreductibel ist, so ist auch die ganze durch dieselbe definirte Art und zugleich ihre erste associirte Art irreductibel. Dagegen kann es sich ereignen, dass eine der anderen $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Arten (für $m < n-1$) reductibel wird, wenn auch die ursprüngliche Art irreductibel ist. Jedenfalls wissen wir:

Die $(n-m)^{\text{te}}$ associirte und die m^{te} associirte Art sind stets gleichzeitig irreductibel oder reductibel.

Während die Differentialgleichungen der ersten associirten Art (oder was dasselbe heisst, der adjungirten Art) stets Adjungirte von Differentialgleichungen der ursprünglichen Art sind, kann es unter den Differentialgleichungen der $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Art im Allgemeinen (für $1 < m < n-1$) solche geben, die weder $(n-m)^{\text{te}}$ Associirte einer Differentialgleichung der ursprünglichen Art sind, noch auch durch Determinanten von der Form $\mathfrak{U}_\iota$ befriedigt werden

In der That sind die abhängigen Variabeln derjenigen Differentialgleichungen der $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Art, die durch Determinanten der Form $\mathfrak{U}_\iota$ befriedigt werden, mit u_1 und seinen Ableitungen durch Gleichungen von der Form (8) verknüpft, wo die Coefficienten

$$(9) \qquad R_{\iota 0},\ R_{\iota 1},\ \cdots R_{\iota,\nu-1}$$

aus den Coefficienten der Gleichungen (α) (S. 127) und den Coefficienten

$$(10) \qquad \overline{R}_{\iota 1},\ \overline{R}_{\iota 2},\ \cdots \overline{R}_{\iota\nu}$$

der Gleichungen (7a) in ganz bestimmter Weise zusammengesetzt sind. Die Grössen (10) sind aber gewisse Subdeterminanten m^{ter} Ordnung der Determinante n^{ter} Ordnung

$$\left|{}^{\iota}r_{h-1}\right| \qquad (\iota, h = 1, 2, \cdots n)$$

und genügen als solche im Allgemeinen gewissen algebraischen Relationen von ähnlicher Beschaffenheit, wie etwa die Relation (γ) (S. 139) zwischen den homogenen Coordinaten einer geraden Linie im gewöhnlichen Raume. Diese algebraischen Beziehungen zwischen den Grössen (10) haben wieder algebraische Beziehungen zwischen den Coefficienten (9) zur Folge.

Eine Differentialgleichung der $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Art wird also dann und nur dann durch Functionen von der Form $\mathfrak{U}_\iota$ befriedigt werden können, wenn ihre abhängige Variable in der Gestalt

$$(11) \qquad R_0 u_1 + R_1 u_1' + \cdots + R_{\nu-1} u_1^{(\nu-1)}$$

darstellbar ist, wo die rationalen Functionen $R_0, R_1, \cdots R_{\nu-1}$ jenen für die Grössen (9) geltenden algebraischen Beziehungen Genüge leisten. Diese Differentialgleichungen erschöpfen also im Allgemeinen nicht die ganze $(n-m)^{\text{te}}$ associirte Art, sondern bilden innerhalb derselben nur einen gewissen Typus und zwar, wie wir sagen können, einen algebraischen Typus, da er durch gewisse algebraische Beziehungen zwischen den Coefficienten des Ausdruckes (11) charakterisirt wird.

Denken wir uns nun, die $(n-m)^{\text{te}}$ associirte Art sei reductibel; dann giebt es Differentialgleichungen der Art, die von niedrigerer als der ν^{ten} Ordnung sind. Möge der vorhin charakterisirte Typus eine solche Differentialgleichung von niedrigerer, etwa $\mu(<\nu)^{\text{ter}}$ Ordnung enthalten, und seien die Determinanten $\mathfrak{U}_{\iota 1}, \mathfrak{U}_{\iota 2}, \cdots \mathfrak{U}_{\iota\nu}$ diejenigen, die jener Differentialgleichung Genüge leisten Dann bestehen also zwischen diesen ν Determinanten $\nu-\mu$ homogene, lineare Relationen mit constanten Coefficienten, und diese drücken gewisse Eigenschaften der Differentialgleichung (A) aus. Herr Fuchs hat gezeigt, dass z. B. die von Herrn Weierstrass aufgestellten Beziehungen zwischen den

Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung sich ergeben als eine derartige Eigenschaft von gewissen linearen, homogenen Differentialgleichungen, die wir später kennen lernen werden.

175.* Differentialgleichungen von gerader Ordnung. Untersuchungen von Fuchs. Betrachtung einer gewissen quadratischen Form. Differentialgleichungen, die mit ihren Adjungirten zur selben Art gehören.

Mit Rücksicht auf die am Schlusse der vorigen Nummer erwähnten Anwendungen gehen wir auf den Fall noch etwas genauer ein, wo die Ordnung der Differentialgleichung (A) eine gerade Zahl

$$n = 2m$$

ist

Wir hatten bereits bemerkt (Nr. 170, S. 142), dass alsdann die beiden Differentialgleichungen $(A^{(n-m)})$ und $(A^{(m)})$ zusammenfallen. Wenn wir also die durch (A) charakterisirte Art als eine unimodulare voraussetzen, so ist in diesem Falle die m^{te} associirte Art mit ihrer adjungirten identisch, oder kürzer ausgesprochen, die m^{te} associirte Art ist sich selbst adjungirt.

Wir knüpfen unsere Betrachtungen an die zu der Differentialgleichung (A) gehörige Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$), in der der Coefficient der $(n-1)^{ten}$ Ableitung verschwindet. Die quadratische Form (20) der Nr. 170 (S. 142) ist also (wenn wir für ($\mathfrak{A}$) die Grössen, welche für (A) mit lateinischen Buchstaben bezeichnet wurden, durch die entsprechenden deutschen Buchstaben darstellen)

$$(1) \qquad \mathfrak{Z}(\mathfrak{u}) = \sum_{\alpha=0}^{\nu-1} \sum_{\beta=0}^{\nu-1} \mathfrak{P}_{\alpha\beta} \mathfrak{u}^{(\alpha)} \mathfrak{u}^{(\beta)} = \text{const}, \quad (\mathfrak{P}_{\alpha\beta} = \mathfrak{P}_{\beta\alpha}),$$

für jedes Integral $\mathfrak{u}$ der m^{ten} associirten Differentialgleichung

$$(\mathfrak{A}^{(m)}) \qquad \overset{m}{\mathfrak{P}}(\mathfrak{u}) = \mathfrak{u}^{(\nu)} - (\mathfrak{R}_1 \mathfrak{u}^{(\nu-1)} + \cdot \ \cdot + \mathfrak{R}_\nu \mathfrak{u}) = 0.$$

Der Werth der Constanten im dritten Gliede der Gleichung (1) hängt von der Wahl des Integrals $\mathfrak{u}$ ab

Wir wissen, dass die zu $(\mathfrak{A}^{(m)})$ adjungirte Differentialgleichung mit $(\mathfrak{A}^{(m)})$ zur selben Art gehören muss, es wird sich also (vergl. Nr. 21, Bd. I, S. 59) jeder Multiplicator der Differentialgleichung $(\mathfrak{A}^{(m)})$ als homogene, lineare Function von

$$\mathfrak{u}, \ \mathfrak{u}', \ \cdot \cdot \ \mathfrak{u}^{(\nu-1)}$$

mit in x rationalen Coefficienten darstellen lassen, wenn für $\mathfrak{u}$ ein geeignetes Integral von $(\mathfrak{A}^{(m)})$ genommen wird. Herr **Fuchs**, der die quadratische Form (1) zuerst betrachtet hat und dessen Untersuchungen wir im Folgenden darzulegen haben, hat nun den folgenden merkwürdigen Satz aufgestellt:

Die partielle Ableitung der Form $\mathfrak{Z}$ nach der $(\nu-1)^{\text{ten}}$ Derivirten von $\mathfrak{u}$ stellt, wenn man für $\mathfrak{u}$ irgend eine Lösung von $(\mathfrak{A}^{(m)})$ einsetzt, einen Multiplicator von $(\mathfrak{A}^{(m)})$ dar.

In der That, differentiiren wir die Form $\mathfrak{Z}$ nach x, so kommt

$$(2) \qquad \frac{d\mathfrak{Z}}{dx} = \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial \mathfrak{u}^{(\nu-1)}}\mathfrak{u}^{(\nu)} + \mathfrak{R},$$

wo $\mathfrak{R}$ eine quadratische Form der

$$\mathfrak{u},\ \mathfrak{u}',\ \cdots \mathfrak{u}^{(\nu-1)}$$

mit rationalen Coefficienten bedeutet. Setzen wir hierin für $\mathfrak{u}^{(\nu)}$ seinen aus der Differentialgleichung $(\mathfrak{A}^{(m)})$ sich ergebenden Werth

$$\mathfrak{u}^{(\nu)} = \mathfrak{R}_1\mathfrak{u}^{(\nu-1)} + \cdots + \mathfrak{R}_\nu \mathfrak{u}$$

ein, so ist, da $\mathfrak{Z}$ für jede Lösung $\mathfrak{u}$ von $(\mathfrak{A}^{(m)})$ einen constanten Werth hat,

$$(3) \qquad 0 = \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial \mathfrak{u}^{(\nu-1)}}\left(\mathfrak{R}_1\mathfrak{u}^{(\nu-1)} + \cdots + \mathfrak{R}_\nu \mathfrak{u}\right) + \mathfrak{R}.$$

Diese Gleichung muss für jedes Integral von $(\mathfrak{A}^{(m)})$ und für jeden Werth von x erfüllt sein; sie stellt also eine Beziehung zwischen

$$(4) \qquad x,\ \mathfrak{u},\ \mathfrak{u}',\ \cdots \mathfrak{u}^{(\nu-1)}$$

dar. Bedeutet aber x eine reguläre Stelle der Differentialgleichung $(\mathfrak{A}^{(m)})$, so können wir (Nr. 9, Bd. I, S. 25) die Werthe eines Integrals und seiner $(\nu-1)$ ersten Ableitungen an dieser Stelle willkürlich vorschreiben, es kann also zwischen den Grössen (4) keine Beziehung bestehen. Wir schliessen hieraus, dass die Gleichung (3) für jede Function $\mathfrak{u}$ von x identisch erfüllt sein muss.

Subtrahiren wir also die Gleichung (3) von (2), so erhalten wir, wenn wir an Stelle von $\mathfrak{u}$ den Buchstaben t schreiben und

$$(5) \qquad \mathfrak{M}(t) = \frac{\partial \mathfrak{Z}(t)}{\partial t^{(\nu-1)}} = 2\left\{\mathfrak{P}_{0,\nu-1}t + \mathfrak{P}_{1,\nu-1}t' + \cdot + \mathfrak{P}_{\nu-1,\nu-1}t^{(\nu-1)}\right\}$$

setzen, die für jede Function t von x identisch bestehende Beziehung

$$(6) \qquad \frac{d\mathfrak{Z}(t)}{dx} = \mathfrak{M}(t)\overset{m}{\mathfrak{P}}(t).$$

Setzen wir*) $t + \mathfrak{u}$ an die Stelle von t, wo $\mathfrak{u}$ irgend eine Lösung der Differentialgleichung $(\mathfrak{A}^{(m)})$ bedeutet, so ist:

$$\mathfrak{Z}(t+\mathfrak{u}) = \mathfrak{Z}(t) + \mathfrak{Z}(u) + B(t, \mathfrak{u}),$$

$B(t, \mathfrak{u})$ ein in t, $\mathfrak{u}$ bilinearer Differentialausdruck $(\nu - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung, und ferner

$$\mathfrak{M}(t+\mathfrak{u}) = \mathfrak{M}(t) + \mathfrak{M}(\mathfrak{u})$$

$$\overset{m}{\mathfrak{P}}(t+\mathfrak{u}) = \overset{m}{\mathfrak{P}}(t) + \overset{m}{\mathfrak{P}}(\mathfrak{u}) = \overset{m}{\mathfrak{P}}(t).$$

Also folgt aus der Gleichung (6) durch Substitution von $t + \mathfrak{u}$ an Stelle von t

$$\frac{d\mathfrak{Z}(t)}{dx} + \frac{dB(t, \mathfrak{u})}{dx} = \overset{m}{\mathfrak{P}}(t)(\mathfrak{M}(\mathfrak{u}) + \mathfrak{M}(t)),$$

da ja wegen (1)

$$\frac{d\mathfrak{Z}(\mathfrak{u})}{dx} = 0$$

ist, oder mit Rücksicht auf (6)

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{u})\ \overset{m}{\mathfrak{P}}(t) = \frac{d}{dx}(B(t, \mathfrak{u})).$$

Dies besagt aber, dass die linke Seite $\overset{m}{\mathfrak{P}}(t)$ der Differentialgleichung $(\mathfrak{A}^{(m)})$, wenn man dieselbe mit der Function $\mathfrak{M}(\mathfrak{u})$ multiplicirt, gleich der Ableitung eines linearen Differentialausdruckes $(\nu - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung von t wird, und daraus folgt nach Nr. 20 (Bd. I, S. 53), dass

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{u}) = \frac{\partial \mathfrak{Z}(\mathfrak{u})}{\partial \mathfrak{u}^{(\nu-1)}}$$

ein Multiplicator der Differentialgleichung $(\mathfrak{A}^{(m)})$ ist, was zu beweisen war.

Aus der Gleichung (6) schliessen wir, dass die Form $\mathfrak{Z}(t)$ dann und nur dann einen von x unabhängigen Werth annimmt, wenn t entweder eine Lösung der Differentialgleichung $(\mathfrak{A}^{(m)})$ oder eine Lösung der Differentialgleichung $(\nu - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung

(7) $$\mathfrak{M}(t) = 0$$

darstellt Auf Grund dieser Bemerkung kann man die quadratische Form $\mathfrak{Z}$ als eine Summe von Quadraten linearer Functionen der Grössen

$$t,\ t',\ \cdot\cdot\ t^{(\nu-1)}$$

darstellen, in welcher jedes dieser Quadrate von jenen Grössen eine weniger enthält, wie das ihm unmittelbar vorangehende

Setzen wir nämlich

(8) $$\mathfrak{Z}(t) = \frac{1}{4\mathfrak{P}_{\nu-1,\,\nu-1}}\mathfrak{M}(t)^2 + \mathfrak{Z}_1(t),$$

*) Nach einer mündlichen Bemerkung des Herrn Hamburger vom 21 November 1888.

so ist, zufolge der Gleichungen (5) und (1), $\mathfrak{Z}_1(t)$ eine quadratische Form der Grössen

$$t, \; t', \; \ldots \; t^{(\nu-2)}$$

mit in x rationalen Coefficienten.

Bilden wir nun

$$\frac{d\mathfrak{Z}_1(t)}{dx} = \frac{\partial \mathfrak{Z}_1(t)}{\partial t^{(\nu-2)}} t^{(\nu-1)} + \overline{\mathfrak{R}}$$

und beachten, dass $\mathfrak{Z}(t)$ gleich einer Constanten wird, wenn wir für t eine Lösung der Gleichung (7) nehmen, so erkennen wir zunächst nach Gleichung (8), dass für eine solche Lösung t auch $\mathfrak{Z}_1(t)$ einen von x unabhängigen Werth erhält, so dass also

$$(9) \qquad 0 = -\frac{\partial \mathfrak{Z}_1(t)}{\partial t^{(\nu-2)}} \left\{ \frac{\mathfrak{P}_{0,\,\nu-1}}{\mathfrak{P}_{\nu-1,\,\nu-1}} t + \cdots + \frac{\mathfrak{P}_{\nu-2,\,\nu-1}}{\mathfrak{P}_{\nu-1,\,\nu-1}} t^{(\nu-2)} \right\} + \overline{\mathfrak{R}}$$

wird, wenn t irgend eine Lösung von (7) bedeutet. Nun ist aber $\overline{\mathfrak{R}}$ eine homogene, ganze Function von

$$t, \; t', \; \ldots \; t^{(\nu-2)},$$

wir schliessen also ähnlich wie oben für die Gleichung (3), dass die Gleichung (9) für jede Function t von x identisch erfullt sein muss. Hieraus folgt nun wieder, ähnlich wie in dem vorhin geführten Beweise, dass der Ausdruck

$$\frac{\partial \mathfrak{Z}_1(t)}{\partial t^{(\nu-2)}} = \mathfrak{M}_1(t)$$

einen Multiplicator der Differentialgleichung (7) darstellt, wenn für t irgend eine Lösung dieser Differentialgleichung gesetzt wird, und dass ferner die quadratische Form $\mathfrak{Z}_1(t)$ einen constanten Werth annimmt für solche Functionen t, die entweder der Gleichung (7) oder der Differentialgleichung $(\nu - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\mathfrak{M}_1(t) = 0$$

Genüge leisten. Wenn wir diese Schlussweise fortsetzen, so erhalten wir schliesslich das Resultat:

Die quadratische Form $\mathfrak{Z}$ lässt sich in die Gestalt setzen:

$$\mathfrak{Z}(t) = \frac{1}{2\sigma_0} \mathfrak{M}^2(t) + \frac{1}{2\sigma_1} \mathfrak{M}_1^2(t) + \cdots + \frac{1}{2\sigma_{\nu-1}} \mathfrak{M}_{\nu-1}^2(t);$$

hierin bedeutet $\mathfrak{M}_\varkappa(t)$ eine homogene, lineare Function von

$$t, \; t', \; \ldots \; t^{(\nu-\varkappa-1)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \quad \nu-1),$$

und $\mathfrak{M}_{\varkappa+1}(t)$ ist ein Multiplicator der Differentialgleichung

$$\mathfrak{M}_\varkappa(t) = 0,$$

wenn t eine Lösung dieser Differentialgleichung bedeutet. Die Grössen $\sigma_0, \sigma_1, \cdots \sigma_{\nu-1}$ sind rationale Functionen von x,

$$\sigma_0 = 2\mathfrak{P}_{\nu-1,\, \nu-1},$$

und allgemein ist $\sigma_\varkappa$ der Coefficient der höchsten, $(\nu - \varkappa - 1)^{\text{ten}}$, Ableitung in $\mathfrak{M}_\varkappa$

Dabei ist vorausgesetzt, dass die Ausdrücke $\mathfrak{M}_\varkappa$ $(\varkappa = 0, 1, 2, \ldots \nu-1)$ die Ableitung höchster Ordnung $t^{(\nu-\varkappa-1)}$ wirklich enthalten, d. h. dass die $\sigma_\varkappa$ von Null verschieden sind. Sollte die eine oder die andere dieser Grössen verschwinden, so würden ähnliche Specialisirungen der Gestalt von $\mathfrak{Z}(t)$ Platz greifen, wie sie in der Theorie der quadratischen Formen bei der analogen Aufgabe auftreten.

Die Differentialgleichung $(\mathfrak{A}^{(m)})$ hat, wie wir hervorhoben, die Eigenschaft, mit ihrer Adjungirten zur selben Art zu gehören. Wir wollen hier allgemein über solche Differentialgleichungen, die zu einer sich selbst adjungirten Art gehören, einige Bemerkungen einfügen.

Möge also die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit in x rationalen Coefficienten

$$P(y) = 0$$

mit ihrer Adjungirten

$$P'(z) = 0$$

zur selben Art gehören, so dass also

$$z = R(y)$$

ist, wo R einen Differentialausdruck höchstens $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit in x rationalen Coefficienten bedeutet.

Es ist dann (vergl Nr 164, S 118)

$$\text{(I)} \qquad P'R = SP,$$

wo auch S einen Differentialausdruck von derselben Ordnung wie R und mit in x rationalen Coefficienten bedeutet Wenden wir auf diese Gleichung den Reciprocitätssatz (Nr. 21, Bd. I, S 59) an und bezeichnen den Adjungirten eines Differentialausdruckes immer durch einen seinem Symbol angehängten Accent, so ist also

$$\text{(II)} \qquad P'S' = R'P$$

Daraus folgt nun, dass der Ausdruck

$$z_1 = S'(y)$$

auch ein Integral der Differentialgleichung $P' = 0$ darstellt, wenn y eine Lösung von $P = 0$ bedeutet. Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem nämlich identisch, d. h für jede Function t von x, entweder

Viertes Kapitel.

176 Verfahren zur Entscheidung der Frage, ob eine vorgelegte lineare Differentialgleichung reductibel ist oder nicht.

Von den in den vorhergehenden Kapiteln dargelegten Untersuchungen machen wir jetzt eine bemerkenswerthe Anwendung, indem wir den bereits in der Nr. 161 (S. 107) in Aussicht genommenen Nachweis führen, dass sich für eine vorgelegte lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten stets durch blosse Ausführung algebraischer Operationen entscheiden lässt, ob dieselbe in dem Sinne reductibel ist, dass sie mit einer linearen Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit ebenfalls rationalen Coefficienten Lösungen gemein hat.

Sei die Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad P(y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0$$

mit rationalen Coefficienten in Bezug auf ihre Reductibilität zu untersuchen, dann wissen wir (vergl. Nr. 27), dass, wenn (A) reductibel ist, eine Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten

$$\text{(1)} \qquad Q(y) = y^{(m)} + q_1 y^{(m-1)} + \cdots + q_m y = 0 \quad (m < n)$$

von niedrigerer als der n^{ten} Ordnung existiren muss, die ihre sämmtlichen Lösungen mit (A) gemein hat. Bedeute $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_m$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (1), dann sind also die Quotienten

$$\text{(2)} \qquad (-1)^m q_\varkappa = \frac{D_\varkappa(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_m)}{D(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_m)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots m)$$

rational, und

$$D(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_m) = \text{const}\ e^{-\int q_1 dx}.$$

Damit die Differentialgleichung (A) reductibel sei, ist also nothwendig, dass sich die Determinante eines Systems von $m < n$ linear unabhängigen Integralen $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_m$ von (A) für einen der Werthe

$$m = 1, 2, \cdots n - 1$$

in der Form

(3) $$e^{-\int r\,dx}$$

darstellen lässt, wo r eine rationale Function von x bedeutet.

Die Determinanten

$$D = D(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_m),$$

wo $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdot\ \mathfrak{y}_m$ irgend ein System von m linear unabhängigen Lösungen von (A) bedeutet, genügen sämmtlich der $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Differentialgleichung $(\mathrm{A}^{(n-m)})$ von (A) Wenn also die Differentialgleichungen $(\mathrm{A}^{(n-m)})$, für $m = 1, 2, \cdot\ n-1$ kein in der Form (3) darstellbares Integral besitzen, so ist die Differentialgleichung (A) jedenfalls irreductibel.

Nun sind ferner die Determinanten

$$D_\varkappa(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \quad \mathfrak{y}_m) \qquad (\varkappa = 1, 2, \quad m)$$

Integrale von Differentialgleichungen, die nach den Ergebnissen der Nr 167 (S. 127) mit $(\mathrm{A}^{(n-m)})$ zur selben Art gehören, und zwar Integrale, die dem Integrale $D(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_m)$ von $(\mathrm{A}^{(n-m)})$ entsprechen.

Es bestehen folglich Gleichungen von der Form

(4) $$D_\varkappa(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdot\ \cdot\ \mathfrak{y}_m) = A_{\varkappa 0} D + A_{\varkappa 1} D' + \cdots + A_{\varkappa, \nu-1} D^{(\nu-1)}$$
$$(\varkappa = 1, 2, \quad m),$$

wo die $A_{\varkappa 0}, A_{\varkappa 1}, \quad A_{\varkappa, \nu-1}$ rationale Functionen von x bedeuten, die sich aus den Coefficienten von (A) durch Differentiation und rationale Operationen in einfacher Weise zusammensetzen, und wo

$$D^{(\lambda)} = \frac{d^\lambda D}{dx^\lambda}, \quad \nu = n_m$$

gesetzt wurde

Die Ableitungen jeder Ordnung eines Ausdruckes von der Form (3) sind als Producte

$$R(x) e^{-\int r\,dx},$$

wo $R(x)$ eine rationale Function bedeutet, also in der Gestalt

$$e^{\int\left(\frac{d \log R(x)}{dx} - r(x)\right) dx}$$

darstellbar Wenn nun D von der Form (3) ist, so folgt hieraus, dass auch die durch die Gleichung (4) gegebenen Determinanten

$$D_\varkappa(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdot\ \cdot\ \mathfrak{y}_m) = e^{\int\left(\frac{d \log R_\varkappa(x)}{dx} - r(x)\right) dx} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdot\cdot\ m),$$

also ebenfalls von der Form (3) und die Quotienten (2) gleich rationalen Functionen $R_\varkappa(x)$ sind

Die Coefficienten der $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Differentialgleichung $(\mathrm{A}^{(n-m)})$ von (A) lassen sich durch Differentiation und rationale Opera-

tionen aus den Coefficienten von (A) zusammensetzen. Denn bedeutet $y_1, y_2, \ldots y_n$ ein Fundamentalsystem von (A), so bilden (im Allgemeinen) die in der Nr. 167 (S. 125) definirten Determinanten

$$u_{11}, u_{12}, \cdots u_{1\nu}$$

ein Fundamentalsystem von $(A^{(n-m)})$. Die linke Seite der Differentialgleichung $(A^{(n-m)})$ ist folglich in der Form

$$\frac{D(u, u_{11}, u_{12}, \cdots u_{1\nu})}{D(u_{11}, u_{12}, \cdots u_{1\nu})} \tag{5}$$

darstellbar, wo u eine unbestimmte Function bedeutet Ersetzen wir in dem Ausdrucke (5) die $u_{11}, u_{12}, \cdots u_{1\nu}$ durch ihre Ausdrücke in den $y_1, y_2, \cdots y_n$ und deren Ableitungen, so verwandelt sich (5) in eine (absolute) Differentialinvariante der allgemeinen linearen Gruppe L in den n Grössen $y_1, y_2, \cdots y_n$, die eine homogene lineare Function von $u, u', \cdots u^{(\nu)}$ ist. Diese Differentialinvariante kann folglich nach dem in der Nr. 136 (S. 21) skizzirten Verfahren als rationale Function der $p_1, p_2, \ldots p_n$ und deren Ableitungen dargestellt werden

Um zu entscheiden, ob die Differentialgleichung (A) reductibel ist, werden wir also zunächst die sämmtlichen $(n-m)^{\text{ten}}$ Associirten der vorgelegten Differentialgleichung (A) aufzustellen haben für

$$m = 1, 2, \cdots \overline{n-1},$$

und für jede derselben festzustellen suchen, ob sie Lösungen von der Form (3) zulässt Sind solche Lösungen für eine der $(n-1)$ associirten Differentialgleichungen, etwa für $(A^{(n-m)})$ vorhanden, und bedeutet u_0 eine solche Lösung, so bilden wir die Ausdrücke

$$u_\varkappa = A_{\varkappa 0} u_0 + A_{\varkappa 1} u_0' + \cdots + A_{\varkappa, \nu-1} u_0^{(\nu-1)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots m).$$

Dann hat die lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$(-1)^m y^{(m)} + \frac{u_1}{u_0} y^{(m-1)} + \cdots + \frac{u_m}{u_0} y = 0$$

rationale Coefficienten, und wir können nach den in der Nr. 16 (Bd. I, S 42 ff.) entwickelten Methoden durch rationale Rechnungsoperationen entscheiden, ob diese Differentialgleichung ihre sämmtlichen Integrale mit (A) gemein hat. Fällt diese Entscheidung für alle in der Form (3) darstellbaren Lösungen von $(A^{(n-m)})$ im verneinenden Sinne aus, so giebt es keine lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten, deren Lösungen die Differentialgleichung (A) befriedigen. Wir brauchen also dieses Verfahren nur für alle Associirten von (A), die Lösungen von der Form (3) besitzen, in Anwendung zu bringen,

und haben dadurch nicht allein ein Kriterium für die Irreductibilität von (A), sondern zugleich eine Methode, die uns, falls (A) reductibel ist, alle Differentialgleichungen niedrigerer Ordnung mit rationalen Coefficienten liefert, die ihre sämmtlichen Lösungen mit (A) gemein haben

Es handelt sich nunmehr noch darum, zu entscheiden, ob eine vorgelegte lineare Differentialgleichung

$$(\alpha) \qquad y^{(n)} + r_1(x) y^{(n-1)} + \cdot \cdot + r_n(x) y = 0$$

mit rationalen Coefficienten durch Functionen befriedigt werden kann, deren logarithmische Ableitungen rationale Functionen von x sind, und falls solche Lösungen existiren, dieselben wirklich herzustellen Wir werden zeigen, dass dies stets durch eine Reihe rein algebraischer Processe geleistet werden kann

177 Kriterium dafür, ob die logarithmische Ableitung einer Lösung einer gegebenen linearen Differentialgleichung rational ist.

Wenn ein Ausdruck von der Form (3) die Differentialgleichung (α) befriedigen soll, so können wir uns zunächst die rationale Function $r(x)$ in Partialbrüche zerlegt denken

$$r(x) = g(x) + \sum_{\iota=1}^{s} \sum_{\varkappa=1}^{\lambda_\iota} \frac{\alpha_{\iota\varkappa}}{(x-a_\iota)^\varkappa},$$

wo $g(x)$ eine ganze rationale Function, die $\alpha_{\iota\varkappa}$ Constanten bedeuten. Ferner sondern wir diejenigen Partialbrüche ab, die sich auf Stellen $x = a_\iota$ beziehen, für welche $\lambda_\iota = 1$ und $\alpha_{\iota 1}$ eine negative ganze Zahl $-g_\iota$ ist; seien dies die Punkte $a_{\sigma+1}, a_{\sigma+2}, \cdots a_s$, dann ist also

$$(6) \quad r(x) = g(x) - \frac{d \log (x-a_{\sigma+1})^{g_{\sigma+1}} \cdots (x-a_s)^{g_s}}{dx} + \sum_{\iota=1}^{\sigma} \sum_{\varkappa=1}^{\lambda_\iota} \frac{\alpha_{\iota\varkappa}}{(x-a_\iota)^\varkappa}$$

Für den Ausdruck

$$\eta = e^{-\int r(x)\,dx}$$

sind dann die Stellen $a_1, a_2, \cdot \cdot a_\sigma$ wirkliche Unstetigkeits- oder Verzweigungsstellen, dieselben müssen folglich unter den wesentlichen singulären Punkten der Differentialgleichung (α) enthalten sein. Diese Stellen können wir also von vornherein als bekannt ansehen.

Denken wir uns η in der Umgebung einer dieser Stellen a_ι entwickelt, so ist:

$$\eta = (x - a_\iota)^{-\alpha_{\iota 1}} e^{\left\{\frac{\alpha_{\iota 2}}{x-a_\iota} + \frac{1}{2}\frac{\alpha_{\iota 3}}{(x-a_\iota)^2} + \cdots + \frac{1}{\lambda_\iota - 1}\frac{\alpha_{\iota \lambda_\iota}}{(x-a_\iota)^{\lambda_\iota - 1}}\right\}} \overline{\mathfrak{P}}_\iota(x|a_\iota), \qquad (\iota = 1, 2, \ldots \sigma)$$

wo $\overline{\mathfrak{P}}_\iota(x|a_\iota)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von $x - a_\iota$ fortschreitende Reihe bedeutet, die für $x = a_\iota$ nicht verschwindet, und in der Umgebung des unendlich fernen Punktes haben wir:

$$\eta = x^\tau e^{-\int g(x)\,dx} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right),$$

wo $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von x^{-1} fortschreitende, für $x = \infty$ nicht verschwindende Reihe bedeutet und

(7) $$\tau = g_{\sigma+1} + \cdots + g_\sigma - \alpha_{11} - \alpha_{21} - \cdots - \alpha_{\sigma 1}$$

gesetzt wurde.

Aus dieser Form der Entwickelungen von η erkennen wir, dass dieser Ausdruck, falls er der Differentialgleichung (α) Genüge leistet, in der Umgebung jedes endlichen und des unendlich fernen singulären Punktes den Charakter eines Normalintegrals besitzt

Es muss folglich

$$\bar{\eta}_\iota = e^{\frac{\alpha_{\iota 2}}{x-a_\iota} + \frac{1}{2}\frac{\alpha_{\iota 3}}{(x-a_\iota)^2} + \cdots + \frac{1}{\lambda_\iota - 1}\frac{\alpha_{\iota \lambda_\iota}}{(x-a_\iota)^{\lambda_\iota - 1}}}$$

ein zum Punkte $x = a_\iota$ und

$$\bar{\eta}_0 = e^{-\int g(x)\,dx}$$

ein zum Punkte $x = \infty$ gehöriger fundamentaler determinirender Factor der Differentialgleichung (α) sein.

Bezeichnen wir typisch durch a einen der Punkte $a_1, a_2, \ldots a_\sigma$ und lassen für die demselben entsprechenden Grössen $\bar{\eta}_\iota, \alpha_{\iota\varkappa}, \lambda_\iota, \mathfrak{P}_\iota$ den Index ι weg, so können wir durch die Substitution

$$x = a + \frac{1}{\xi}$$

die Differentialgleichung (α) in eine Differentialgleichung mit der unabhängigen Variabeln ξ transformiren und uns diese (vergl. Nr. 110, Bd. I, S. 393, 394) in der Form

($\bar{\alpha}$) $$\frac{d^n y}{d\xi^n} + \left(\varphi_\varkappa(\xi) + Q_{n-1}\left(\frac{1}{\xi}\right)\right)\frac{d^{n-1} y}{d\xi^{n-1}} + \cdots + \left(\varphi_{n\varkappa}(\xi) + Q_0\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) y = 0$$

geschrieben denken, wo (vergl. Nr. 94, Bd I, S. 339)

$$\varphi_{\lambda\varkappa}(\xi) = A_{n-\lambda}\xi^{\lambda\varkappa} + \cdots \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

eine ganze rationale Function vom höchstens $\lambda\varkappa^{\text{ten}}$ Grade in ξ und

$$Q_{n-\lambda}\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

eine Reihe von der Form

$$Q_{n-\lambda}\left(\frac{1}{\xi}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{n-\lambda,\nu}}{\xi^{\nu}} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

bedeutet; $\varkappa + 1$ ist der Rang der Gleichung $(\bar{\alpha})$ oder, wie wir sagen können, der Rang von (α) in Bezug auf den singulären Punkt $x = a$. Nach den Ergebnissen der Nummern 95, 96 (vergl den auf diese Nummern bezüglichen Nachtrag am Schlusse dieses Bandes) haben wir nun folgendermassen zu verfahren, um die fundamentalen determinirenden Factoren von $(\bar{\alpha})$ zu finden.

Sei

$$\psi_{n-\lambda}(x-a) = (x-a)^{\lambda\varkappa}\varphi_{\lambda\varkappa}(\xi)$$

und berechnen wir die $(\varkappa + 1)$ ersten Coefficienten in den nach Potenzen von $(x - a)$ fortschreitenden Entwickelungen der n (als verschieden vorausgesetzten) Zweige der durch die Gleichung

$$w^n + \psi_{n-1}(x-a)w^{n-1} + \cdots + \psi_0(x-a) = 0$$

definirten algebraischen Function w von x; seien diese

$$c_{0,l},\ c_{1,l},\ \cdots\ c_{\varkappa,l} \qquad (l = 1, 2, \ldots n),$$

dann sind die Ausdrücke

$$\zeta_l = e^{\frac{c_{0,l}}{\varkappa+1}\xi^{\varkappa+1} + \frac{c_{1,l}}{\varkappa}\xi^{\varkappa} + \cdots + c_{\varkappa,l}\xi}$$

jene gesuchten fundamentalen determinirenden Factoren

Es muss nun, wenn η der Differentialgleichung (α) genügen soll, der Ausdruck $\bar{\eta}$ mit einem dieser fundamentalen determinirenden Factoren übereinstimmen; wir haben also

$$\lambda = \varkappa + 2$$

und für die Coefficienten $\alpha_2, \alpha_3, \cdots \alpha_\lambda$ eine endliche Anzahl $(\leqq n)$ von Möglichkeiten

Um auch noch für α_1 eine Bestimmung zu erhalten, haben wir ebenfalls nach der a. a. O. gegebenen Vorschrift die zu den Factoren ζ_l gehörigen Exponenten aufzusuchen. Wir bilden also

$$v_l = c_{0,l}\xi^{\varkappa} + c_{1,l}\xi^{\varkappa-1} + \cdots + c_{\varkappa,l}$$

und bestimmen in dem Ausdrucke

$$v_l^n + \varphi_\varkappa v_l^{n-1} + \cdots + \varphi_{n\varkappa},$$

in welchem zufolge der für die Coefficienten von v_ι gegebenen Definition die $\varkappa + 1$ höchsten Potenzen von ξ wegfallen, den Coefficienten B_ι der $[(n-1)\varkappa + 1]^{\text{ten}}$ Potenz von ξ. Dann ist der gesuchte Exponent ϱ (wenn wir der Einfachheit wegen immer die Annahme machen, dass die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von einander verschieden sind) durch die Gleichung

$$\left(n c_{0,\iota}^{n-1} + (n-1) A_{n-1} c_{0,\iota}^{n-2} + \cdots + A_1\right)\varrho + B_\iota + b_{n-1,1} c_{0,\iota}^n = 0$$

bestimmt. Der Coefficient α_1 ist dann gleich diesem ϱ zu nehmen, wenn das zu $x = a$ gehörige $\bar{\eta}$ mit ζ_ι übereinstimmt.

Verfahren wir auf diese Weise für alle im Endlichen gelegenen singulären Stellen $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$, so erhalten wir also für den Factor

$$\prod_{\iota=1}^{\sigma} (x - a_\iota)^{-\alpha_{\iota 1}} \eta_\iota$$

von η eine endliche Anzahl von Möglichkeiten In ähnlicher Weise finden wir durch die zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Factoren der Differentialgleichung und durch die zu denselben gehörigen Exponenten eine endliche Anzahl von Möglichkeiten für den Factor

$$x^\tau \bar{\eta}_0$$

von η, so dass wir also vermöge der Gleichung (7) auch eine obere Grenze für die ganze positive Zahl

$$g_{\sigma+1} + \cdots + g_s$$

erhalten. Es muss nunmehr η in der Form

$$\eta = G(x)\,\bar{\eta}_0 \prod_{\iota=1}^{\sigma} (x - a_\iota)^{-\alpha_{\iota 1}} \bar{\eta}_\iota$$

darstellbar sein, wo $G(x)$ eine ganze rationale Function bedeutet, für deren Grad wir eine obere Grenze g kennen.

Substituiren wir nun in die Differentialgleichung (α) für y den Ausdruck

$$y = z\bar{\eta}_0 \prod_{\iota=1}^{\sigma} (x - a_\iota)^{-\alpha_{\iota 1}} \bar{\eta}_\iota,$$

indem wir für den Factor von z die sämmtlichen als möglich erkannten Werthe nehmen, so muss, wenn (α) eine Lösung von der Form η haben soll, eine der sich so für z ergebenden homogenen linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten durch eine ganze rationale Function $G(x)$ vom Grade g befriedigt werden können. Es handelt sich also nur noch darum, zu entscheiden, ob dies möglich ist.

Soll eine vorgelegte homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten durch eine ganze rationale Function vom g^{ten} Grade befriedigt werden, so muss zunächst offenbar $-g$ eine Wurzel der zu $x=\infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung sein Wenn dies der Fall ist und wir setzen in die Differentialgleichung für die abhängige Variable den Ausdruck

$$x^g\left\{c_0 + c_1\frac{1}{x} + c_2\frac{1}{x^2} + \cdots + c_g\frac{1}{x^g}\right\}$$

ein, so ergiebt sich für die $c_0, c_1, \cdots c_g$ ein System linearer Gleichungen (die zu $x=\infty$ gehörige Recursionsformel). Je nachdem dieses Gleichungssystem eine Auflösung gestattet oder nicht, kann die vorgelegte Differentialgleichung durch eine ganze rationale Function g^{ten} Grades befriedigt werden oder nicht.

Man kann also in der That durch eine endliche Anzahl rein algebraischer Operationen entscheiden, ob eine gegebene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten durch eine Function, deren logarithmische Ableitung rational ist, befriedigt werden kann, und wenn dies der Fall ist, die betreffende Function wirklich herstellen.

178. Besondere Behandlung der Fuchs'schen Classe. Satz von Heffter über das Auftreten ganzer rationaler Integrale.

Wir heben noch besonders den Fall hervor, wo die vorgelegte Differentialgleichung (α) der Fuchs'schen Classe angehört.

Die rationale Function $r(x)$ in dem Ausdrucke (3) muss dann so beschaffen sein, dass

$$\eta = e^{-\int r(x)\,dx}$$

keine Unbestimmtheitsstellen darbietet. Dazu ist nothwendig und hinreichend, dass in der Zerlegungsformel von $r(x)$ in Partialbrüche

$$g(x)=0, \quad \lambda_\iota = 1 \qquad (\iota = 1, 2, \quad s)$$

sei. Es hat also η in diesem Falle die Gestalt

$$\eta = G(x)\prod_{\iota=1}^{\sigma}(x-a_\iota)^{-\alpha_{\iota 1}},$$

d h. η ist, wie wir uns ausdrücken wollen, ein Product von Potenzen rationaler Functionen. Die Zahl $-\alpha_{\iota 1}$ muss dann einfach eine Wurzel der zu $x=a_\iota$ gehörigen ($\iota = 1, 2, \cdots \sigma$), die Zahl

$$-\tau = -g + \alpha_{11} + \alpha_{21} + \quad + \alpha_{\sigma 1}$$

eine Wurzel der zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung sein. Man hat also wieder für die $\alpha_{\iota 1}$ $(\iota = 1, 2, \ldots \sigma)$ eine endliche Anzahl von Möglichkeiten und für den Grad g der ganzen rationalen Function $G(x)$ eine obere Grenze Die Differentialgleichungen für z, die aus der gegebenen durch die Substitutionen

$$y = z \prod_{\iota=1}^{\sigma} (x - a_\iota)^{-\alpha_{\iota 1}}$$

hervorgehen, wo für die $\alpha_{\iota 1}$ irgend ein System der als möglich erkannten Zahlen zu setzen ist, gehören dann auch sämmtlich der Fuchs-schen Classe an, und es ist also für eine dieser Classe angehörige Differentialgleichung zu entscheiden, ob sie ein ganzes rationales Integral besitzt Hierfür lässt sich aber ein sehr einfaches Kriterium in expliciter Form angeben.

Denken wir uns nämlich die der Fuchs'schen Classe angehörige Differentialgleichung für z durch Multiplication mit einer ganzen rationalen Function so umgeformt, dass ihre Coefficienten ganze rationale Functionen sind. Sei dann der Coefficient der n^{ten} Ableitung von z vom Grade μ, so ist, da (vergl. Nr. 110, Bd I, S. 394 oben) die Grade der Coefficienten der Ableitungen absteigender Ordnung von z abnehmen müssen, jedenfalls μ nicht kleiner wie n. Setzen wir also

$$z = \frac{d^{\mu - n} \mathfrak{y}}{d x^{\mu - n}},$$

so stimmt in der sich für $\mathfrak{y}$ ergebenden Differentialgleichung

$$(\beta) \qquad P_\mu(x)\mathfrak{y}^{(\mu)} + P_{\mu-1}(x)\mathfrak{y}^{(\mu-1)} + \cdots + P_0(x)\mathfrak{y} = 0$$

der Grad des Coefficienten der höchsten Ableitung mit der Ordnung der Differentialgleichung überein.

Einer ganzen rationalen Function vom Grade g, die der Differentialgleichung für z genügt, entspricht dann eine ganze rationale Function vom Grade $g + \mu - n$, die eine Lösung von (β) ist, und umgekehrt entspricht jeder ganzen rationalen Function von höherem als dem $(\mu - n)^{\text{ten}}$ Grade, die die Differentialgleichung (β) befriedigt, ein ganzes rationales Integral der Differentialgleichung für z. Um zu entscheiden, ob diese letztere Differentialgleichung ein ganzes rationales Integral vom Grade g besitzt, haben wir also nur festzustellen, ob die zu $x = \infty$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung von (β) die Wurzel $n - \mu - g$ besitzt, und ob zu dieser Wurzel ein Integral gehört, welches eine ganze Function $(g + \mu - n)^{\text{ten}}$ Grades ist.

Zu diesem Ende denken wir uns (β) in der Normalform geschrieben, also

$$(\beta)\qquad x^{\mu}\left(c_{\mu\mu}+c_{\mu-1,\mu}\frac{1}{x}+\cdot\cdot+c_{0\mu}\frac{1}{x^{\mu}}\right)\mathfrak{y}^{(\mu)}$$
$$+x^{\mu-1}\left(c_{\mu-1,\mu-1}+c_{\mu-2,\mu-1}\frac{1}{x}+\cdot\cdot+c_{0,\mu-1}\frac{1}{x^{\mu-1}}\right)\mathfrak{y}^{(\mu-1)}$$
$$+\cdot\cdot+c_{00}\mathfrak{y}=0,$$

wo die $c_{\iota\varkappa}$ Constanten bedeuten, und bilden die charakteristische Function

$$x^{\sigma}\sum_{\nu}f_{\nu}(\sigma)x^{\nu},$$

wo also

$$(8)\qquad f_{-\iota}(\sigma)=\sigma(\sigma-1)\cdot\cdot(\sigma-\iota+1)\sum_{\lambda=\iota}^{\mu}c_{\lambda-\iota,\lambda}(\sigma-\iota)\cdot\cdot(\sigma-\lambda+\iota)$$
$$(\iota=0,1,2,\ldots\mu)$$

ist, während alle folgenden $f_{-\iota}(\sigma)$ identisch verschwinden. Setzen wir in (β) die Reihe

$$(9)\qquad \mathfrak{y}=x^{\gamma}\sum_{\nu=0}^{\infty}g_{\nu}(\gamma)x^{-\nu}$$

ein, so befriedigen die $g_{\nu}(\gamma)$ die Recursionsformel

$$(10)\qquad \sum_{\lambda=0}^{\nu}f_{\lambda-\nu}(\gamma-\lambda)g_{\lambda}(\gamma)=0,\quad 0<\nu-\lambda<n.$$

Wenn $-\gamma$ eine ganze nicht positive Zahl ist, die der determinirenden Fundamentalgleichung

$$f_0(-\sigma)=0$$

genügt, und es soll zu dem Exponenten $-\gamma$ ein Integral gehören, welches eine ganze rationale Function von x ist, so müssen für die Recursionsformel (10) zunächst die Bedingungen erfüllt sein, die die Existenz eines zu $-\gamma$ gehörigen und in Reihenform darstellbaren Integrals ermöglichen (vergl Nr. 52ff.; siehe auch den Nachtrag zu dieser Nummer am Schlusse des vorliegenden Bandes). Sind diese Bedingungen erfüllt, so können wir aus den Gleichungen (10) für $\nu=0,1,\cdot\cdot\gamma$ die Coefficienten

$$g_0(\gamma),\ g_1(\gamma),\ \cdot\cdot\ g_{\gamma}(\gamma)$$

der Reihe (9) berechnen. Die zur Bestimmung der folgenden Coefficienten dienenden Gleichungen lauten dann

$$(11)\qquad \begin{cases} f_0(-1)g_{\gamma+1}(\gamma)+f_{-1}(0)g_{\gamma}(\gamma)+f_{-2}(1)g_{\gamma-1}(\gamma)+\cdot\cdot=0,\\ f_0(-2)g_{\gamma+2}(\gamma)+f_{-1}(-1)g_{\gamma+1}(\gamma)+f_{-2}(0)g_{\gamma}(\gamma)+\cdot\cdot=0,\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \end{cases}$$

Aus der Form (8) der Functionen $f_{-i}(\sigma)$ erhellt, dass in den Gleichungen (11) die Coefficienten der Grössen

$$g_{\gamma}(\gamma),\ g_{\gamma-1}(\gamma),\ g_{\gamma-2}(\gamma),\ \cdot$$

sämmtlich verschwinden; diese Gleichungen werden folglich jedenfalls befriedigt, wenn wir alle

$$g_{\gamma+i}(\gamma)=0 \qquad (i=1,2,3,\ \ )$$

nehmen Daraus folgt der von Herrn Heffter herrührende Satz:

Wenn zu der negativen ganzzahligen Wurzel $-\gamma$ der zu $x=\infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung von (β) ein in Reihenform darstellbares Integral gehört, so besitzt diese Differentialgleichung ein ganzes rationales Integral

Dieser Satz gilt auch, wenn (β) nicht zur Fuchs'schen Classe gehört, sondern nur so beschaffen ist, dass $x=\infty$ eine Stelle der Bestimmtheit ist Wir hätten denselben aus dem Satze der Nr. 117 (Bd. I, S. 423) über die Existenz eines Normalintegrals für die daselbst betrachtete Differentialgleichung, welches eine mit dem fundamentalen determinirenden Factor $e^{c_x x}$ multiplicirte ganze rationale Function ist, erschliessen können, haben es aber vorgezogen, einen directen Beweis zu liefern.

Wenn die in Bezug auf ihre Reductibilität hin zu untersuchende Differentialgleichung (A) der Fuchs'schen Classe angehört, so gilt das Gleiche offenbar auch für die zu (A) associirten Differentialgleichungen. In diesem Falle hat man also um zu entscheiden, ob (A) reductibel ist, nur für Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe diejenigen Lösungen aufzufinden, die sich als Producte von Potenzen rationaler Functionen darstellen lassen, und dann für eine endliche Anzahl wohlbestimmter linearer Differentialgleichungen festzustellen, ob sie ihre sämmtlichen Lösungen mit (A) gemein haben oder nicht.

Fünftes Kapitel.

179. Genauere Betrachtung der Integralquotienten. Projective Substitutionen und Gruppen. Isomorphismus. Beziehungen zwischen homogenen, unimodularen und projectiven Gruppen.

Wir wollen nun dazu übergehen, die durch die geometrische Deutung der Lösungen $y_1, y_2, \ldots y_n$ unserer Differentialgleichung (A) als homogener Punktcoordinaten eines $(n-1)$-fach ausgedehnten Raumes R_{n-1} gewonnenen principiellen Gesichtspunkte auszunützen, indem wir insbesondere jene Integralcurve $\mathfrak{C}$, die durch die Gleichungen

$$y_\varkappa = y_\varkappa(x) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

definirt war, in den Vordergrund unserer Betrachtungen stellen.

Es wurde schon in der Nr. 172 (S. 145) hervorgehoben, dass die Curve $\mathfrak{C}$ dieselbe bleibt, wenn wir die $y_\varkappa(x)$ mit einem allen gemeinsamen Factor multipliciren, d. h. also, dass jeder Differentialgleichung, die aus (A) durch die Transformation

$$(1) \qquad y = \lambda z$$

hervorgeht, dieselbe Curve $\mathfrak{C}$ zugeordnet ist. Dies führte uns dazu, die Integralquotienten $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{n-1}$ zu untersuchen, durch welche vermöge der Gleichungen (vergl. S. 149)

$$(2) \qquad \mathfrak{y}_1 = \left\{\frac{\text{const}}{D(\eta_1', \eta_2', \ldots \eta_{n-1}')}\right\}^{\frac{1}{n}},$$

$$(3) \qquad \mathfrak{y}_\varkappa = \mathfrak{y}_1 \eta_{\varkappa-1} \qquad (\varkappa = 2, 3, \ldots n)$$

das Fundamentalsystem

$$\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots \mathfrak{y}_n$$

der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) bestimmt war. Jede lineare Differentialgleichung mit in x rationalen Coefficienten, deren Integralquotienten $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{n-1}$ sind, geht dann aus ($\mathfrak{A}$) durch die Transformation

$$\mathfrak{y} = e^{\int r(x)\,dx} z$$

hervor, wo $r(x)$ eine rationale Function von x bedeutet.

Wir hatten das Quotientensystem $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ ein Fundamentalsystem von Integralquotienten genannt. In der That lässt sich der Quotient irgend zweier Integrale $\bar{y}_1, \bar{y}_2$,

$$\eta = \frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2},$$

durch die $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ in einfacher Weise darstellen. Sei nämlich

$$\bar{y}_1 = a_0 y_1 + a_1 y_2 + \cdots + a_{n-1} y_n,$$
$$\bar{y}_2 = b_0 y_1 + b_1 y_2 + \cdots + b_{n-1} y_n,$$

so ist offenbar

$$\eta = \frac{a_0 + a_1 \eta_1 + \cdots + a_{n-1}\eta_{n-1}}{b_0 + b_1 \eta_1 + \cdots + b_{n-1}\eta_{n-1}},$$

d. h. jeder Integralquotient ist eine gebrochene lineare Function der Elemente eines Fundamentalsystems von Integralquotienten.

Bedeutet $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots \bar{y}_n$ ein zweites Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (A) und

$$\bar{\eta}_{\varkappa-1} = \frac{\bar{y}_\varkappa}{\bar{y}_1} \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots n)$$

das entsprechende System von Quotienten, so ist, wenn wir

$$\bar{\mathfrak{y}}_\varkappa = e^{\frac{1}{n}\int p_1 dx}\, \bar{y}_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

setzen, $\bar{\mathfrak{y}}_1, \bar{\mathfrak{y}}_2, \cdots \bar{\mathfrak{y}}_n$ das entsprechende Fundamentalsystem von $(\mathfrak{A})$, und folglich

(4) $$\bar{\mathfrak{y}}_\varkappa = \sum_{\iota=1}^{n} \alpha_{\varkappa\iota}\, \mathfrak{y}_\iota \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

wo die $\alpha_{\varkappa\iota}$ Constanten bedeuten, für welche

(5) $$|\alpha_{\varkappa\iota}| = 1 \qquad (\varkappa, \iota = 1, 2, \cdots n)$$

ist. Also haben wir

(6) $$\bar{\eta}_{\varkappa-1} = \frac{\alpha_{\varkappa 1} + \alpha_{\varkappa 2}\eta_1 + \cdots + \alpha_{\varkappa n}\eta_{n-1}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}\eta_1 + \cdots + \alpha_{1n}\eta_{n-1}} \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots n),$$

d. h. die Elemente irgend eines Fundamentalsystems von Integralquotienten stellen sich durch $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ als lineare gebrochene Functionen mit demselben Nenner dar.

Die Beziehung zwischen den beiden Functionssystemen

$$\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1},$$
$$\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \cdots \bar{\eta}_{n-1},$$

die durch Gleichungen von der Form (6) mit der Bedingung (5) festgelegt wird, wollen wir, im Anschlusse an die geometrische Bedeutung der linearen homogenen Transformation (4) als Collineation, so bezeichnen, dass wir sagen, das System $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \cdots \bar{\eta}_{n-1}$ gehe aus $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ durch Ausübung einer projectiven Transformation oder Substitution hervor. Von dieser Art der Beziehung ist zunächst evident, dass sie eine gegenseitige ist, denn die Gleichungen (6) lassen sich nach den $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ in eindeutiger Weise auflösen; dabei ist es aber wesentlich, dass die linear gebrochenen Substitutionen (6) denselben Nenner haben. Wir sagen demnach:

Jedes Fundamentalsystem von Integralquotienten der Differentialgleichung (A) geht aus jedem andern durch Ausübung einer projectiven Transformation hervor.

Auf diese Weise entspricht also jeder linearen homogenen Transformation der $y_1, y_2, \cdots y_n$ eine projective Transformation der $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ und folglich auch jeder Gruppe von linearen homogenen Transformationen der $y_1, y_2, \cdots y_n$ eine Gruppe von projectiven Transformationen oder kurz eine projective Gruppe der

$$\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}.$$

Insbesondere wird also die Gesammtheit aller projectiven Transformationen der $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ eine Gruppe bilden, die wir die allgemeine projective Gruppe Λ nennen wollen; wir stellen uns die Aufgabe, die Beziehungen dieser Gruppe Λ zu der allgemeinen homogenen linearen Gruppe L der $y_1, y_2, \cdots y_n$ und zu der speciellen $\bar{L}$ genauer zu ergründen

Wir führen zu dem Ende einen wichtigen gruppentheoretischen Begriff ein.

Wenn die Operationen zweier Gruppen G und Γ einander so zugeordnet sind, dass der aus zwei Operationen der einen Gruppe componirten Operation die aus den beiden entsprechenden Operationen der andern Gruppe componirte Operation entspricht, so sagt man, die beiden Gruppen seien isomorph.

Entspricht in zwei isomorphen Gruppen G und Γ jeder Operation der einen Gruppe eine und nur eine wohlbestimmte Operation der andern, so nennt man den Isomorphismus einen holoedrischen oder einstufigen, wenn dagegen die Zuordnung keine gegenseitig eindeutige ist, so heissen die Gruppen meriedrisch oder mehrstufig isomorph.

Aus der Definition des Isomorphismus folgt, dass denjenigen Operationen der einen Gruppe, die eine Untergruppe constituiren, Operationen der andern Gruppe entsprechen, die ebenfalls eine Untergruppe ausmachen. Wir werden also von einander entsprechenden Untergruppen isomorpher Gruppen reden können. Einer ausgezeichneten Untergruppe der einen Gruppe entspricht dann offenbar auch eine ausgezeichnete Untergruppe der andern. Also entspricht insbesondere der identischen Operation der einen Gruppe eine ausgezeichnete Untergruppe der andern.

Möge der identischen Operation 1 von Γ die ausgezeichnete Untergruppe E von G entsprechen. Sei ferner S irgend eine Operation von G, die der Operation Σ von Γ entspricht, dann sind die sämmtlichen Operationen von G, die der Operation Σ von Γ entsprechen, in der Form

$$eS \quad \text{oder} \quad Se$$

enthalten, wo e irgend eine Operation von E bedeutet. Wenn die Gruppen G und Γ holoedrisch isomorph sind, so besteht E einfach aus der identischen Operation 1 allein.

Unter Benutzung dieser Terminologie können wir also jedenfalls sagen:

Die projective Gruppe Λ von $(n-1)$ Variabeln ist der speciellen linearen homogenen Gruppe $\overline{L}$ von n Variabeln und beide sind der allgemeinen linearen homogenen Gruppe L isomorph

Fragen wir nun nach denjenigen Operationen von $\overline{L}$ und L, die der identischen Operation von Λ entsprechen.

Soll die lineare Substitution

$$(7) \qquad \bar{y}_\iota = \sum_{\varkappa=1}^{n} \alpha_{\iota\varkappa} y_\varkappa \qquad (\iota = 1, 2, \ldots n)$$

der Gruppe L der identischen Substitution von Λ entsprechen, so muss

$$(8) \qquad \bar{\eta}_{\iota-1} = \frac{\alpha_{\iota 1} + \alpha_{\iota 2}\eta_1 + \cdots + \alpha_{\iota n}\eta_{n-1}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}\eta_1 + \cdots + \alpha_{1n}\eta_{n-1}} = \eta_{\iota-1} \qquad (\iota = 2, 3, \ldots n)$$

sein. Daraus folgt, da diese Gleichungen identisch, d. h für alle Werthesysteme der $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ bestehen müssen,

$$\alpha_{\iota\varkappa} = 0, \quad \text{für} \quad \iota \neq \varkappa$$

und ferner

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \cdots = \alpha_{nn} = t,$$

wo t einen noch willkürlich zu wählenden Parameter bedeutet Also entspricht der identischen Operation von $\varDelta$ die aus der infinitesimalen Transformation

(9) $$y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + \cdots + y_n \frac{\partial f}{\partial y_n}$$

erzeugte eingliedrige continuirliche Gruppe E

(10) $$\bar{y}_\varkappa = t y_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n),$$

wo t einen willkürlichen Parameter bedeutet Diese ist also in L als ausgezeichnete Untergruppe enthalten.

Bedeutet (8) eine unimodulare Substitution, d. h. ist

$$|\alpha_{i\varkappa}| = 1 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \ldots n),$$

so unterliegt der Factor t noch der Bedingung

$$t^n = 1,$$

d h der identischen Operation von $\varDelta$ entspricht die endliche Untergruppe

(11) $$\bar{\mathfrak{y}}_\varkappa = \varepsilon \mathfrak{y}_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

der speciellen linearen homogenen Gruppe $\bar{L}$, wo ε eine n^{te} Einheitswurzel bedeutet.

Wenn der identischen Operation einer Gruppe Γ die ausgezeichnete Untergruppe E einer isomorphen Gruppe G entspricht, und es entspricht der Untergruppe γ von Γ die Untergruppe g von G, so sind auch γ und g isomorph, und der identischen Operation von γ entspricht eine Untergruppe e von E, die in g ausgezeichnet enthalten ist

Wir schliessen hieraus, dass die infinitesimalen Transformationen der Gruppen $\varDelta$ und $\bar{L}$ einander gegenseitig eindeutig entsprechen müssen, dass aber die Gruppe $\bar{L}$ nicht von infinitesimalen Transformationen erzeugt, also keine continuirliche Gruppe ist Da $\bar{L}$ von $n^2 - 1$ Parametern abhängt, so enthält diese Gruppe genau $n^2 - 1$ von einander unabhängige infinitesimale Transformationen Es sind dies

$$y_i \frac{\partial f}{\partial y_\varkappa}, \quad y_\varkappa \frac{\partial f}{\partial y_\varkappa} - y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \ldots n, \; i \neq \varkappa)$$

Um die entsprechenden infinitesimalen Transformationen von $\varDelta$ zu bilden, berechnen wir die entsprechenden Variationen der $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$; da

$$\delta \eta_{\varkappa-1} = \delta\left(\frac{y_\varkappa}{y_1}\right) = \frac{y_1 \delta y_\varkappa - y_\varkappa \delta y_1}{y_1^2} \qquad (\varkappa = 2, 3, \ldots n),$$

so finden wir

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial y_\varkappa} = \frac{\partial f}{\partial \eta_{\varkappa-1}}, \quad y_\varkappa \frac{\partial f}{\partial y_1} = -\eta_{\varkappa-1}\left(\eta_1 \frac{\partial f}{\partial \eta_1} + \cdot \quad + \eta_{n-1} \frac{\partial f}{\partial \eta_{n-1}}\right),$$

$$y_i \frac{\partial f}{\partial y_\varkappa} = \eta_{i-1} \frac{\partial f}{\partial \eta_{\varkappa-1}},$$

$$y_\varkappa \frac{\partial f}{\partial y_\varkappa} - y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} = \eta_{\varkappa-1} \frac{\partial f}{\partial \eta_{\varkappa-1}} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial \eta_1} + \cdots + \eta_{n-1} \frac{\partial f}{\partial \eta_{n-1}}$$

$$(i, \varkappa = 2, 3, \quad n;\ i \neq \varkappa)$$

Aus diesen infinitesimalen Transformationen ist die allgemeine projective Gruppe $\varDelta$ erzeugt. Der Umstand, dass $\varDelta$ aus infinitesimalen Transformationen erzeugt ist, $\overline{L}$ aber nicht, bewirkt, dass es für viele Betrachtungen zweckmässiger ist, mit der projectiven Gruppe statt mit der unimodularen homogenen Gruppe zu operiren.

180 Differentialgleichung für die Integralquotienten. Transformation der unabhängigen Variabeln. Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die Schwarz'sche Ableitung.

Auf Grund der in der vorigen Nummer gemachten Bemerkungen können wir uns nunmehr die Bedeutung der Integralquotienten $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ für die Integration der vorgelegten Differentialgleichung (A) vollständig klar machen

Was zunächst die Transformationsgruppe anlangt, so sei H diese Gruppe für die Differentialgleichung (A). Die der Untergruppe H von L entsprechende Untergruppe $\overline{H}$ von $\overline{L}$ ist die Transformationsgruppe von ($\mathfrak{A}$). Statt dieser betrachten wir die dieser unimodularen Gruppe isomorphe Untergruppe Θ der projectiven Gruppe $\varDelta$. Der identischen Transformation von Θ entspricht dann eine ausgezeichnete Untergruppe von H, die in der Gruppe (10) und eine ebensolche Untergruppe von $\overline{H}$, die in der Gruppe (11) enthalten sein muss. Eine rationale Differentialfunction der $y_1, y_2, \cdot\cdot y_n$, die bei der Gruppe (10) ungeändert bleibt, ist eine homogene Function nullten Grades der $y_1, y_2, \cdot\ \cdot y_n$ und ihrer Ableitungen; so weit also solche Differentialfunctionen der $y_1, y_2, \cdot\ \cdot y_n$ in Betracht kommen, kann man sich auf das Studium der Integralquotienten und der zugehörigen projectiven Gruppe beschränken. Dies ist ferner zulässig, wenn es sich um homogene Gleichungen beliebigen Grades zwischen den $y_1, y_2, \cdot\cdot y_n$ und deren Ableitungen handelt, da diese offenbar bei Transformationen der Gruppe (10) erhalten bleiben.

In Bezug auf die Monodromiegruppe h von (A) gelten die analogen Bemerkungen Bedeute $\overline{h}$ die dem h entsprechende Untergruppe von $\overline{L}$, d. h. die Monodromiegruppe von ($\mathfrak{A}$) und ϑ die zu $\overline{h}$ isomorphe

projective Gruppe, so entspricht der identischen Transformation von ϑ eine in (10) beziehungsweise (11) enthaltene ausgezeichnete Untergruppe von h beziehungsweise $\bar{h}$. Wir haben also den Satz:

Wenn die Integralquotienten $\eta_1, \eta_2, \cdot\; \eta_{n-1}$ bei einem Umlaufe der unabhängigen Variabeln x ungeändert bleiben, so multipliciren sich die Integrale $y_1, y_2, \cdots y_n$ von (A) mit einer Constanten, die Integrale $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n$ von ($\mathfrak{A}$) mit einer n^{ten} Einheitswurzel.

Wenn wir einen Integralquotienten, z. B.

$$\eta_1 = \frac{y_2}{y_1}$$

als eine rationale Differentialfunction der $y_1, y_2, \cdots y_n$ auffassen, so können wir nach der dieser Function entsprechenden Resolvente der Differentialgleichung (A) fragen, d. h. (vergl. Nr. 147, S. 58 ff.) nach der algebraischen Differentialgleichung niedrigster Ordnung, der η_1 genügt.

Wir beschränken uns vorerst auf die Betrachtung des „allgemeinen“ Falles, wo die Transformationsgruppe der Differentialgleichung (A) die allgemeine lineare homogene Gruppe L ist Dann haben wir also nach den in der Nr. 143 (S. 48) angegebenen Vorschriften zunächst in den Ausdruck von η_1 für $y_1, y_2, \cdots y_n$ die aus diesen Grössen durch die allgemeinste Transformation von L

$$\bar{y}_\varkappa = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\varkappa i} y_i, \quad |\alpha_{i\varkappa}| \neq 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \quad n)$$

hervorgehenden Grössen zu setzen; der so entstehende Ausdruck

$$\eta = \frac{\alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \quad + \alpha_{2n} y_n}{\alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \quad + \alpha_{1n} y_n}$$

hängt von $2n-1$ wesentlichen Parametern ab und stellt (vergl. Nr. 179, S. 176) den allgemeinsten Integralquotienten dar

Es wird also, nach den Sätzen der Nr. 144 (S. 50), die Function η bei genau $n^2 - 2n + 1$ infinitesimalen Transformationen von L ungeändert bleiben und einer algebraischen Differentialgleichung $(2n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit in x rationalen Coefficienten genügen. Diese Differentialgleichung ist so beschaffen, dass ihr allgemeines Integral η sich als gebrochene lineare Function mit willkürlichen Coefficienten (die nichts anderes sind wie die Integrationsconstanten) von $n-1$ particularen Integralen $\eta_1, \eta_2, \cdot\; \eta_{n-1}$ darstellen lässt.

Ein Fundamentalsystem von Integralquotienten spielt also für diese Differentialgleichung $(2n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung eine ähnliche Rolle, wie

das Fundamentalsystem von Integralen $y_1, y_2, \cdots y_n$ für die lineare Differentialgleichung (A). Wenn die Transformationsgruppe von (A) nicht gerade die allgemeine homogene lineare Gruppe L ist, so können wir den folgenden Satz aussprechen:

Für die Differentialgleichung $(2n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, der die Integralquotienten η der Differentialgleichung (A) Genüge leisten, haben die projectiven Gruppen Θ und ϑ, die der Transformationsgruppe H beziehungsweise der Monodromiegruppe h von (A) isomorph sind, dieselbe Bedeutung, wie die Gruppen H und h für die Differentialgleichung (A) selbst. Die Gruppe ϑ ist natürlich stets eine abzählbare, während die Gruppe Θ, sofern sie keine endliche ist, stets continuirliche Schaaren von Transformationen enthält.

Wir werden im Folgenden oft die Gruppe Θ die Transformationsgruppe, ϑ die Monodromiegruppe der Integralquotienten der Differentialgleichung (A) nennen.

Die Form der Differentialgleichung $(2n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung für η ist im Allgemeinen eine sehr complicirte, wir werden dieselbe sehr bald für den einfachsten Fall $n=2$ aufstellen. Jedenfalls ist von vornherein klar, dass die Differentialgleichung für η nur von den Coefficienten der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) abhängen kann, da sie ja ungeändert bleiben muss, wenn wir von der Differentialgleichung (A) durch die Transformation

$$y = \lambda z$$

zu einer andern Differentialgleichung übergehen.

Die Betrachtung der Integralcurve $\mathfrak{C}$, die durch die Gleichungen

$$y_\varkappa = y_\varkappa(z) \qquad (\varkappa = 1, 2, \quad n)$$

dargestellt wird, veranlasst uns jetzt noch einen weiteren Schritt zu machen.

Wir hatten die Curve $\mathfrak{C}$ dargestellt, indem wir die homogenen Coordinaten ihrer Punkte als Functionen eines Parameters x auffassten; für die Natur der Curve ist aber die besondere Wahl dieses Parameters offenbar unwesentlich. Wir können zu einem andern Parameter übergehen, indem wir x gleich einer Function $\varphi(\xi)$ einer neuen Variabeln ξ setzen

(1) $$x = \varphi(\xi),$$

dadurch wird die ursprüngliche Differentialgleichung (A) in eine Differentialgleichung mit der unabhängigen Variabeln ξ transformirt, für welche die Curve $\mathfrak{C}$ dieselbe Bedeutung hat wie für (A). Combiniren wir diese Transformation mit der Transformation

(2) $$y = \lambda z,$$

wo λ irgend eine Function von x bedeutet, so erhalten wir also die allgemeinste Differentialgleichung für z als Function von ξ, zu der dieselbe Integralcurve $\mathfrak{C}$ gehört wie zu (A)

Für die Differentialgleichung zweiter Ordnung

(A$_2$) $$\frac{d^2y}{dx^2} + 2p_1\frac{dy}{dx} + p_2 y = 0$$

verliert die Curve $\mathfrak{C}$ insofern ihre Bedeutung, als wir in diesem Falle, wenn wir die Elemente y_1, y_2 eines Fundamentalsystems als homogene Coordinaten eines Punktes auf einer geraden Linie deuten, ein Continuum von Punkten erhalten, welches mit dieser Geraden von derselben Dimension ist Wir schliessen hieraus, dass diese Gerade selbst in gewissem Sinne die Rolle der Integralcurve spielt, so dass also alle linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in diesem Sinne dieselbe Integralcurve haben.

Dies bestätigt sich dadurch, dass jede lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung in jede andere durch Transformationen von der Form (1) und (2) übergeführt werden kann.

Sei nämlich

(B$_2$) $$\frac{d^2z}{d\xi^2} + 2q_1\frac{dz}{d\xi} + q_2 z = 0$$

irgend eine andere Differentialgleichung zweiter Ordnung Setzen wir dann

(3) $$y = e^{-\int p_1 dx}\mathfrak{y}, \quad z = e^{-\int q_1 d\xi}\mathfrak{z},$$

so erhalten wir für $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ die Differentialgleichungen

($\mathfrak{A}_2$) $$\frac{d^2\mathfrak{y}}{dx^2} + \left(p_2 - p_1'(x) - p_1^2\right)\mathfrak{y} = 0,$$

($\mathfrak{B}_2$) $$\frac{d^2\mathfrak{z}}{d\xi^2} + \left(q_2 - q_1'(\xi) - q_1^2\right)\mathfrak{z} = 0,$$

wo wir, wie auch stets im Folgenden, durch

$$f^{(\varkappa)}(t)$$

die $\varkappa^{\text{te}}$ Ableitung einer Function f nach dem beigeschriebenen Argumente t bezeichnen

Seien

$$\eta = \frac{\mathfrak{y}_2}{\mathfrak{y}_1}, \quad \zeta = \frac{\mathfrak{z}_2}{\mathfrak{z}_1}$$

die Quotienten der Elemente eines Fundamentalsystems von ($\mathfrak{A}_2$) beziehungsweise ($\mathfrak{B}_2$), dann ist (Nr. 179, S. 175, Gleich (2))

$$\mathfrak{y}_1 = \frac{c_1}{\sqrt{\eta'(x)}}, \quad \mathfrak{z}_1 = \frac{c_2}{\sqrt{\zeta'(\xi)}},$$

wo c_1, c_2 Constanten bedeuten Bilden wir nun die Ausdrücke

$$\frac{1}{\mathfrak{y}_1}\frac{d^2\mathfrak{y}_1}{dx^2} = \frac{\frac{3}{4}\eta''(x)^2 - \frac{1}{2}\eta^{(3)}(x)\eta'(x)}{\eta'(x)^2} = \varDelta\binom{\eta}{x},$$

$$\frac{1}{\mathfrak{z}_1}\frac{d^2\mathfrak{z}_1}{d\xi^2} = \frac{\frac{3}{4}\zeta''(\xi)^2 - \frac{1}{2}\zeta^{(3)}(\xi)\zeta'(\xi)}{\zeta'(\xi)^2} = \varDelta\binom{\zeta}{\xi},$$

so ist

(4) $$\varDelta\binom{\eta}{x} = p_1^{\,2} + p_1'(x) - p_2,$$

und dies ist nichts anderes wie die Differentialgleichung dritter Ordnung ($2n - 1 = 3$ für $n = 2$), der die Integralquotienten von (A_2) genügen Ebenso haben wir

(5) $$\varDelta\binom{\zeta}{\xi} = q_1^{\,2} + q_1'(\xi) - q_2.$$

Für den Differentialausdruck $\varDelta\binom{\eta}{x}$, der gewöhnlich als die Schwarz'sche Ableitung bezeichnet wird, gelten nun die leicht zu verificirenden Gleichungen

(a) $$\varDelta\binom{\eta}{x}dx^2 = -\varDelta\binom{x}{\eta}d\eta^2,$$

(b) $$\varDelta\binom{\eta}{x}dx^2 = \varDelta\binom{\eta}{\xi}d\xi^2 + \varDelta\binom{\xi}{x}dx^2;$$

wir haben folglich mit Rücksicht auf die Gleichung (4)

(6) $$\varDelta\binom{\xi}{x} = p_1^{\,2} + p_1'(x) - p_2 - \varDelta\binom{\eta}{\xi}\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2.$$

Wenn wir nunmehr ξ als Function von x durch die Gleichung

(7) $$\eta(x) = \zeta(\xi)$$

definiren, so ist also

(8) $$\varDelta\binom{\xi}{x} = p_1^{\,2} + p_1'(x) - p_2 - \left(q_1^{\,2} + q_1'(\xi) - q_2\right)\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2$$

eine Differentialgleichung für diese Function ξ, deren Coefficienten von den Coefficienten der Differentialgleichungen (A_2), (B_2) in einfachster Weise abhängen. Wir haben dann noch zwischen y und z die aus den Gleichungen (3) und (7) folgende Beziehung

$$y = e^{-\int p_1 dx + \int q_1 d\xi}\sqrt{\frac{dx}{d\xi}}\,z,$$

wodurch unsere Behauptung bewiesen ist.

Nimmt man speciell

$$q_1^2 + q_1'(\xi) - q_2 = 0,$$

so wird die Gleichung (8) mit (4) identisch; also ist in diesem Falle ξ selbst ein Integralquotient von (A_2); d. h. durch Einführung von η als unabhängiger Variabeln und durch die Transformation

$$y = e^{-\int p_1 dx} \frac{\zeta}{\sqrt{\eta'(x)}}$$

verwandelt sich (A_2) in die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = 0.$$

Wir werden sehr bald eine Verallgemeinerung dieses Ergebnisses auf den Fall einer Differentialgleichung m^{ter} Ordnung kennen lernen (Nr. 185, S 205).

Die linke Seite der Differentialgleichung (4) ist, da sie sich rational durch die Coefficienten von (A_2) und deren Ableitungen darstellen lässt, als Function von η aufgefasst, eine Differentialinvariante der allgemeinen projectiven Gruppe in η, d. h. der Gruppe

$$\bar{\eta} = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1;$$

wir haben also

$$\text{(c)} \qquad \Delta\binom{\eta}{x} = \Delta\begin{pmatrix}\frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta} \\ x\end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

und dadurch ist die Thatsache, dass das allgemeine Integral von (4) als linear gebrochene Function einer particularen Lösung η dargestellt werden kann, in Evidenz gesetzt.

181. Allgemeines über Invarianten. Algebraische Formen. Aequivalenz linearer Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung. Invarianten dieser Aequivalenz. Gewicht.

Wenn die Ordnungszahl n der Differentialgleichung (A) grösser ist wie zwei, so kann (A) nicht in jede lineare Differentialgleichung derselben Ordnung

$$\text{(B)} \qquad \frac{d^n z}{d\xi^n} + q_1 \frac{d^{n-1} z}{d\xi^{n-1}} + \cdots + q_n z = 0$$

durch die beiden Transformationen (1) und (2) übergeführt werden, sondern es müssen, wenn eine solche Ueberführung möglich sein soll, zwischen den Coefficienten der Gleichungen (A), (B) gewisse Beziehungen

bestehen. Ueber die Natur dieser Beziehungen können wir uns von vornherein durch einige allgemeine Bemerkungen orientiren.

Wenn man eine ganze rationale homogene Function m^{ten} Grades der n Unbestimmten $x_1, x_2, \cdots x_n$, eine sogenannte Form,

$$f = \sum_{(i_1, i_2, \cdots i_m)} a_{i_1 i_2 \cdots i_m} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m},$$

wo die Summation sich auf alle Combinationen der Zahlen $1, 2, \cdots n$ zu je m mit unbedingter Wiederholung bezieht, durch die lineare homogene Substitution

$$\text{(I)} \qquad x_\iota = \sum_{\varkappa=1}^{n} \alpha_{\iota\varkappa} \xi_\varkappa, \quad |\alpha_{\iota\varkappa}| \neq 0 \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

transformirt, so verwandelt sie sich in eine ebenso beschaffene Form der $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$

$$\varphi = \sum_{(i_1, i_2, \cdots i_m)} b_{i_1 i_2 \cdots i_m} \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_m}.$$

Wenn $n = 2$, $m = 2$ ist, d. h. für binäre quadratische Formen, weiss man, dass sich jede solche Form in jede andere durch eine lineare homogene Substitution transformiren lässt; für Formen höheren Grades und mit mehr als zwei Unbestimmten ist es dagegen im Allgemeinen nicht möglich, eine lineare Substitution von der Gestalt (I) anzugeben, die eine gegebene Form f in eine ebenfalls gegebene Form φ überführt.

Damit eine solche Ueberführung möglich sei, müssen zwischen den Coefficienten der beiden Formen f und φ gewisse Beziehungen bestehen. Man erhält diese Beziehungen, wenn man sich in f die Substitution (I) wirklich ausgeführt, dann die Coefficienten $b_{i_1 i_2 \cdots i_m}$ der so entstehenden Form als Functionen der $a_{i_1 i_2 \cdots i_m}$ und der $\alpha_{\iota\varkappa}$ hingeschrieben denkt und zwischen den so entstehenden Gleichungen, den sogenannten Transformationsrelationen, die $\alpha_{\iota\varkappa}$ eliminirt. Wie in der Algebra gezeigt wird (vergl. z. B. Aronhold, Ueber eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie, Crelle's Journal, Bd. 62, S. 281 ff), lässt sich das Resultat dieser Elimination, wenn man noch die Gleichung

$$\delta = |\alpha_{\iota\varkappa}| \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

hinzunimmt, im Allgemeinen in die Form setzen

$$\text{(II)} \qquad G_\lambda(b_{i_1, i_2, \cdots i_m}) = \delta^{\mu_\lambda} G_\lambda(a_{i_1, i_2, \cdots i_m}) \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots),$$

wo die G_λ ganze rationale homogene Functionen der sämmtlichen Grössen bedeuten, die aus der in der Parenthese geschriebenen Grösse

für alle in Betracht kommenden Werthesysteme der $i_1, i_2, \cdots i_m$ hervorgehen, während die μ_λ bestimmte positive ganze Zahlen sind.

Man nennt zwei Formen f und φ, die durch eine Transformation (I) in einander übergeführt werden können, (im algebraischen Sinne) aequivalent und hat also den Satz:

Damit zwei Formen f und φ aequivalent sind, ist nothwendig und (im Allgemeinen auch) hinreichend, dass gewisse homogene Functionen, gebildet aus den Coefficienten von f, sich von denselben ganzen homogenen Functionen, gebildet aus den Coefficienten von φ, nur durch Factoren unterscheiden, die wohlbestimmte Potenzen einer festen Grösse δ sind.

Diese ganzen homogenen Functionen G_λ haben die Eigenschaft, sich nur mit einer ganzen Potenz der Substitutionsdeterminante δ zu multipliciren, wenn man von der Form f zu der aequivalenten Form φ übergeht, man nennt dieselben die Invarianten der Form f und jene Potenz μ_λ das Gewicht der Invariante G_λ. Durch Quotientenbildung aus Potenzen dieser relativen Invarianten kann man zu Ausdrücken gelangen, die beim Uebergange von einer Form zu ihrer aequivalenten absolut ungeändert bleiben, und man hat dann als Bedingung für die Aequivalenz zweier Formen f und φ die Gleichheit ihrer so gebildeten absoluten Invarianten anzusehen

Die Ausdrücke der Coefficienten b der transformirten Form durch die Coefficienten a der ursprünglichen und die $\alpha_{\iota\varkappa}$ (die Transformationsrelationen) sind in den a linear, man kann sie also auffassen als eine lineare homogene Transformation der Grössen a in die Grössen b. Die Gesammtheit dieser Transformationen, die man erhält, wenn man die $\alpha_{i\varkappa}$ alle möglichen Werthe annehmen lässt, die durch die Ungleichung

$$|\alpha_{\iota\varkappa}| \neq 0 \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

beschränkt sind, bildet offenbar eine continuirliche n^2-gliedrige algebraische lineare homogene Gruppe in den Grössen a. Die absoluten Invarianten der Form f sind dann nichts anderes als die Invarianten dieser Gruppe.

Aehnlich wie bei der Aequivalenz algebraischer Formen ist es, wenn man nach den Bedingungen sucht, die erfüllt sein müssen, damit irgendwelche analytische Gebilde in irgend einem wohldefinirten Sinne aequivalent sein sollen Die Bedingungen ergeben sich stets in der Form, dass gewisse Invarianten dieser Aequivalenz für beide Gebilde übereinstimmen müssen.

Wir nennen zwei lineare Differentialgleichungen (A), (B) einander

aequivalent, sofern die eine aus der andern durch eine Transformation von der Gestalt

$$y = \lambda z, \quad x = \varphi(\xi)$$

hervorgeht. Wenn wir dann nach den Bedingungen fragen, die zwischen den Coefficienten von (A) und (B) bestehen müssen, damit diese Differentialgleichungen aequivalent seien, so erwarten wir nach dem eben dargelegten Princip, dass sich diese Bedingungen auch in der Form darstellen lassen werden, dass gewisse aus den Coefficienten von (A) gebildete Ausdrücke mit denselben Ausdrücken, gebildet aus den Coefficienten von (B), übereinstimmen.

Dass dies in der That der Fall ist, wollen wir nunmehr zeigen.

Wir wollen der Einfachheit wegen voraussetzen, dass in den beiden Differentialgleichungen (A), (B) der Coefficient der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung verschwindet, also

$$p_1 = 0, \quad q_1 = 0,$$

und überdies möge dem Coefficienten der $\varkappa^{\text{ten}}$ Ableitung $(\varkappa = 0, 1, \cdots n-2)$ der numerische Coefficient (Binomialcoefficient)

$$n_\varkappa = \frac{n(n-1) \quad (n-\varkappa+1)}{1 \;\; 2 \quad \varkappa}$$

als Factor vorgesetzt werden Wir haben also dann die gegebenen Differentialgleichungen in der Form

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + n_2 p_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + p_n y = 0,$$

$$\text{(B)} \qquad \frac{d^n z}{d\xi^n} + n_2 q_2 \frac{d^{n-2} z}{d\xi^{n-2}} + \cdots + q_n z = 0.$$

Soll nun

$$y = \lambda z, \quad \xi = \psi(x), \quad x = \varphi(\xi)$$

sein, so folgt zunächst durch Ausführung der Substitution

$$y = \lambda z$$

in (A) für z als Function von x die Differentialgleichung (vergl. Nr. 172, S. 145)

$$(\overline{\text{A}}) \qquad \frac{d^n z}{dx^n} + n \frac{\lambda'(x)}{\lambda} \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + n_2 \left(p_2 + \frac{\lambda''(x)}{\lambda}\right) \frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} + \cdots = 0.$$

Führen wir in dieser Differentialgleichung an die Stelle von x die neue unabhängige Variable ξ ein, so haben wir zunächst die Ableitungen von z nach x durch die Ableitungen von z nach ξ darzustellen. Man findet

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{d\xi}\xi'(x),$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z}{d\xi^2}\xi'(x)^2 + \frac{dz}{d\xi}\xi''(x),$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = \frac{d^3z}{d\xi^3}\xi'(x)^3 + 3\frac{d^2z}{d\xi^2}\xi''(x)\xi'(x) + \frac{dz}{d\xi}\xi^{(3)}(x),$$

allgemein ist nach einer von Herrn Schlömilch gegebenen Formel

$$\frac{d^m z}{dx^m} = \sum_{\varkappa=1}^{m} \frac{A_{m\varkappa}}{\varkappa!}\frac{d^\varkappa z}{d\xi^\varkappa} \qquad (m=1, 2, 3 \cdot\ ),$$

wo $A_{m\varkappa}$ als ganze Function der Ableitungen von

$$\xi = \varphi(x)$$

durch die Gleichungen

$$A_{m\varkappa} = \lim_{\varrho=0} \frac{d^m}{d\varrho^m}(\varphi(x+\varrho) - \varphi(x))^\varkappa$$

definirt werden kann. Es ist also z. B.

$$A_{mm} = m!\,\varphi'(x)^m,$$

$$A_{m,m-1} = (m-1)!\,m_2\varphi''(x)\varphi'(x)^{m-2}.$$

Setzt man diese Werthe in (A) ein, so muss die so entstehende Differentialgleichung für z als Function von ξ mit (B) übereinstimmen. Man findet nach Herrn Forsyth allgemein durch Coefficientenvergleichung:

(9) $$\frac{\lambda\xi'(x)^n}{(n-\varkappa)!}q_{n-\varkappa} = \sum_{\iota=0}^{n-\varkappa}\sum_{\nu=0}^{n-\iota-\varkappa} \frac{p_\iota A_{n-\iota-\nu,\varkappa}}{\iota!\,\nu!\,(n-\iota-\nu)!}\lambda^{(\nu)}(x) \qquad (\varkappa=0, 1, 2, \quad n-1)$$

wo $p_0 = 1$, $p_1 = 0$ zu nehmen ist. Da $q_1 = 0$ sein sollte, ergiebt sich für $\varkappa = n-1$

(10) $$\frac{\lambda'(x)}{\lambda} = -\frac{n-1}{2}\frac{\xi''(x)}{\xi'(x)},$$

dadurch ist also in diesem Falle der Factor λ festgelegt; berücksichtigt man diesen Werth von λ und setzt

$$\frac{\xi''(x)}{\xi'(x)} = Z,$$

so hat man

(11) $$q_2\xi'(x)^2 = p_2 + \frac{n+1}{2\ \ 3}\left(\frac{1}{2}Z^2 - Z'(x)\right),$$

(12) $$q_3\xi'(x)^3 = p_3 - 3p_2Z + \frac{n+1}{4}(Z''(x) - 3Z'(x)Z + Z^3),$$

u s. w.

Der Process der Herstellung von Bedingungen dafür, dass die Transformation der Gleichungen (A), (B) in einander möglich sei, be-

steht nun darin, dass man aus den „Transformationsrelationen" (9) und den sich daraus durch Differentiation ergebenden Beziehungen zwischen den Ableitungen der Coefficienten $p_\varkappa$ und $q_\varkappa$ die Ableitungen von λ und ξ nach x zu eliminiren sucht.

Diese Elimination kann nun so bewirkt werden, dass die Resultate derselben in der eigenthümlichen separirten Form erscheinen:

$$\xi'(x)^\varkappa G_\varkappa\left(q_2, \cdot\ \ q_n, \frac{dq_2}{d\xi}, \cdot\cdot\right) = G_\varkappa\left(p_2, \cdots p_n, \frac{dp_2}{dx}, \cdot\cdot\right),$$

wo die $G_\varkappa$ ganze Functionen der Coefficienten q und ihrer Ableitungen beziehungsweise der p und ihrer Ableitungen bedeuten.

Z B. ergiebt sich, wenn man die Gleichung (11) differentiirt:

$$\frac{dq_2}{d\xi}\xi'(x)^3 = \frac{dp_2}{dx} - 2p_2 Z + \frac{n+1}{2\cdot 3}(Z''(x) - 3Z'(x)Z + Z^3),$$

und nach (12) ist folglich

$$(13) \qquad \left(q_3 - \frac{3}{2}\frac{dq_2}{d\xi}\right)\xi'(x)^3 = p_3 - \frac{3}{2}\frac{dp_2}{dx};$$

man nennt den Ausdruck

$$p_3 - \frac{3}{2}\frac{dp_2}{dx} = \vartheta_3(x),$$

der sich also von dem entsprechenden Ausdrucke gebildet aus den Coefficienten von (B)

$$q_3 - \frac{3}{2}\frac{dq_2}{d\xi} = \vartheta_3(\xi)$$

nur durch die dritte Potenz der Grösse $\xi'(x)$ als Factor unterscheidet, eine Invariante vom Gewichte drei.

Betrachtet man die Gleichungen (9), unter Berücksichtigung von (10), für

$$\varkappa = n-2,\ n-3, \cdots n-\nu,$$

differentiirt die erste $(\nu-2)$-mal, die zweite $(\nu-3)$-mal u. s. f, die vorletzte einmal, so kann man eine ganze Function der

$$(14) \qquad q_2, \cdots q_\nu, \frac{dq_2}{d\xi}, \cdots \frac{dq_{\nu-1}}{d\xi}, \cdots, \frac{d^{\nu-2}q_2}{d\xi^{\nu-2}}$$

finden, wir bezeichnen dieselbe durch

$$\vartheta_\nu(\xi),$$

die so beschaffen ist, dass, wenn man sie mit der ν^{ten} Potenz von $\xi'(x)$ multiplicirt und für die Grössen (14) ihre Ausdrücke durch die $p_\varkappa$ und deren Ableitungen einsetzt, sich dieselbe ganze Function

$$\vartheta_\nu(x)$$

der Grössen

$$p_2, \cdots p_\nu, \frac{dp_2}{dx}, \cdots \frac{dp_{\nu-1}}{dx}, \cdots, \frac{d^{\nu-2}p_2}{dx^{\nu-2}}$$

ergiebt. Es ist also

$$(15) \qquad \xi'(x)^\nu \vartheta_\nu(\xi) = \vartheta_\nu(x),$$

und man nennt ϑ_ν eine Invariante vom Gewichte ν.

Auf diese Weise erhalten wir für

$$\nu = 3, 4, \cdots n$$

im Ganzen $n-2$ solche Invarianten, und die Gleichungen (15) stellen im Allgemeinen, wenn man noch $\xi'(x)$ als eine unbestimmte Grösse ansieht, das Resultat der Elimination aus den Transformationsrelationen (9) dar; sie liefern also die nothwendigen und (im Allgemeinen auch) hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Gleichungen (9) bestehen, oder was dasselbe heisst, dafür, dass die Gleichungen (A), (B) durch die Transformation

$$y = \lambda z, \quad x = \varphi(\xi),$$

wo λ durch die Gleichung (10) bestimmt ist und $\varphi(\xi)$ durch

$$\varphi(\xi) = \int \frac{d\xi}{\xi'(x)}$$

gegeben wird, in einander übergehen.

Betrachtet man die Gleichungen (9) — immer unter Berücksichtigung von (10) — als Definitionsgleichungen einer gewissen Transformation der Coefficienten $p_2, \cdots p_n$ in die $q_2, \cdots q_n$, so ist klar, dass die Gesammtheit dieser Transformationen, die für alle möglichen Wahlen der Function $x = \varphi(\xi)$ zum Vorschein kommen, eine continuirliche Gruppe bilden. Die Invarianten ϑ_ν stellen dann für $\nu = 3, 4, \cdots n$ ein System von relativen Differentialinvarianten dieser Gruppe dar, von welchem man durch Potenziren und Quotientenbildung zu einem Systeme von $n-3$ absoluten Differentialinvarianten übergehen kann.

182 Bestimmung der Form der Invarianten. Infinitesimale Transformation einer Differentialgleichung in eine aequivalente.

Wir wollen nunmehr einige Sätze kennen lernen, die Herr Forsyth für solche Invarianten aufgestellt hat, und die uns auch dazu dienen werden, die expliciten Ausdrücke für dieselben zu finden.

Es möge zunächst jedem Coefficienten der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung (A) eine gewisse Dimension beigelegt werden; p_x möge

die Dimension $-\varkappa$ haben. Ebenso könnten wir z. B. der abhängigen Variabeln y eine gewisse Dimension beilegen, die im Uebrigen ganz willkürlich angenommen werden kann, wir wollen sagen m. Dann setzen wir fest, dass sich die Dimension einer Function von x durch jede Differentiation nach x um eine Einheit erniedrigt, so dass also $y^{(\varkappa)}(x)$ die Dimension $m-\varkappa$, und $p_\nu^{(i)}(x)$ die Dimension $-\varkappa-i$ erhält Die Dimension des Gliedes

$$p_\varkappa y^{(n-\varkappa)}(x)$$

der linken Seite von (A) ist gleich der Summe der Dimensionen der beiden Factoren, d. h.

$$m-(n-\varkappa)-\varkappa=m-n,$$

somit für jeden Term von (A) dieselbe Ganz ebenso verfahren wir mit der Differentialgleichung (B), wir legen also dem $q_\varkappa^{(i)}(\xi)$ die Dimension $-\varkappa-i$ und $z^{(\varkappa)}(\xi)$ die Dimension $m-\varkappa$ bei.

Betrachten wir nun eine Gleichung

$$\xi'(x)^\mu\,\Theta(\xi)=\Theta(x), \tag{16}$$

wo $\Theta(x)$ eine ganze Function der $p_\varkappa$ und ihrer Ableitungen nach x, $\Theta(\xi)$ dieselbe Function der $q_\varkappa$ und ihrer Ableitungen nach ξ bedeutet, so ergeben sich aus der Gestalt der Relationen (9) und der aus denselben durch Differentiation hervorgehenden Gleichungen ohne weiteres die beiden Sätze:

Auf jeder Seite der Gleichung (16) haben alle auftretenden Terme dieselbe Dimension, und

beide Seiten dieser Gleichung haben dieselbe Dimension sowohl in Bezug auf x als auch in Bezug auf ξ.

Sei $-\sigma$ die Zahl, welche die Dimension von $\Theta(x)$ in Bezug auf x angiebt, so ist also auch $\Theta(\xi)$ von der Dimension $-\sigma$ in Bezug auf ξ. Der Grösse $\xi'(x)$ muss in Bezug auf ξ die Dimension $+1$, in Bezug auf x die Dimension -1 beigelegt werden; also ist $\mu-\sigma$ die Dimension von $\xi'(x)^\mu\,\Theta(\xi)$ in Bezug auf ξ und $-\mu$ die Dimension derselben Grösse in Bezug auf x, da $\Theta(\xi)$ in Bezug auf x als von der Dimension Null anzusehen ist Dagegen ist $\Theta(x)$ in Bezug auf ξ von der Dimension Null, in Bezug auf x von der Dimension $-\sigma$ Wir haben folglich

$$\mu-\sigma=0,\quad -\mu=-\sigma,$$

es muss also, wenn Θ eine Function von der Dimension $-\sigma$ ist, die Zahl μ, d. h. das Gewicht der Invariante Θ, gleich σ sein.

Auf Grund dieses Ergebnisses sind wir sofort im Stande, die Form einer Invariante Θ_ν vom Gewichte ν hinzuschreiben

Da z. B. für $\nu = 3$ p_3 und $p_2'(x)$ die einzigen in Betracht kommenden Grössen von der Dimension -3 sind, so muss

$$\Theta_3(x) = ap_3 + bp_2'(x)$$

sein, wo a, b numerische Constanten bedeuten (vergl. den Ausdruck für $\vartheta_3(x)$ auf S. 190) Ebenso ist für $\nu = 4$

$$\Theta_4(x) = ap_4 + bp_3'(x) + cp_2''(x) + \partial p_2^2, \tag{17}$$

und für $\nu = 5$

$$\Theta_5(x) = ap_5 + bp_4'(x) + cp_3^{(2)}(x) + \partial p_2^{(3)}(x) + ep_2p_3 + fp_2p_2'(x) \tag{18}$$

u. s. w.

In ähnlicher Weise kann man bekanntlich in der Invariantentheorie der algebraischen Formen die Gestalt einer Invariante von vorgeschriebenem Gewichte angeben; für die Bestimmung der constanten (numerischen) Factoren bedient man sich dann gewisser partieller Differentialgleichungen, denen jede Invariante genügen muss und die nichts anderes besagen, als dass die Invariante bei den infinitesimalen Transformationen der durch die Transformationsrelationen dargestellten Gruppe (vergl. Nr. 181, S 187), abgesehen von einer Potenz der Substitutionsdeterminante, ungeändert bleibt.

Genau ebenso lassen sich nun auch die in den Ausdrücken der Θ_ν auftretenden Constanten bestimmen, wenn man die Unveränderlichkeit (abgesehen von dem Factor $\xi'(x)^\nu$) dieser Invarianten bei der „infinitesimalen Transformation“ der durch die Gleichungen (9) dargestellten Gruppe von Transformationen der $p_2, p_3, \cdot\ p_n$ in Evidenz setzt Was man in diesem Falle unter der infinitesimalen Transformation zu verstehen hat, ist leicht zu erkennen.

Eine Transformation der Gruppe (9) wird bestimmt durch Fixirung der Function

$$\xi = \varphi(x),$$

da ja die Function λ durch die Gleichung (10) festgelegt ist, wenn man $\varphi(x)$ kennt Nehmen wir also für $\varphi(x)$ eine Function, die sich unendlich wenig von x unterscheidet, d h. setzen wir

$$\xi = x + \varepsilon\chi(x), \tag{19}$$

wo ε eine unendlich kleine von x unabhängige Grösse, $\chi(x)$ eine willkürliche Function von x bedeutet, so stellen die dieser Wahl von $\varphi(x)$ entsprechenden Gleichungen (9) jene infinitesimale Transformation dar. Die Function λ bestimmt sich dann nach (10) durch die Gleichung

$$\lambda = \text{const.}\ (\xi'(x))^{-\frac{1}{2}(n-1)},$$

wenn wir also die Constante der Integration gleich Eins wählen, so haben wir

$$\lambda = (1 + \varepsilon\chi'(x))^{-\frac{1}{2}(n-1)}$$

Entwickeln wir auf der rechten Seite dieser Gleichung nach Potenzen der unendlich kleinen Grösse ε und vernachlässigen die zweite und die höheren Potenzen derselben, so kommt

$$\lambda = 1 - \frac{1}{2}(n-1)\varepsilon\chi'(x)$$

und hiernach

$$\lambda^{(\varkappa)}(x) = -\frac{1}{2}(n-1)\varepsilon\chi^{(\varkappa+1)}(x).$$

Führen wir diese Ausdrücke in die Gleichungen (9) ein, so ergiebt sich, wenn die höheren Potenzen von ε immer vernachlässigt werden und $\varkappa$ an Stelle von $n-\varkappa$ gesetzt wird,

$$(20)\quad q_\varkappa = p_\varkappa(1 - \varkappa\varepsilon\chi'(x)) - \frac{1}{2}\varepsilon\sum_{i=0}^{\varkappa-1}\varkappa_i\frac{(n+1)(\varkappa-i-1)+2i}{\varkappa-i+1}p_i\chi^{(\varkappa-i+1)}(x);$$

dies ist die gesuchte infinitesimale Transformation. Dieselbe muss nun durch Differentiation „erweitert“ werden; man findet

$$(21)\quad \frac{d^\nu q_\varkappa}{d\xi^\nu} = \frac{d^\nu p_\varkappa}{dx^\nu}(1 - (\nu+\varkappa)\varepsilon\chi'(x)) - \varkappa\varepsilon p_\varkappa\chi^{(\nu+1)}(x)$$
$$- \varepsilon\sum_{i=1}^{\nu-1}\nu_i\frac{\varkappa(\nu+1) - i(\varkappa-1)}{\nu-i+1}\frac{d^i p_\varkappa}{dx^i}\chi^{(\nu-i+1)}(x)$$
$$- \frac{1}{2}\varepsilon\sum_{i=0}^{\varkappa-1}\varkappa_i\frac{(n+1)(\varkappa-i-1)+2i}{\varkappa-i+1}\frac{d^\nu}{dx^\nu}\left(p_i\chi^{(\varkappa-i+1)}(x)\right).$$

Setzt man die sich aus (20), (21) ergebenden Werthe der $q_\varkappa$ und ihrer Ableitungen in den, abgesehen von den constanten (numerischen) Coefficienten, aufgestellten Ausdruck einer Invariante $\Theta_\nu(\xi)$ ein, so muss

$$\xi'(x)^\nu\Theta_\nu(\xi) = \Theta_\nu(x),$$

also, da nach (19)

$$\xi'(x)^\nu = 1 + \nu\varepsilon\chi'(x)$$

zu nehmen ist,

$$(1 + \nu\varepsilon\chi'(x))\,\Theta_\nu(\xi) = \Theta_\nu(x)$$

sein, und diese Gleichung muss identisch bestehen. Daraus ergeben sich nun die erforderlichen Bestimmungsgleichungen für die noch unbekannten numerischen Coefficienten der Invariante $\Theta_\nu(x)$.

183 **Explicite Form der linearen Invarianten vom Gewichte 3, 4, 5, 6, 7 und des linearen Theiles derselben für beliebiges Gewicht.**

Nehmen wir, da für $\nu = 3$, abgesehen von einem constanten Factor, keine andere Invariante wie die bereits gefundene $\vartheta_3(x)$ existiren kann, den Fall $\nu = 4$, wo also $\Theta_4(\xi)$ in der Form (17) darstellbar sein muss Nach (20) ist für $\varkappa = 2$

$$q_2 = p_2(1 - 2\varepsilon\chi'(x)) - \frac{1}{6}(n+1)\varepsilon\chi^{(3)}(x),$$

also, immer wieder unter Vernachlässigung der höheren Potenzen von ε,

$$q_2^2 = p_2^2(1 - 4\varepsilon\chi'(x)) - \frac{1}{3}(n+1)\varepsilon\chi^{(3)}(x)p_2$$

und für $\varkappa = 4$

$$q_4 = p_4(1 - 4\varepsilon\chi'(x)) - 6\varepsilon\chi''(x)p_3 - (n+5)\varepsilon\chi^{(3)}(x)p_2 - \frac{3}{10}(n+1)\varepsilon\chi^{(5)}(x);$$

ferner hat man nach (21)

$$\frac{dq_3}{d\xi} = \frac{dp_3}{dx}(1 - 4\varepsilon\chi'(x)) - 3\varepsilon\chi''(x)p_3 - 3\varepsilon\frac{d}{dx}(p_2\chi''(x)) - \frac{n+1}{4}\varepsilon\chi^{(5)}(x),$$

$$\frac{d^2q_2}{d\xi^2} = \frac{d^2p_2}{dx^2}(1 - 4\varepsilon\chi'(x)) - 5\varepsilon\chi''(x)\frac{dp_2}{dx} - 2\varepsilon\chi^{(3)}(x)p_2 - \frac{n+1}{6}\varepsilon\chi^{(5)}(x).$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung

$$\left(aq_4 + bq_3'(\xi) + cq_2''(\xi) + \partial q_2^2\right)(1 + 4\varepsilon\chi'(x)) = ap_4 + bp_3'(x) + cp_2''(x) + \partial p_2^2$$

ein, so kommt nach Division durch $-\varepsilon$

$$a\left\{6\chi''(x)p_3 + (n+5)\chi^{(3)}(x)p_2 + \frac{3}{10}(n+1)\chi^{(5)}(x)\right\} + \frac{1}{3}\partial(n+1)\chi^{(3)}(x)p_3$$
$$+ b\left\{3\chi''(x)p_3 + 3\frac{d}{dx}(p_2\chi''(x)) + \frac{n+1}{4}\chi^{(5)}(x)\right\}$$
$$+ c\left\{5\chi''(x)p_2'(x) + 2\chi^{(3)}(x)p_2 + \frac{n+1}{6}\chi^{(5)}(x)\right\} = 0,$$

woraus sich

$$b = -2a,$$
$$c = \frac{6}{5}a,$$
$$\partial = -\frac{3}{5}\,\frac{5n+7}{n+1}\,a,$$

also für $a = 1$

$$\Theta_4(x) = \vartheta_4(x) = p_4 - 2p_3'(x) + \frac{6}{5}p_2''(x) - \frac{3}{5}\,\frac{5n+7}{n+1}\,p_2^2$$

ergiebt. Auf ähnliche Weise findet man für $\nu = 5$

$$\Theta_5(x) = \vartheta_5(x) = p_5 - \frac{5}{2} p_4'(x) + \frac{15}{7} p_3''(x) - \frac{5}{7} p_2^{(3)}(x)$$
$$- \frac{10}{7} \frac{7n+13}{n+1} p_2 \vartheta_3(x).$$

Wendet man das gleiche Verfahren zur Bestimmung der Invariante vom Gewichte 6 an, so bleibt nicht wie bei $\nu = 3, 4, 5$ nur ein Coefficient (der als constanter Factor unwesentlich ist), sondern es bleiben zwei Coefficienten willkürlich. Dies hängt mit dem Umstande zusammen, dass ja offenbar ϑ_3^2 eine Invariante vom Gewichte 6 ist, so dass also, wenn ϑ_6 eine specielle Invariante dieses Gewichts bedeutet, auch

$$a\left(\vartheta_6 + b\vartheta_3^2\right)$$

eine Invariante vom Gewichte 6, und zwar, da sie zwei willkürliche Constanten a, b enthält, die allgemeinste Invariante dieses Gewichtes sein wird In der That zeigt sich auch, dass der zweite bei Bestimmung von Θ_6 willkürlich bleibende Coefficient mit ϑ_3^2 multiplicirt ist Wir werden diejenige Invariante vom Gewichte 6, die man erhält, wenn dieser Coefficient gleich Null gewählt wird, durch ϑ_6 bezeichnen. Es ergiebt sich

$$\vartheta_6(x) = p_6 - 3p_5'(x) + \frac{10}{3} p_4''(x) - \frac{5}{3} p_3^{(3)}(x) + \frac{5}{14} p_2^{(4)}(x) - 5\frac{3n+7}{n+1} p_2 \vartheta_4(x)$$
$$- \frac{7n+8}{14(n+1)}\left(4p_2 p_2^{(2)}(x) - 5p_2'(x)^2\right) - \frac{3}{7} \frac{35n^2+112n+93}{(n+1)^2} p_2^3$$

Da für $\nu = 7$ das Product $\vartheta_3\vartheta_4$ eine Invariante vom Gewichte 7 ist, so werden bei Bestimmung von Θ_7 auch zwei Coefficienten willkürlich bleiben, von denen der eine ein constanter Factor, der andere mit $\vartheta_3\vartheta_4$ multiplicirt ist. Die bei Anullirung des letzteren sich ergebende Invariante bezeichnen wir durch ϑ_7, dieselbe ist

$$\vartheta_7(x) = p_7 - \frac{7}{2} p_6'(x) + \frac{105}{22} p_5''(x) - \frac{35}{11} p_4^{(3)}(x) + \frac{35}{33} p_3^{(4)}(x) - \frac{7}{44} p_2^{(5)}(x)$$
$$- \frac{21}{11} \frac{11n+13}{n+1} p_2 \vartheta_5(x) - \frac{9}{22} \frac{385n^2+1728n+1919}{(n+1)^2} p_2^2 \vartheta_3(x)$$
$$- \frac{3(n+4)}{11(n+1)^3}\left(10p_2\vartheta_3''(x) - 35p_2'(x)\vartheta_3'(x) + 3p_2''(x)\vartheta_3(x)\right).$$

Von diesen Ausdrücken, die wir durch das an den Beispielen $\nu = 4, 5, 6, 7$ dargelegte und allgemein angedeutete Verfahren erhalten, wäre a posteriori noch nachzuweisen, dass es auch wirklich Invarianten sind. Man kann diesen Nachweis führen, indem man zeigt, dass ein Ausdruck, dessen sämmtliche Terme in dem angegebenen Sinne dieselbe Dimension haben und der bei der infinitesimalen Trans-

formation (19) die Invarianteneigenschaft besitzt, auch für die beliebige, $\xi = \varphi(x)$ entsprechende Transformation (relativ) invariant bleiben muss Man hat sich hierbei des Princips zu bedienen, wonach eine endliche Variation durch Superposition infinitesimaler Variationen erzeugt werden kann; wir gehen auf diesen Nachweis nicht näher ein.

Die so bestimmten Invarianten haben, wie wir an den ausgerechneten Beispielen sehen, die Eigenschaft, aus einem in den Coefficienten der Differentialgleichung und deren Ableitungen linearen und einem mit p_2 oder einer Ableitung von p_2 multiplicirten nicht linearen Theile zu bestehen. Herr Forsyth nennt sie aus einem sehr bald darzulegenden Grunde lineare Invarianten.

Für den linearen Theil einer Invariante vom Gewichte ν hat Herr Brioschi die folgende Formel aufgestellt

$$\sum_{i=0} A_{\nu i}\left[p_{\nu-2i}^{(2i)}(x) - \frac{(\nu-2i)(\nu-2i-1)}{2(2i+1)(\nu-i+1)} p_{\nu-2i-1}^{(2i+1)}(x)\right],$$

woselbst

$$A_{\nu 0} = 1, \quad A_{\nu, i+1} = \frac{(\nu-2i-2)(\nu-2i-1)^2(\nu-2i)}{4(i+1)(2i+1)(\nu-i-1)(2\nu-2i-3)} A_{\nu, i}$$

zu nehmen ist. Indem man der Invariante Θ_ν mit geeigneten numerischen Factoren multiplicirte Producte von der Form

$$\Theta_\varrho \Theta_{\nu-\varrho} \qquad (\varrho < \nu)$$

hinzufügt, kann man, wie Herr Forsyth gezeigt hat, auch für $\nu > 7$ bewirken, dass die nicht linearen Glieder der so entstehenden Invariante vom Gewichte ν entweder p_2 oder eine Ableitung von p_2 als Factoren enthalten. Die so normirten Invarianten sind dann eindeutig bestimmt (abgesehen von einem constanten Factor), wir wollen dieselben mit ϑ_ν bezeichnen. Zu bemerken ist noch, dass die linearen Theile der Invarianten, wie aus dem Brioschi'schen Ausdrucke ersichtlich ist, von n unabhängig sind.

Die $n-2$ linearen Invarianten $\vartheta_3, \vartheta_4, \cdots \vartheta_n$ können auf eine besonders einfache Form gebracht werden, wenn man noch in geeigneter Weise über die unabhängige Variable ξ der transformirten linearen Differentialgleichung verfügt Bisher war nämlich nur durch die Forderung $q_1 = 0$ der Factor λ festgelegt (vergl. Gleichung (10) S 189), während $\xi = \varphi(x)$ noch ganz willkürlich gewählt werden konnte Fügen wir jetzt noch die Forderung

$$q_2 = 0$$

hinzu, so ergiebt die Gleichung (11) (S 189)

$$2Z'(x) = Z^2 + \frac{12}{n+1} p_2;$$

setzen wir also

$$Z = \frac{\xi''(x)}{\xi'(x)} = -\frac{2\zeta'(x)}{\zeta(x)},$$

so genügt die so definirte Function ζ von x der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

(22) $$\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{3}{n+1}p_2\zeta = 0,$$

und es ist

(23) $$\lambda = \zeta^{n-1}, \quad \xi'(x) = \frac{1}{\zeta^2}.$$

Die aus (A) durch die Transformation

$$y = \zeta^{n-1}z, \quad \xi = \int\frac{dx}{\zeta^2}$$

hervorgehende Differentialgleichung (B) ist also so beschaffen, dass in derselben

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 0$$

ist; die Reduction von (A) auf diese canonische Form erfolgt durch Integration der linearen Differentialgleichung (22) und Ausübung einer Quadratur.

Für $n = 2$ liefert dies die in der Nr. 181 (S. 185) ausgeführte Reduction auf die Form

$$\frac{d^2z}{d\xi^2} = 0.$$

Für diese canonische Form reduciren sich also die Invarianten $\vartheta_3, \vartheta_4, \dots \vartheta_n$ auf ihre in den Coefficienten der Differentialgleichung und deren Ableitungen linearen Theile, da die nicht linearen Theile entweder mit q_2 oder einer Ableitung von q_2 multiplicirt sind; in diesem Falle sind jene Invarianten also wirklich linear, und dies ist der Grund für die von Herrn Forsyth gewählte Bezeichnung derselben als lineare Invarianten. Wir werden im Folgenden von dieser canonischen Form wenig Gebrauch machen, weil im Allgemeinen die Coefficienten derselben transcendente Functionen der unabhängigen Variabeln ξ sind, auch wenn die Coefficienten der ursprünglichen Differentialgleichung (A) rational oder algebraisch vorausgesetzt werden.

Wir hatten vorausgesetzt, dass in der Differentialgleichung (A) der Coëfficient der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung von y gleich Null sei, und hatten ferner die Transformation, durch welche (A) in (B) übergeführt wird, so eingerichtet, dass auch in (B) die $(n-1)^{\text{te}}$ Ableitung von z nicht vorkommt. Es hat nun keine Schwierigkeit, sich von dieser Voraussetzung zu befreien und die Theorie der Aequivalenz zweier „vollstän-

diger" linearer Differentialgleichungen zu entwickeln In der That, wenn die beiden vollständigen Differentialgleichungen

(A) $$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n y = 0,$$

(B) $$\frac{d^n z}{d\xi^n} + q_1 \frac{d^{n-1} z}{d\xi^{n-1}} + \cdots + q_n z = 0$$

durch eine Transformation von der Form

$$y = \lambda z, \quad \xi = \varphi(x)$$

in einander übergehen, so gehen die Differentialgleichungen

($\mathfrak{A}$) $$\frac{d^n \mathfrak{y}}{dx^n} + \mathfrak{p}_2 \frac{d^{n-2} \mathfrak{y}}{dx^{n-2}} + \cdots + \mathfrak{p}_n \mathfrak{y} = 0,$$

($\mathfrak{B}$) $$\frac{d^n \mathfrak{z}}{d\xi^n} + \mathfrak{q}_2 \frac{d^{n-2} \mathfrak{z}}{d\xi^{n-2}} + \cdots + \mathfrak{q}_n \mathfrak{z} = 0,$$

wo (vergl. Nr. 172, S. 146)

$$y = e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx}\,\mathfrak{y}, \quad z = e^{-\frac{1}{n}\int q_1 d\xi}\,\mathfrak{z}$$

gesetzt wurde, durch die Transformation

$$\mathfrak{y} = \lambda \cdot e^{\left(\frac{1}{n}\int p_1 dx - \frac{1}{n}\int q_1 d\xi\right)}\,\mathfrak{z}, \quad \xi = \varphi(x)$$

aus einander hervor, d h. (A), (B) sind dann und nur dann einander aequivalent, wenn ($\mathfrak{A}$), ($\mathfrak{B}$) einander aequivalent sind.

Wir haben also, um die Bedingungen der Aequivalenz für die vollständigen Differentialgleichungen (A), (B) aufzustellen, nur die Ausdrücke der Invarianten $\vartheta_3, \vartheta_4, \cdots \vartheta_n$, gebildet aus den Coefficienten von ($\mathfrak{A}$) beziehungsweise ($\mathfrak{B}$), darzustellen durch die Coefficienten von (A) beziehungsweise (B), was mit Hülfe der Formeln der Nr. 172 (S. 147) leicht geschehen kann.

Sechstes Kapitel.

184. Quadrinvarianten. Absolute Invarianten. Differentialgleichung für eine aus den Integralen der gegebenen Gleichung gebildete Form.

Aus den $(n-2)$ linearen Invarianten $\vartheta_3, \vartheta_4, \cdots \vartheta_n$ kann man durch mannigfaltige Processe andere Invarianten herleiten. Besonders wichtig sind die von Herrn Forsyth sogenannten Quadrinvarianten vom Gewichte zwei, die sich auf folgende Weise ergeben.

Wenn wir die Gleichung

$$\xi'(x)^\nu \vartheta_\nu(\xi) = \vartheta_\nu(x)$$

logarithmisch differentiiren, so erhalten wir

$$\nu Z = \frac{d \log \vartheta_\nu(x)}{dx} - \frac{d \log \vartheta_\nu(\xi)}{d\xi}$$

und durch abermalige Differentiation

$$\nu Z'(x) = \frac{d^2 \log \vartheta_\nu(x)}{dx^2} - Z\xi'(x)\frac{d \log \vartheta_\nu(\xi)}{d\xi} - \xi'(x)^2 \frac{d^2 \log \vartheta_\nu(\xi)}{d\xi^2}$$

Setzt man die sich hieraus ergebenden Werthe von Z^2, $Z'(x)$ in die Gleichung (11) (S. 189) ein, so kommt

$$\xi'(x)^2 \Phi_\nu(\xi) = \Phi_\nu(x),$$

wenn

$$\Phi_\nu(x) = 2\nu \frac{d^2 \log \vartheta_\nu(x)}{dx^2} - (2\nu+1)\left(\frac{d \log \vartheta_\nu(x)}{dx}\right)^2 - \frac{12\nu^2}{n+1} p_2$$

gesetzt wird. Diese Ausdrücke für $\nu = 3, 4, \cdots n$ sind jene Quadrinvarianten; sie reduciren sich für die canonische Form $(q_2 = 0)$ der Differentialgleichung (B) auf

$$\Phi_\nu(\xi) = \frac{1}{\vartheta_\nu^2(\xi)}\left\{2\nu\vartheta_\nu\vartheta_\nu''(\xi) - (2\nu+1)\vartheta_\nu'(\xi)^2\right\}.$$

Die Invariante Φ_ν wird offenbar dann und nur dann illusorisch, wenn die Invariante ϑ_ν identisch verschwindet.

Mit Hülfe dieser $2n-4$ Invarianten ϑ_ν, Φ_ν $(\nu = 3, 4, \cdots n)$ können wir nun sofort absolute Invarianten, d. h. solche Ausdrücke bilden,

die vollständig ungeändert bleiben, wenn wir in denselben die Coefficienten $p_2, p_3, \cdots p_n$ von (A) durch die Coefficienten der transformirten Differentialgleichung (B) ersetzen. Solche absolute Invarianten sind z. B.

$$\frac{\vartheta_\nu^{\,\mu}}{\vartheta_\mu^{\,\nu}}, \quad \frac{\vartheta_\nu^{\,2}}{\Phi_\nu^{\,\nu}};$$

durch logarithmische Differentiation derselben ergeben sich die (relativen) Invarianten vom Gewichte Eins:

$$(24) \qquad \begin{cases} \mu \dfrac{\vartheta_\nu'}{\vartheta_\nu} - \nu \dfrac{\vartheta_\mu'}{\vartheta_\mu} = \delta_{\nu\mu}, \\ 2 \dfrac{\vartheta_\nu'}{\vartheta_\nu} - \nu \dfrac{\Phi_\nu'}{\Phi_\nu} = \varepsilon_\nu. \end{cases}$$

Für die explicite Berechnung der linearen Invarianten hat Herr Brioschi noch ein zweites Verfahren angegeben, welches wir auch schon aus dem Grunde darlegen wollen, weil sich daran folgenreiche Erwägungen anknüpfen lassen.

Wir schicken die folgende einfache Bemerkung voraus

Hat man eine homogene lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung (A) mit irgendwie beschaffenen Coefficienten, für welche $y_1, y_2, \cdots y_n$ ein Fundamentalsystem darstellt, und bildet man aus den Elementen dieses Fundamentalsystems eine homogene ganze rationale Function m^{ten} Grades mit unbestimmten constanten Coefficienten

$$\Phi = \sum_{(\iota_1 \iota_2 \cdots \iota_m)} c_{\iota_1 \iota_2 \cdots \iota_m} y_{\iota_1} y_{\iota_2} \cdots y_{\iota_m},$$

so enthält dieselbe soviel Terme, als man Combinationen der Zahlen $1, 2, \cdots n$ zu je m mit unbeschränkter Wiederholung bilden kann, d. h.

$$\mathsf{N} = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)}{1\cdot 2 \cdots m};$$

wir bezeichnen diese Terme in irgend einer Reihenfolge mit

$$y_{\iota_1} y_{\iota_2} \cdots y_{\iota_m} = Y_\iota \qquad (\iota = 1, 2, \cdots \mathsf{N})$$

Wenn dann die $y_1, y_2, \cdots y_n$ eine lineare Substitution erfahren,

$$\bar{y}_\iota = \sum_{\varkappa=1}^{n} \alpha_{\iota\varkappa} y_\varkappa \qquad (\iota = 1, 2, \cdots n),$$

und wir bilden aus den $\bar{y}_\iota$ $(\iota = 1, 2, \cdots n)$ die entsprechenden Ausdrücke

$$\bar{y}_{\iota_1} \bar{y}_{\iota_2} \cdots \bar{y}_{\iota_m} = \overline{Y}_\iota \qquad (\iota = 1, 2, \cdots \mathsf{N}),$$

so sind die $\overline{Y}_\iota$ als homogene lineare Functionen der Y_ι mit constanten Coefficienten darstellbar. Bilden wir also die Differentialgleichung N^{ter} Ordnung für Y

$$(25) \qquad D(Y, Y_1, Y_2, \cdots Y_N) = 0,$$

so sind die Coefficienten der Ableitungen von Y, als Functionen der $y_1, y_2, \cdots y_n$ und ihrer Ableitungen aufgefasst, invariante Functionen im Sinne der Nr. 15 (Bd I, S 40) für die Differentialgleichung (A); dieselben lassen sich demnach auf Grund des Appell'schen Satzes (a. a. O.) darstellen als ganze rationale Functionen der Coefficienten von (A) und deren Ableitungen multiplicirt mit einer bestimmten Potenz von

$$D(y_1, y_2, \cdots y_n)$$

Wenn wir die Gleichung (25) durch diese Potenz von $D(y_1, y_2, \cdots y_n)$ dividiren, so hat dieselbe Coefficienten, die in den Coefficienten von (A) und deren Ableitungen ganz und rational sind. D. h.:

Die Form m^{ten} Grades Φ, gebildet aus den Elementen eines Fundamentalsystems der homogenen linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung (A), stellt das allgemeine Integral einer ebenfalls homogenen linearen Differentialgleichung dar, deren Coefficienten sich aus denen von (A) und deren Ableitungen ganz und rational zusammensetzen und deren Ordnung höchstens gleich

$$\mathsf{N} = \frac{n(n+1)(n+2) \cdots (n+m-1)}{1 \cdot 2 \cdots m}$$

ist. Die Ordnungszahl N wird wirklich erreicht, wenn zwischen den $y_1, y_2, \cdots y_n$ keine homogene ganze algebraische Beziehung mit constanten Coefficienten vom m^{ten} Grade besteht.

Wenn die Coefficienten von (A) rationale Functionen von x sind, so gilt das Gleiche für die Coefficienten von (25). Wenn in (A) der Coefficient der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung die logarithmische Ableitung einer rationalen Function (der Coefficient von $y^{(n)}$ gleich Eins genommen), d. h. wenn die Determinante $D(y_1, y_2, \cdots y_n)$ rational ist, so ist auch

$$D(Y_1, Y_2, \cdots Y_N)$$

nach dem Appell'schen Satze rational, d. h. auch in der Differentialgleichung (25) ist nach Division durch den Coefficienten von

$$\frac{d^{\mathsf{N}} Y}{dx^{\mathsf{N}}}$$

der Coefficient der $(\mathsf{N}-1)^{\text{ten}}$ Ableitung die logarithmische Ableitung einer rationalen Function. Man kann die Differentialgleichung (25) aus (A) in einfacher Weise herleiten, indem man setzt

$$Y = y^m.$$

185. Differentialgleichung, der eine Form $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades der Integrale einer Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt. Neue Gestalt der Invarianten. Differentialgleichungen mit verschwindenden Invarianten.

Sei nun ζ_1, ζ_2 ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (22) (S. 198) und setzen wir

$$u = c_1 \zeta_1^{n-1} + c_2 \zeta_1^{n-2} \zeta_2 + \cdots + c_{n-1} \zeta_2^{n-1},$$

so genügt u einer linearen Differentialgleichung von der Ordnung

$$\frac{2\cdot 3 \cdots n}{(n-1)!} = n,$$

die aus (22) durch die Substitution

$$u = \zeta^{n-1}$$

hervorgeht und die Gestalt hat

(26) $$u^{(n)} + n_2 r_2 u^{(n-2)} + \cdots + r_n u = 0.$$

Man findet durch einfache Rechnung

(27) $$\begin{cases} r_2 = p_2, \quad r_3 = \frac{3}{2} p_2'(x), \quad r_4 = \frac{9}{5} p_2''(x) + \frac{3(5n+7)}{5(n+1)} p_2^2, \\ r_5 = 2 p_2^{(3)}(x) + \frac{3(5n+7)}{n+1} p_2 p_2'(x), \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Bedeute nun

(C) $$\frac{d^n v}{dt^n} + n_2 s_2 \frac{d^{n-2} v}{dt^{n-2}} + \cdots + s_n v = 0$$

eine Differentialgleichung, die aus (B) durch die Transformation

$$v = \varrho z, \quad \xi = \psi(t)$$

hervorgeht, dann ist also

$$y = \frac{\lambda}{\varrho} v, \quad \varphi(x) = \psi(t)$$

die Transformation, welche (A) in (C) überführt. Setzen wir

$$\frac{\xi''(t)}{\xi'(t)} = -2 \frac{\eta'(t)}{\eta},$$

so ist wegen $q_2 = 0$ (vergl. die Gleichungen (22), (23) auf S. 198)

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{3}{n+1} s_2 \eta = 0, \quad \varrho = \eta^{n-1},$$

und der Ausdruck

$$w = \eta^{n-1}$$

genügt der Differentialgleichung

$$(28)\qquad \frac{d^n w}{dt^n} + n_2 \mathfrak{r}_2 \frac{d^{n-2} w}{dt^{n-2}} + \cdots + \mathfrak{r}_n w = 0,$$

wo die $\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \cdots \mathfrak{r}_n$ aus s_2 ebenso gebildet sind, wie die $r_2, r_3, \cdots r_n$ aus p_2.

Andererseits ist aber

$$u = \frac{\lambda}{\varrho} w,$$

d. h. die Differentialgleichung (28) geht aus (27) durch dieselbe Transformation hervor, wie (C) aus (A); die Gleichungen, durch welche die Grössen

$$s_\varkappa t'(x)^\varkappa \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots n)$$

als Functionen der $p_2, p_3, \cdots p_n$ dargestellt werden, bleiben demnach bestehen, wenn man in denselben an die Stelle von $s_\varkappa$ setzt $\mathfrak{r}_\varkappa$ und an die Stelle der $p_2, p_3, \cdots p_n$ die $r_2, r_3, \cdots r_n$. Bilden wir also die Differenzen

$$l_\varkappa = p_\varkappa - r_\varkappa, \quad m_\varkappa = s_\varkappa - \mathfrak{r}_\varkappa,$$

so bestehen die Beziehungen

$$m_3 t'(x)^3 = l_3,$$
$$m_4 t'(x)^4 = l_4 - 6 l_3 t''(x)$$
u. s. w.,

woraus sich sofort Invarianten vom Gewichte 3, 4, $\cdots$ ergeben, die mit den linearen Invarianten $\vartheta_3, \vartheta_4 \cdots$ übereinstimmen müssen. Man hat also

$$(29)\qquad \begin{cases} \vartheta_3(x) = l_3, \quad \vartheta_4(x) = l_4 - 2 l_3'(x), \\ \vartheta_5(x) = l_5 - \frac{5}{2} l_4'(x) + \frac{15}{7} l_3''(x) - \frac{10}{7} \frac{7n+13}{n+1} p_2 l_3, \end{cases}$$
u. s. w.

Aus dieser Form der Invarianten ϑ_ν können wir einen wichtigen Schluss ziehen. Nehmen wir nämlich an, die Differentialgleichung (A) sei so beschaffen, dass ihre sämmtlichen $(n-2)$ linearen Invarianten $\vartheta_3, \vartheta_4, \cdots \vartheta_n$ identisch verschwinden, dann folgt aus den Formeln (29), dass

$$l_3 = 0, \quad l_4 = 0, \quad l_5 = 0, \cdots,$$

d. h. dass

$$p_3 = r_3, \quad p_4 = r_4, \quad p_5 = r_5, \cdots$$

ist. In diesem Falle stimmt also die Differentialgleichung (A) mit (26) überein, und wir haben den von Herrn Brioschi herrührenden Satz:

Wenn die sämmtlichen linearen Invarianten einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung (A) verschwinden, so ist

das allgemeine Integral von (A) eine binäre Form $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades mit constanten Coefficienten aus den Elementen ζ_1, ζ_2 eines Fundamentalsystems der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung (22).

Die einfachste Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, für welche sämmtliche lineare Invarianten $\vartheta_3, \vartheta_4, \cdots \vartheta_n$ verschwinden, ist offenbar

$$\frac{d^n z}{d\xi^n} = 0. \tag{30}$$

Auf Grund des allgemeinen Princips, wonach die Uebereinstimmung der Invarianten (abgesehen von einer Potenz eines bestimmten Factors) für zwei Differentialgleichungen nothwendig und hinreichend dafür ist, dass sich diese Differentialgleichungen durch eine Transformation von der Form

$$y = \lambda z, \quad \xi = \varphi(x) \tag{31}$$

in einander überführen lassen, schliessen wir, dass sich jede Differentialgleichung (A), deren sämmtliche lineare Invarianten identisch verschwinden, durch die Transformation (31) auf die Form (30) reduciren lassen muss. Wir können dies aber auch mit wenigen Worten direct beweisen.

Sei nämlich (31) die Transformation, durch welche (A) in die canonische Form (B) mit $q_2 = 0$ übergeführt wird, so folgt aus

$$\vartheta_3(x) = \xi'(x)^3 \vartheta_3(\xi) = 0,$$

dass auch $q_3 = 0$, dann weiter aus

$$\vartheta_4(x) = \xi'(x)^4 \vartheta_4(\xi) = 0,$$

dass auch $q_4 = 0$ u s. w, endlich, dass auch $q_n = 0$ sein muss Wir haben also den Satz:

Eine Differentialgleichung (A), deren sämmtliche Invarianten verschwinden, lässt sich durch die Transformation

$$y = \zeta^{n-1} z, \quad \xi = \int \frac{dx}{\zeta^2},$$

wo ζ durch die Differentialgleichung zweiter Ordnung (22)

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{3}{n+1} p_2 \zeta = 0$$

definirt wird, auf die Form

$$\frac{d^n z}{d\xi^n} = 0$$

reduciren.

Diese Art von Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung stellt also gleichsam die directe Verallgemeinerung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung dar; der vorhin bewiesene Satz, dass das allgemeine Integral einer solchen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung als binäre Form $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, gebildet aus den Elementen eines Fundamentalsystems von (22), darstellbar ist, lässt diese Verallgemeinerung ebenfalls hervortreten

Die Differentialgleichung (30) besitzt das Fundamentalsystem

$$1, \xi, \xi^2, \cdots \xi^{n-1};$$

setzen wir also

$$z_\varkappa = \xi^{\varkappa-1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n), \tag{32}$$

so befriedigen die Elemente eines Fundamentalsystems von (30) die $(n-2)$ homogenen Relationen zweiten Grades

$$z_\varkappa^2 = z_{\varkappa-1} z_{\varkappa+1} \qquad (\varkappa = 2, 3, \ldots n-1) \tag{D}$$

Diese Relationen sind von einander unabhängig, sie definiren also, wenn wir die $z_1, z_2, \cdots z_n$ als homogene Coordinaten eines Punktes im $(n-1)$-fach ausgedehnten Raume R_{n-1} deuten, eine Curve, und zwar eine irreductible Curve. Diese Curve muss die durch die Gleichungen (32) definirte Integralcurve der Differentialgleichung (30) enthalten, sie ist also mit derselben identisch.

Die Differentialgleichung (A) mit verschwindenden Invarianten besitzt, da sie mit (30) durch die Transformationen (31) verknüpft ist, falls wir das Fundamentalsystem

$$y_\varkappa = \lambda z_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

zu Grunde legen, dieselbe Integralcurve $\mathfrak{C}$ wie (31), also bestehen die Relationen (D) auch zwischen den $y_1, y_2, \cdots y_n$. D h:

Die Elemente eines Fundamentalsystems einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit verschwindenden Invarianten befriedigen die homogenen quadratischen Relationen (D).

Dieser Satz lässt eine Umkehrung zu Wenn wir dieselbe beweisen wollen, so werden wir veranlasst, uns überhaupt genauer mit solchen linearen Differentialgleichungen zu beschäftigen, zwischen deren Integralen homogene Relationen bestehen.

186. Homogene Relationen zwischen den Integralen. Algebraische Integrale. Specielle Relationen zweiten Grades.

Wir hatten schon im neunten Abschnitte (Nr. 157, S. 95) die Bedeutung der algebraischen Relationen, die durch die Elemente eines Fundamentalsystems einer gegebenen Differentialgleichung befriedigt werden, für das Problem der Integration hervorgehoben und hatten auch schon auf den nahen Zusammenhang hingewiesen, der zwischen Differentialgleichungen, deren Lösungen solche Relationen erfüllen, und Differentialgleichungen, deren Lösungen algebraische Functionen sind, besteht. Wenn wir jetzt speciell nach homogenen Relationen zwischen den Elementen $y_1, y_2, \cdot \cdot y_n$ eines Fundamentalsystems fragen, so entspricht dies der Auffassung der $y_1, y_2, \cdot\cdot y_n$ als homogener Coordinaten eines Punktes im R_{n-1}, oder der damit unmittelbar zusammenhängenden, wonach an Stelle der Integrale selbst ein System von Integralquotienten $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ zum Gegenstande der Untersuchung gemacht wird.

Irgend eine homogene Relation zwischen den Integralen $y_1, y_2, \cdot\, y_n$ einer Differentialgleichung (A) wird auch befriedigt durch die entsprechenden Integrale der aus (A) durch die Transformation

$$y = \lambda z$$

hervorgehenden Differentialgleichung. Gehen wir, um uns ganz dem in den letzten Kapiteln innegehaltenen Gedankengange anzupassen, noch einen Schritt weiter, indem wir uns auf die Betrachtung homogener Relationen mit constanten Coefficienten beschränken, so bleiben solche Relationen auch bestehen, wenn wir nicht allein eine neue abhängige Variable durch die Gleichung

$$y = \lambda z,$$

sondern auch noch eine neue unabhängige Variable

$$\xi = \varphi(x)$$

einführen, d. h. wenn wir von (A) zur Differentialgleichung (B) übergehen.

Wir schliessen daraus, dass ein enger Zusammenhang bestehen muss zwischen solchen homogenen Relationen mit constanten Coefficienten und den Invarianten einer Differentialgleichung, eine Vermuthung, die sich ja in dem Falle der Relationen (D) durch den am Schlusse der vorigen Nummer (S 206) ausgesprochenen Satz bestätigt Dass es aber lineare Differentialgleichungen jeder Ordnung giebt, zwischen deren Integralen homogene Beziehungen mit constanten Coefficienten

bestehen und für welche nicht sämmtliche Invarianten verschwinden, können wir durch eine einfache Ueberlegung sofort einsehen

Bedeuten $y_1, y_2, \cdot y_n$ irgendwelche algebraische Functionen von x, zwischen denen keine homogene lineare Beziehung mit constanten Coefficienten besteht, so bilden dieselben offenbar ein Fundamentalsystem der linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

(1) $$D(y, y_1, y_2, \cdot \cdot y_n) = 0,$$

deren Coefficienten ebenfalls algebraische Functionen sind Die Curve

$$y_\varkappa = y_\varkappa(x) \qquad {\scriptstyle (\varkappa = 1, 2, \quad n)}$$

ist dann eine algebraische Curve des R_{n-1}, sie muss sich folglich durch eine gewisse Anzahl von unabhängigen homogenen Gleichungen zwischen den $y_1, y_2, \cdots y_n$

(2) $$f_i(y_1, y_2, \cdot \cdot y_n) = 0 \qquad {\scriptstyle (i = 1, 2, 3, \quad)}$$

definiren lassen, wo die f_i ganze rationale homogene Functionen mit constanten Coefficienten ihrer Argumente bedeuten Die Anzahl dieser Gleichungen ist jedenfalls nicht kleiner wie $n - 2$ Nach einem Satze von Kronecker (Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen, Festschrift etc., Berlin 1882, S. 30) reichen im Allgemeinen stets n solcher Gleichungen zur Definition einer algebraischen Curve des R_{n-1} aus, für $n = 3$, d. h. für eine ebene Curve, genügt stets eine Gleichung.

Die algebraisch integrirbaren Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung bieten also ein Beispiel von Differentialgleichungen dar, zwischen deren Integralen ein System von homogenen Relationen mit constanten Coefficienten besteht, welches im $(n-1)$-fach ausgedehnten Raume R_{n-1} ein Gebilde $(n-2)^{\text{ter}}$ Stufe, d. h. eine Curve darstellt

Dabei wurde stillschweigend $n > 2$ vorausgesetzt, da für $n = 2$ offenbar keine homogene Beziehung mit von x unabhängigen Coefficienten zwischen den Elementen eines Fundamentalsystems bestehen kann. Diese Voraussetzung ist dann auch im Folgenden festzuhalten.

Gehen wir von der Differentialgleichung (1) durch die Transformation

(3) $$y = \lambda z, \quad \xi = \varphi(x)$$

zu einer Differentialgleichung

(4) $$\frac{d^n z}{d\xi^n} + n q_1 \frac{d^{n-1} z}{d z^{n-1}} + \cdots + q_n z = 0$$

über, so bestehen zwischen den Elementen des Fundamentalsystems

$$z_\varkappa = \frac{1}{\lambda} y_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

dieselben Relationen (2), d. h. es ist auch

(5) $$f_i(z_1, z_2, \cdots z_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

Wenn insbesondere $\varphi(x)$ als algebraische Function und λ als eine Function gewählt wird, deren logarithmische Ableitung algebraisch von x abhängt, so sind (vergl. Nr. 172, S. 145, Gleichungen (2), (4)) auch die Coefficienten von (4) algebraische Functionen von ξ. Falls auch λ selbst eine algebraische Function von x beziehungsweise ξ ist, so ist die Differentialgleichung (4) algebraisch integrirbar; wenn λ keine algebraische Function ist, so sind nur die Integralquotienten

$$\frac{z_{\varkappa+1}}{z_1} = \frac{y_{\varkappa+1}}{y_1} = \eta_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n-1)$$

algebraische Functionen von x.

Sei nun $t_1, t_2, \cdots t_n$ irgend ein System von Functionen einer Variabeln τ, welches die Relationen

(6) $$g_i(t_1, t_2, \cdots t_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

befriedigt, wo die g_i ganze rationale homogene Functionen ihrer Argumente bedeuten, und mögen die Gleichungen (6), wenn wir die $t_1, t_2, \cdots t_n$ als homogene Coordinaten eines Punktes der $(n-1)$-fachen ebenen Mannigfaltigkeit R_{n-1} auffassen, ein Gebilde $(n-2)^{\text{ter}}$ Stufe im R_{n-1} definiren, und zwar möge dieses Gebilde eine „möglichst gekrümmte" Curve sein (vergl. Nr. 169, S. 133), so dass also zwischen den $t_1, t_2, \cdots t_n$ keine homogene lineare Relation mit von τ unabhängigen Coefficienten bestehen kann. Dann lassen sich aus den Gleichungen (6) die Quotienten

$$\frac{t_{\varkappa+1}}{t_1} = \zeta_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n-1)$$

als algebraische Functionen etwa von ζ_1 berechnen,

$$\zeta_\varkappa = A_\varkappa(\zeta_1) \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots n-1)$$

Bedeutet $y_1, y_2, \cdots y_n$ irgend ein Functionssystem von x, welches dieselben Relationen

(7) $$g_i(y_1, y_2, \cdots y_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

befriedigt, so ist auch

$$\eta_\nu = \frac{y_{\varkappa+1}}{y_1} = A_\nu(\eta_1) \qquad (\varkappa = 2, 3, \ldots n-1),$$

wo η_1 gleich $\frac{y_2}{y_1}$ gesetzt wurde.

Statuiren wir nun zwischen τ und x eine Beziehung, indem wir setzen

(8) $$\eta_1(x) = \zeta_1(\tau),$$

woraus sich etwa

$$\tau = \psi(x)$$

ergeben möge, und bezeichnen den Quotienten

$$\frac{y_1(x)}{t_1(x)}$$

als Function von x aufgefasst durch $\mu(x)$, so ist demnach

(9) $$\zeta_\varkappa(\psi(x)) = \eta_\varkappa(x) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n-1),$$

(10) $$\mu(x) t_\varkappa(\psi(x)) = y_\varkappa(x) \qquad (\nu = 1, 2, \cdots n),$$

die $y_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots n)$ sind also auch linear unabhängig von einander, und die lineare Differentialgleichung

(11) $$[D(y_1, y_2, \cdots y_n)]^{-1} D(y, y_1, y_2, \cdots y_n) = 0,$$

für welche $y_1, y_2, \cdots y_n$ ein Fundamentalsystem constituiren, geht aus der Differentialgleichung

(12) $$[D(t_1, t_2, \cdots t_n)]^{-1} D(t, t_1, t_2, \cdots t_n) = 0$$

mit dem Fundamentalsysteme $t_1, t_2, \cdots t_n$ durch die Transformation

(13) $$y = \mu(x) t, \quad \tau = \psi(x)$$

hervor. Also unterscheiden sich die Invarianten ϑ_ν für die beiden Differentialgleichungen (11), (13) nur durch die ν^{te} Potenz von $\psi'(x)$ als Factor ($\nu = 3, 4, \cdots n$). Wir haben also den Satz:

Zwei lineare homogene Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung, die bei geeigneter Wahl der Fundamentalsysteme dieselbe algebraische Integralcurve besitzen, sind im Sinne der Nr. 181 (S. 187, 188) einander aequivalent.

Daraus ergiebt sich sofort die Umkehrung des in der Nr 185 (S 206) bewiesenen Satzes, d. h wir können sagen:

Wenn die Elemente eines Fundamentalsystems einer linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung den $n-2$ Relationen (D) (S. 206) Genüge leisten, so verschwinden die sämmtlichen Invarianten ϑ_ν $(\nu = 3, 4, \cdots n)$ dieser Differentialgleichung, und ihr allgemeines Integral ist folglich als binäre Form $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades der Elemente eines Fundamentalsystems einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung darstellbar.

187. Satz über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten und algebraischer Integralcurve. Monodromiegruppe im Falle algebraischer Coefficienten.

Wir können aber aus dem in der vorigen Nummer bewiesenen Satze noch eine andere interessante Folgerung ziehen.

Sei nämlich eine lineare Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdot \quad + p_n y = 0$$

vorgelegt, deren Coefficienten algebraische Functionen sind, und von der bekannt sein möge, dass die Elemente $y_1, y_2, \cdot \ \cdot y_n$ eines Fundamentalsystems die Relationen (7) erfüllen.

Man kann dann offenbar einen Parameter τ so einführen, dass die Quotienten

$$\frac{y_{\varkappa+1}}{y_1} = \eta_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \quad n)$$

dadurch, dass man sie gewissen algebraischen Functionen von τ

$$\eta_\varkappa = B_\varkappa(\tau) \qquad (\varkappa = 1, 2, \quad n-1)$$

gleich setzt, die Gleichungen

$$g_\iota(1, \eta_1, \eta_2, \ \cdot \ \eta_{n-1}) = 0 \qquad (\iota = 1, 2, 3, \quad)$$

identisch befriedigen. Nimmt man dann noch irgend eine algebraische Function von τ

$$t_1 = B(\tau)$$

hinzu und setzt

$$t_{\varkappa+1} = t_1 \eta_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \quad n-1),$$

so constituiren die $t_1, t_2, \cdots t_n$ ein Fundamentalsystem einer algebraisch integrirbaren linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung (12), deren Coefficienten algebraische Functionen von τ sind, und deren Integralcurve durch die Gleichungen (6) dargestellt wird. Diese Differentialgleichung ist also mit (A) aequivalent, d. h. wir haben

$$y = \mu \cdot t, \quad \tau = \psi(x).$$

Die Function μ bestimmt sich dabei in folgender Weise Setzt man

$$-\frac{d \log D(t_1, t_2, \quad t_n)}{d\tau} = s_1(\tau),$$

so ist $s_1(\tau)$ der Coefficient der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung von t in der Differentialgleichung (12) Die beiden Grössen

$$y e^{\frac{1}{n}\int p_1 dx}, \qquad t e^{\frac{1}{n}\int s_1 d\tau}$$

sind dann zufolge der Gleichung (10), Nr. 181 (S. 189), durch die Beziehung

$$y\, e^{\frac{1}{n}\int p_1 dx} = e^{-\frac{n-1}{2}\int \frac{\tau''(x)}{\tau'(x)} dx}\, e^{\frac{1}{n}\int s_1 d\tau}\, t$$

mit einander verknüpft, so dass also

$$\mu = [\psi'(x)]^{-\frac{n-1}{2}}\, e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx}\, e^{\frac{1}{n}\int s_1 d\tau}$$

oder

$$\mu = [\psi'(x)]^{-\frac{n-1}{2}}\, e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx}\, [D(t_1, t_2, \quad t_n)]^{-\frac{1}{n}}$$

gefunden wird.

Betrachten wir nunmehr eine der absoluten Invarianten (Nr. 184, S. 201)

(14) $$\frac{\vartheta_\nu^m}{\vartheta_m^\nu}, \quad \frac{\vartheta_\nu^3}{\Phi_\nu^\nu} \qquad (\nu, m = 3, 4, \quad n, \ \nu \neq m)$$

Da die Coefficienten von (A) zufolge der Voraussetzung ebenso wie die von (12) algebraische Functionen sind, so ist jede dieser absoluten Invarianten sowohl in x als auch in τ algebraisch.

Wenn also für die Differentialgleichung (A) nicht alle diese Invarianten sich auf Constanten reduciren oder illusorisch werden, so besteht zwischen x und τ eine algebraische Beziehung, d. h. $\psi(x)$ ist eine algebraische Function von x.

In diesem Falle ist also in dem Ausdrucke für μ nur der Factor

(15) $$e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx}$$

nicht nothwendig algebraisch, d. h. die Integrale von (A) unterscheiden sich nur durch den allen gemeinsamen Factor (15) von algebraischen Functionen, und wir haben den Satz:

Wenn die Integralcurve einer linearen Differentialgleichung (A) mit algebraischen Coefficienten, für welche nicht alle absoluten Invarianten (14) sich auf Constanten reduciren oder illusorisch werden, eine algebraische Curve ist, so sind die Integralquotienten algebraische Functionen der unabhängigen Variabeln, und die Integrale selbst können sich von algebraischen Functionen nur durch einen allen gemeinsamen Factor unterscheiden, dessen logarithmische Ableitung selbst eine algebraische Function ist. Wenn also überdies der Coefficient der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung in (A) die logarithmische Ableitung einer algebraischen Function ist, so ist die Differentialgleichung (A) algebraisch integrirbar.

Sollen sich für (A) alle Invarianten (14) auf Constanten reduciren, so müssen die logarithmischen Ableitungen dieser Invarianten, d. h. die Invarianten vom Gewichte Eins (Nr. 184, S. 201, Gleichung 24),

(16) $$\delta_{\nu, m}, \quad \varepsilon_\nu \qquad (\nu, m = 3, 4, \quad n, \quad n \neq m)$$

identisch verschwinden. Dies tritt z. B stets ein, wenn alle Invarianten $\vartheta_3, \vartheta_4, \cdots \vartheta_\nu$ gleich Null sind, wir haben dann den bereits erledigten Fall der Relationen (D).

Es giebt aber im Allgemeinen auch noch andere Fälle, wo die Invarianten (16) verschwinden oder ihren Sinn verlieren. Um die Natur dieser Fälle zu ergründen, wollen wir die Monodromiegruppe der Differentialgleichung (A) einer näheren Betrachtung unterziehen

Wir hatten die Coefficienten von (A) als algebraische Functionen von x vorausgesetzt. Hat man eine endliche Anzahl algebraischer Functionen von x, so kann man nach einem bekannten Satze von Abel stets eine algebraische Function von x finden, durch welche sich die gegebenen algebraischen Functionen rational mit in x rationalen Coefficienten darstellen lassen. Wir dürfen also, ohne dadurch die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, voraussetzen, dass die Coefficienten der vorgelegten Differentialgleichung (A) rationale Functionen der beiden durch eine irreductible algebraische Gleichung

(I) $$F(x, s) = 0$$

verknüpften Variabeln x und s sind. Dem entsprechend wollen wir also (vergl. Nr. 61, Bd. I, S 217) die Coefficienten $p_\varkappa$ von (A) durch $p_\varkappa(x, s)$ bezeichnen.

Denken wir uns über der x-Ebene die mehrblättrige Riemann'sche Fläche F ausgebreitet, welche die Verzweigung der durch die Gleichung (I) definirten algebraischen Function darstellt, und sei ϱ die von Riemann mit p bezeichnete Zahl in Bezug auf diese Gleichung, also nach der Bezeichnung von Herrn Weierstrass der Rang des algebraischen Gebildes (x, s), nach Clebsch die Geschlechtszahl der durch die Gleichung (I) dargestellten algebraischen ebenen Curve Dann ist bekanntlich die Riemann'sche Fläche F eine $(2\varrho + 1)$-fach zusammenhängende; wir denken uns dieselbe nach dem Vorgange von Riemann durch 2ϱ Querschnitte

$$a_1, \; b_1, \; a_2, \; b_2, \; \cdot \quad a_\varrho, \; b_\varrho$$

in eine einfach zusammenhängende $\overline{F}$ zerschnitten, indem wir z. B das System dieser Querschnitte von einem Punkte (x_0, s_0) der Fläche F ausgehen lassen, so dass beim Durchlaufen des ganzen Systems erst das eine Ufer des Querschnittes $a_\varkappa$, dann das eine Ufer des Querschnittes $b_\varkappa$,

hierauf das andere Ufer von $a_\varkappa$, dann das andere Ufer von $b_\varkappa$ der Reihe nach für $\varkappa = 1, 2, \cdots \varrho$ passirt wird (vergl. Fig 1, wo der Fall $\varrho = 4$ schematisch dargestellt ist). Den so gelegten Querschnitten entspricht dann ein System von Normalperioden der zu dem algebraischen Gebilde (I) gehörigen Integrale erster Gattung.

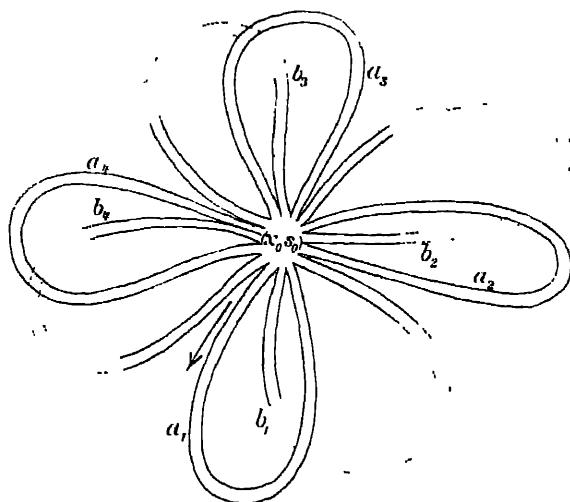


Fig 1.

Fixiren wir ferner in der einfach zusammenhängenden Fläche $\overline{F}$ diejenigen (endlichen und unendlich fernen) Stellen

$$(\alpha_1, \beta_1), \quad (\alpha_2, \beta_2), \cdots (\alpha_\sigma, \beta_\sigma),$$

an denen die Coefficienten $p_\varkappa(x, s)$ der Differentialgleichung (A) unendlich werden, und schliessen diese Stellen durch kleine geschlossene Curven aus (eine geschlossene Curve ist dabei so zu ziehen, dass, wenn der Punkt $(\alpha_\varkappa, \beta_\varkappa)$, den sie umgiebt, ein Windungspunkt von $\overline{F}$ ist, die betreffende Curve zu ihrem Ausgangspunkte im selben Blatte von $\overline{F}$ zurückkehrt), so ist die auf diese Weise entstehende Fläche T eine $(\sigma + 1)$-fach zusammenhängende. Diese denken wir uns nun wieder durch die σ Querschnitte $l_1, l_2, \cdots l_\sigma$, welche Punkte der Ausschliessungscurven mit Punkten des Querschnittssystems (a, b) verbinden und weder sich selbst, noch einander, noch die Querschnitte (a, b) durchkreuzen, in eine einfach zusammenhängende Fläche $\overline{T}$ zerschnitten.

Betrachten wir eine Stelle dieser Fläche $\overline{T}$, so sind die Coefficienten $p_\varkappa(x, s)$ der Differentialgleichung in der Umgebung derselben nach positiven ganzen oder gebrochenen Potenzen des Increments entwickelbar, je nachdem die betreffende Stelle eine reguläre Stelle oder ein Windungspunkt der algebraischen Function s von x ist Die Integrale von (A) sind dann in der Umgebung jener Stelle in derselben Weise entwickelbar, wie die $p_\varkappa(x, s)$ (vergl. Nr. 60, Bd I, S. 215); wenn wir also ein Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots y_n$ von (A) durch seine Anfangswerthe in der Umgebung irgend einer Stelle von $\overline{T}$ definiren, so ist dasselbe innerhalb $\overline{T}$ eindeutig festgelegt.

Wenn die unabhängige Variable x geschlossene Wege innerhalb

der Riemann'schen Fläche beschreibt, die gewisse der Querschnitte a, b, l überschreiten, so erfährt das Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdot\ y_n$ lineare homogene Substitutionen, und diese constituiren die Monodromiegruppe h von (A). Eine Basis dieser Monodromiegruppe (vergl. Nr. 132, S. 6) erhalten wir, wenn wir die linearen Substitutionen der $y_1, y_2, \cdots y_n$ betrachten, welche geschlossenen Wegen von x entsprechen, die die Querschnitte a, b, l einzeln in einer bestimmten Richtung überschreiten; diese Basis besteht also im Allgemeinen aus $2\varrho + \sigma$ Substitutionen.

188. Fall einer rationalen und einer elliptischen Integralcurve. Die Monodromiegruppe ist endlich.

Die Integralcurve $\mathfrak{C}$ der Differentialgleichung (A) ist, wenn die $y_1, y_2, \cdot \cdot y_n$ die Relationen (7) (Nr. 186, S. 209) erfüllen, eine algebraische Curve des R_{n-1}, dieselbe muss durch die Collineationen des R_{n-1}, welche den Substitutionen der Gruppe h entsprechen, in sich selbst übergehen. Im Allgemeinen kann eine algebraische Curve des R_{n-1} nur durch eine endliche Anzahl von Collineationen in sich selbst transformirt werden, man hat nämlich den folgenden Satz:

Wenn eine algebraische Curve des R_{n-1} durch unendlich viele eindeutig umkehrbare rationale Transformationen in sich selbst übergeführt wird, so sind ihre Coordinaten entweder als rationale oder als eindeutige doppeltperiodische Functionen eines Parameters darstellbar

Man sagt bekanntlich von einer Curve, deren Coordinaten sich als rationale Functionen eines Parameters darstellen lassen, sie sei vom Geschlechte Null oder eine rationale Curve, von einer Curve deren Coordinaten sich als eindeutige doppeltperiodische Functionen eines Parameters, also als rationale Functionen zweier durch eine algebraische Gleichung vom Range Eins verknüpften Variabeln darstellen lassen, sie sei vom Geschlechte Eins oder eine elliptische Curve. Der erwähnte Satz lässt sich also auch in der Form aussprechen: Nur eine rationale oder eine elliptische Curve des R_{n-1} kann unendlich viele eindeutig umkehrbare rationale Transformationen in sich selbst gestatten.

Was den Beweis dieses Satzes anlangt, so bemerken wir, dass sich derselbe sehr leicht auf den Beweis desselben Satzes für den Fall ebener algebraischer Curven ($n = 3$) zurückführen lässt Für diesen Fall muss man zeigen, dass eine ebene Curve, die keine rationale und keine elliptische ist, nicht nur keine continuirliche Schaar, sondern auch keine unendliche Anzahl discreter eindeutig umkehrbarer ratio-

naler Transformationen in sich selbst gestatten kann; wir verweisen in Bezug hierauf auf die Arbeiten von Herrn Poincaré (Acta Mathematica Bd. VII, S. 16) und von Herrn Weierstrass (Gesammelte Werke Bd II, S. 235).

Seien $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ die (nicht homogenen) Coordinaten eines Punktes einer rationalen Curve, so lässt sich ein Parameter t so finden, dass

$$\eta_\varkappa = \varphi_\varkappa(t) \qquad (\varkappa = 1, 2, \quad n-1)$$

ist, wo die $\varphi_\varkappa$ rationale Functionen bedeuten und t selbst als rationale Function der durch die Gleichungen der Curve verknüpften Grössen $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ darstellbar ist. Die eindeutig umkehrbaren rationalen Transformationen, die diese Curve in sich selbst überführen, entsprechen dann den projectiven Transformationen

$$\frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

von t, es giebt also dann stets eine von drei continuirlich veränderlichen Parametern abhängige Schaar, oder wie man kurz sagt, es giebt stets ∞^3 solcher Transformationen. Unter diesen kann es unendlich viele Collineationen geben, es kann sogar vorkommen, dass alle ∞^3 Transformationen Collineationen sind. Dies ist der Fall für die von Herrn Klein sogenannte rationale Normalcurve des R_{n-1}, die sich für homogene Coordinaten $y_1, y_2, \cdots y_n$ in der Form

$$y_\varkappa = a_{\varkappa 1}\zeta_1^{n-1} + a_{\varkappa 2}\zeta_1^{n-2}\zeta_2 + \cdots + a_{\varkappa n}\zeta_2^{n-1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \quad n)$$

darstellen lässt, wo die $a_{\varkappa i}$ Constanten bedeuten Dies entspricht also in unserer Theorie dem Falle, wo alle Invarianten $\vartheta_3, \vartheta_4, \cdot \quad \vartheta_n$ der Differentialgleichung (A) identisch verschwinden, d. h. dem Falle der Relationen (D); wir sehen also den Satz der Nr. 185 (S 204, 205) hier in einem neuen Lichte.

Eine elliptische Curve lässt sich in der Form

$$\eta_\varkappa = \varphi_\varkappa(t) \qquad (\varkappa = 1, 2, \quad n-1)$$

darstellen, wo die $\varphi_1, \varphi_2, \cdot \quad \varphi_{n-1}$ doppeltperiodische Functionen mit denselben Perioden ω_1, ω_2 sind. Den eindeutig umkehrbaren rationalen Transformationen dieser Curve in sich selbst können im Allgemeinen, d h. mit Ausschluss gewisser specieller Werthe des Periodenquotienten $\frac{\omega_1}{\omega_2}$, nur die Transformationen von t in

$$\pm t + \alpha$$

entsprechen, d. h. wir haben in diesem Falle eine von einem continuirlich veränderlichen Parameter abhängige Schaar oder kurz ∞^1 solcher

Transformationen. Aus der Theorie der elliptischen Functionen schliesst man leicht, dass unter diesen Transformationen der $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ stets nur eine endliche Anzahl von Collineationen enthalten sein kann. Also können wir sagen:

Nur wenn die Integralcurve $\mathfrak{C}$ der Differentialgleichung (A) eine rationale Curve ist, kann die Anzahl der Collineationen des R_{n-1}, die der Monodromiegruppe h von (A) entsprechen, eine unendliche sein.

Wir wollen die Fälle, wo die Integralcurve $\mathfrak{C}$ eine unendliche Anzahl von Collineationen in sich zulässt, als „Ausnahmefälle“ bezeichnen und vorläufig nur den „allgemeinen“ Fall in's Auge fassen, wo die Anzahl dieser Collineationen eine endliche ist.

Wenn wir dann von der Differentialgleichung (A) durch die Substitution

$$y = \lambda \bar{y}$$

zu einer Differentialgleichung $(\bar{A})$ übergehen, in welcher der Coefficient der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung von z die logarithmische Ableitung einer rationalen Function von x und s ist, so haben wir λ gleich einem Ausdrucke von der Form

$$\lambda = e^{\int r(s, x)\, dx},$$

wo $r(s, x)$ eine rationale Function von s und x bedeutet, und für die Differentialgleichung $(\bar{A})$ sind die Transformationsgruppe und Monodromiegruppe unimodular, also jedenfalls endlich, wenn die entsprechenden Gruppen der Integralquotienten endlich sind. Beide Gruppen müssen (Nr 157, S. 95) in der Gruppe der Collineationen, die $\mathfrak{C}$ in sich selbst transformiren, enthalten sein, also besteht für die Differentialgleichung $(\bar{A})$ die Transformationsgruppe aus einer endlichen Anzahl von Operationen, sie ist folglich mit der Monodromiegruppe identisch und die Differentialgleichung $(\bar{A})$ ist, nach den Ergebnissen der Nr. 158 (S. 98), algebraisch integrirbar.

Die Integrale von (A) unterscheiden sich demzufolge von algebraischen Functionen nur durch einen Factor λ, dessen logarithmische Ableitung eine rationale Function von x und s ist

Unter diesen „allgemeinen“ Fall subsumiren sich also diejenigen Fälle, wo für die Differentialgleichung (A) nicht alle Invarianten (16) identisch verschwinden Es werden die sämmtlichen Invarianten (16) also nur dann gleich Null sein können, wenn die Curve $\mathfrak{C}$ eine rationale ist; dies findet sich im Falle des Verschwindens aller Invarianten $\vartheta_3, \vartheta_4, \cdots \vartheta_n$ bestätigt. Wir gehen jetzt an die Erörterung der allge-

meinen Frage nach dem Verschwinden der Invarianten (16) und schliessen uns dabei an Herrn Wallenberg an, der diese Frage zuerst in voller Allgemeinheit erledigt hat.

189. Differentialgleichungen, für welche gewisse Invarianten verschwinden. Ausnahmefälle.

Es mögen also alle Invarianten (16) verschwinden oder ihren Sinn verlieren, während einige der $\vartheta_3, \vartheta_4, \cdots \vartheta_n$ von Null verschieden sind Sei $\vartheta_\varkappa$ die lineare Invariante vom kleinsten Gewichte, die nicht identisch verschwindet, dann setzen wir

$$\vartheta_\varkappa(x) = \alpha_\varkappa \psi'(x)^\varkappa,$$

wo $\alpha_\varkappa$ eine von Null verschiedene, sonst aber willkürliche Constante, $\psi(x)$ eine zu bestimmende Function von x bedeutet. Wir setzen in (A) wieder $p_1 = 0$ voraus und transformiren nun (A) durch Einführung der neuen unabhängigen Variabeln

$$\tau = \psi(x)$$

in eine Differentialgleichung

$$\text{(C)} \qquad \frac{d^n t}{d\tau^n} + s_2 \frac{d^{n-2} t}{d\tau^{n-2}} + \cdots + s_n t = 0,$$

wo also

$$y = \mu(x) t$$

und $\mu(x)$ eine bestimmte Function von x ist. Da die $\delta_{\nu\varkappa}$ $(\nu \neq \varkappa)$ gleich Null oder illusorisch sind, so sind die Quotienten

$$\frac{\vartheta_\nu^{\varkappa}(x)}{\vartheta_\varkappa^{\nu}(x)} = \frac{\vartheta_\nu^{\varkappa}(\tau)}{\vartheta_\varkappa^{\nu}(\tau)}, \quad \vartheta_\varkappa(\tau) = \alpha_\varkappa,$$

Constanten, und zwar sind dieselben gleich Null oder von Null verschieden, je nachdem $\vartheta_\nu(x)$ verschwindet oder nicht.

Für die Differentialgleichung (C) sind also alle Invarianten $\vartheta_\nu(\tau)$ (für $\nu = 3, 4, \ldots n$) Constanten.

Wir haben nun zu unterscheiden, ob die Invariante (Nr. 184, S. 200)

$$\Phi_\varkappa(x) = 2\varkappa \frac{d^2 \log \vartheta_\varkappa(x)}{dx^2} - (2\varkappa + 1)\left(\frac{d \log \vartheta_\varkappa(x)}{dx}\right)^2 - \frac{12\varkappa^2}{n+1} p_2$$

von Null verschieden ist oder nicht.

Wenn $\Phi_\varkappa(x)$ verschwindet, so ist auch $\Phi_\varkappa(\tau)$ gleich Null, also da $\vartheta_\varkappa(\tau) = \alpha_\varkappa$ eine Constante ist, auch s_2 gleich Null. Aus der Form der linearen Invarianten $\vartheta_\nu(\tau)$ ergiebt sich dann, dass in (C) auch alle übrigen Coefficienten constant sind, und zwar ist s_ν gleich Null oder

von Null verschieden, je nachdem die Invariante ϑ_ν verschwindet oder nicht.

Wenn $\Phi_\varkappa(x)$ von Null verschieden ist, so folgt aus dem Verschwinden der Invarianten ε_ν, dass auch die Quotienten

$$\frac{\Phi_\nu^{\ \varkappa}}{\vartheta_\varkappa^{\ 2}}$$

Constanten sein müssen. Es sind also für die Differentialgleichung (C) nicht nur alle $\vartheta_\nu(\tau)$, sondern auch alle $\Phi_\nu(\tau)$ (für $\nu = 3, 4, \cdots n$) constant. Ferner ist

$$s_2 = -\frac{n+1}{12\varkappa^2}\,\Phi_\varkappa(\tau)$$

eine von Null verschiedene Constante, und ebenso sind die übrigen Coefficienten von (C) constant. Wir haben also den Satz:

Wenn für die Differentialgleichung (A) die sämmtlichen Invarianten (16) verschwinden oder illusorisch werden, so lässt sich diese Differentialgleichung durch die Transformation

$$y = \mu(x)t, \quad \tau = \psi(x)$$

auf eine Differentialgleichung mit constanten Coefficienten zurückführen.

Bei dem Beweise dieses Satzes ist von dem Vorhandensein der homogenen Relationen zwischen den Integralen von (A) kein Gebrauch gemacht worden Wenn nun das Bestehen dieser Relationen noch in Betracht gezogen wird, so kann man die Beschaffenheit der Differentialgleichung mit constanten Coefficienten (C) noch genauer fixiren.

Aus der bekannten Form der Lösungen einer Differentialgleichung mit constanten Coefficienten (Nr. 69, Bd. I, S. 245) folgt nämlich (vergl. Wallenberg, Crelle's Journal, Band 113, S. 22), dass diese Lösungen dann und nur dann mehr wie $n-3$ von einander unabhängige homogene Gleichungen mit constanten Coefficienten befriedigen können, wenn entweder alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung (Nr 69, Bd. I, S 245) von einander verschieden sind und in rationalen Verhältnissen zu einander stehen, oder wenn diese Gleichung eine n-fache Wurzel besitzt Der letztere Fall entspricht offenbar dem Falle der Relationen (D).

Wir begnügen uns damit zu zeigen, dass, wenn die Verhältnisse der Wurzeln

$$\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_n$$

der charakteristischen Gleichung von (C) rational und diese Wurzeln sämmtlich von einander verschieden sind, in der That $n-2$ von einander unabhängige homogene Relationen zwischen den Integralen

$$t_\varkappa = e^{\varrho_\varkappa \tau} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

bestehen müssen, die eine rationale Curve darstellen.

Aus der Voraussetzung folgt, dass sich eine Zahl γ so angeben lässt, dass

$$\varrho_\varkappa = \gamma \bar{\varrho}_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

ist, wo die $\bar{\varrho}_\varkappa$ ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler bedeuten. Es ist also

$$(17) \qquad t_\varkappa = (e^{\gamma\tau})^{\bar{\varrho}_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n),$$

d. h. die Integrale lassen sich als rationale Functionen des Parameters

$$e^{\gamma\tau}$$

darstellen.

Die Gleichungen der durch die Formeln (17) dargestellten rationalen Curve ergeben sich, wenn man

$$\bar{\varrho}_1 > \bar{\varrho}_2 > \cdots > \bar{\varrho}_n$$

voraussetzt in der Form

$$(18) \qquad t_2^{\mu_\varkappa + \nu_\varkappa} = t_1^{\nu_\varkappa} t_\varkappa^{\mu_\varkappa} \qquad (\varkappa = 3, 4, \ldots n),$$

worin

$$\frac{\mu_\varkappa}{\nu_\varkappa} = \frac{\bar{\varrho}_1 - \bar{\varrho}_2}{\bar{\varrho}_2 - \bar{\varrho}_\varkappa} = \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_2 - \varrho_\varkappa}$$

zu nehmen ist.

In diesem Falle ist es also möglich, dass die Transformationsgruppe der Differentialgleichung (A) keine endliche ist. Um die Resultate in übersichtlicher Form zu erhalten, wollen wir im Folgenden voraussetzen, dass die vorgelegte Differentialgleichung (A) der Fuchsschen Classe angehört, auch halten wir die Annahme $p_1 = 0$ fest.

Seien dann

$$j_1, j_2, \cdots j_m$$

die nicht identisch verschwindenden unter den Invarianten

$$\vartheta_\nu, \quad \Phi_\nu \qquad (\nu = 3, 4, \ldots n),$$

und möge $g_\varkappa$ das Gewicht von $j_\varkappa$ bedeuten. Wenn dann die ganzen Zahlen $g_1, g_2, \cdots g_m$ keinen gemeinsamen Theiler besitzen, so lassen sich ganze Zahlen $h_1, h_2, \cdots h_m$ so bestimmen, dass

$$\sum_{\varkappa=1}^{m} g_\varkappa h_\varkappa = 1$$

ist. Die Invariante

$$j = j_1^{h_1} j_2^{h_2} \cdots j_m^{h_m}$$

ist also in diesem Falle vom Gewichte Eins. Es ist dann $j(\tau)$ eine Constante und

$$j(x) = j(\tau)\psi'(x),$$

also $\psi'(x)$ eine rationale Function von x, da die Differentialgleichung (A) der Fuchs'schen Classe angehören, also rationale Coefficienten besitzen sollte.

Wenn wir in die Differentialgleichung (C) die unabhängige Variable x einführen, so verwandelt sich dieselbe in

$$(\bar{A}) \qquad \frac{d^n t}{dx^n} + \bar{p}_1 \frac{d^{n-1} t}{dx^{n-1}} + \quad + \bar{p}_n t = 0,$$

wo die $\bar{p}_1, \cdots \bar{p}_n$ leicht zu bildende Functionen von x bedeuten; diese Differentialgleichung geht aus (A) durch die Substitution

$$y = \mu(x) t$$

hervor, wo nach einer oft benutzten Formel

$$\mu(x) = e^{\frac{1}{n}\int \bar{p}_1 dx}$$

ist. Nun ist aber

$$(19) \qquad \begin{cases} \bar{p}_1 = -\frac{n(n-1)}{2} \frac{\psi''(x)}{\psi'(x)}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \bar{p}_n = s_n [\psi'(x)]^n \qquad , \end{cases}$$

wir haben also

$$\mu(x) = [\psi'(x)]^{-\frac{n-1}{2}},$$

d h $[\mu(x)]^2$ ist eine rationale Function von x. Daraus folgt, dass auch die Differentialgleichung $(\bar{A})$ zur Fuchs'schen Classe gehört, so dass insbesondere (vergl. Nr. 62, Bd. I, S. 220, Gleichung (F))

$$\bar{p}_n = \frac{F_{n(\sigma-1)}}{Q_\sigma^n}$$

ist, wo F, Q ganze rationale Functionen von x bedeuten, deren Grad durch den Index gegeben wird, und

$$Q_\sigma = (x - a_1)(x - a_2) \quad (x - a_\sigma)$$

ist, wenn $a_1, a_2, \cdot\cdot a_\sigma$ die singulären Punkte der Differentialgleichung $(\bar{A})$ darstellen Die letzte der Gleichungen (19) liefert

$$\psi'(x) = \frac{\sqrt[n]{F_{n(\sigma-1)}}}{Q_\sigma} \frac{1}{\sqrt[n]{s^n}},$$

es muss folglich, da $\psi'(x)$ rational, s_n constant ist, $F_{n(\sigma-1)}$ die n^{te} Potenz einer ganzen Function $(\sigma - 1)^{\text{ten}}$ Grades von x sein Durch Zerlegung in Partialbrüche finden wir demnach

$$\psi'(x) = \sum_{\varkappa=1}^{\sigma} \frac{c_\varkappa}{x - a_\varkappa},$$

also durch Integration

$$\psi(x) = \log \prod_{\varkappa=1}^{\sigma} (x - a_\nu)^{c_\nu},$$

wo die $c_\varkappa$ Constanten bedeuten.

Die Integrale von (C) sind (vergl S. 220)

$$t_i = e^{\varrho_i \tau} \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

wir haben folglich für (A) das Fundamentalsystem

$$y_i = \left\{ \sum_{\varkappa=1}^{\sigma} \frac{c_\varkappa}{x - a_\varkappa} \right\}^{-\frac{n-1}{2}} \left\{ \prod_{\varkappa=1}^{\sigma} (x - a_\nu)^{c_\varkappa} \right\}^{\varrho_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

190. Die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen sind rationale Zahlen. Allgemeiner Satz über Differentialgleichungen mit algebraischer Integralcurve.

Wir fügen jetzt den über die Differentialgleichung (A) gemachten Voraussetzungen noch die Annahme hinzu, dass die Wurzeln ihrer determinirenden Fundamentalgleichungen rationale Zahlen seien.

Die zu $x = a_\varkappa$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung von (A) hat die Wurzeln

$$\frac{n-1}{2} + c_\varkappa \varrho_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

dieselben sind also von einander verschieden, wenn die ϱ_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ von einander verschieden sind, und dies war (S. 219) eine Folge der Annahme, dass die Integralcurve $\mathfrak{C}$ von (A) eine algebraische sein sollte. Umgekehrt folgt, wenn wir voraussetzen, dass (A) so beschaffen sein soll, dass die sämmtlichen determinirenden Fundamentalgleichungen von einander verschiedene rationale Wurzeln haben, dass die $\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_n$ von einander verschieden und ihre Verhältnisse rational sind.

Da die Producte $c_\varkappa \varrho_i$ rationale Zahlen sein sollten, so sind jetzt die $y_1, y_2, \cdots y_n$ Potenzen mit rationalen Exponenten von rationalen Functionen, oder, wie wir kurz sagen, Wurzeln aus rationalen Functionen, d. h. die Differentialgleichung ist algebraisch integrirbar. Wir haben somit den Satz:

Wenn die Integralcurve $\mathfrak{C}$ der zur Fuchs'schen Classe gehörigen Differentialgleichung (A) eine algebraische ist

und die Invarianten (16) sind sämmtlich gleich Null oder illusorisch, so ist $\mathfrak{C}$ nothwendig eine rationale Curve Sind die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen von (A) rationale Zahlen, und besitzen die Gewichte der nicht verschwindenden Invarianten ϑ_ν, Φ_ν keinen gemeinsamen Theiler, so ist (A) algebraisch integrirbar.

Sehen wir von der Voraussetzung, dass $\mathfrak{C}$ eine algebraische Curve sein soll, ab, so haben wir den Satz:

Wenn für die Differentialgleichung (A) der Fuchs'schen Classe, deren determinirende Gleichungen von einander verschiedene rationale Wurzeln haben, alle Invarianten (16) verschwinden oder illusorisch werden, und die Gewichte der nicht verschwindenden unter den Invarianten ϑ_ν, Φ_ν keinen gemeinsamen Theiler haben, so ist (A) algebraisch integrirbar; die Integralcurve $\mathfrak{C}$ ist also jedenfalls eine algebraische.

Es bleibt noch der Fall zu erledigen, wo die Gewichte $g_1, g_2, \cdot\cdot g_m$ der nicht verschwindenden unter den Invarianten ϑ_ν, Φ_ν den von (Null und) Eins verschiedenen gemeinsamen Theiler g besitzen. Dann ist $\psi'(x)$ nicht mehr rational, sondern die g^{te} Wurzel aus einer rationalen Function $R(x)$, und die Integrale von (A) haben die Gestalt

$$y_i = [R(x)]^{-\frac{n-1}{2g}} e^{\varrho_i \int \sqrt[g]{R(x)}\, dx} \qquad (i = 1, 2, \quad n),$$

dieselben sind also im allgemeinen nicht algebraisch.

Wenn $g > 2$ ist, so sind die Invarianten Φ_ν sämmtlich gleich Null, und die Gewichte der nicht verschwindenden ϑ_ν genügen der Bedingung

$$\nu \equiv 0 \pmod{g}.$$

Dann können, wie wir in der Nr. 189 (S. 218) gezeigt haben, in der Differentialgleichung (C) nur diejenigen Coefficienten s_ν von Null verschieden sein, deren Index ein Vielfaches von g ist. Wenn nun

$$n = \varkappa g + \bar{n}$$

ist, so lautet die charakteristische Gleichung von (C)

$$(20) \qquad \varrho^n + s_g \varrho^{n-g} + s_{2g} \varrho^{n-2g} + \cdots + s_{\varkappa g} \varrho^{\bar{n}} = 0,$$

dieselbe würde also, wenn $\bar{n} > 1$ wäre, eine mehrfache Wurzel besitzen, und dies widerstreitet der Voraussetzung, dass (C) eine algebraische Integralcurve $\mathfrak{C}$ besitzen sollte (vergl Nr. 189, S. 219). Es muss also $\bar{n}$ gleich Null oder Eins sein. Wenn wir im letzteren Falle die Wurzel $\varrho = 0$ absondern, so zerfallen die übrigen Wurzeln von (20)

in Gruppen zu je g, und wenn ϱ_1 eine Wurzel einer solchen Gruppe ist, so sind die übrigen durch die Ausdrücke

$$\varepsilon\varrho_1, \quad \varepsilon^2\varrho_1, \cdots \varepsilon^{g-1}\varrho_1$$

gegeben, wo

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{g}}$$

gesetzt wurde. Soll die Integralcurve $\mathfrak{C}$ eine algebraische Curve sein, so müssen (Nr. 189, S. 219) die Verhältnisse der Wurzeln von (20) rationale Zahlen sein, dies ist nur möglich, wenn $g = 2$ ist

In diesem Falle müssen alle Invarianten ϑ_ν, deren Gewicht eine ungerade Zahl ist, identisch verschwinden Wenn für eine Differential gleichung (A) die $\vartheta_3, \vartheta_5, \vartheta_7, \cdots$ sämmtlich gleich Null sind, so müssen, wie leicht einzusehen ist, auch die linearen Theile dieser Invarianten gleich Null sein. Hieraus und aus dem in der Nr. 183 (S. 197) angegebenen Ausdrucke des linearen Theiles der Invarianten ϑ_ν schliesst Herr Brioschi:

dass eine Differentialgleichung (A), für welche die Invarianten ϑ_ν mit ungeradem Index ν verschwinden, die Eigenschaft hat, mit ihrer Adjungirten identisch zu sein

Wir gehen auf einen Beweis dieses Satzes nicht ein, sondern begnügen uns damit, aus der Annahme $g = 2$ die für unsere Differentialgleichung (A) der Fuchs'schen Classe mit rationalen Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen und algebraischer Integralcurve sich ergebenden Folgerungen zu ziehen.

Für die Differentialgleichung (C) folgt aus der Form der linearen Theile der Invarianten ϑ_ν, dass die Coefficienten $s_\varkappa$, deren Index eine ungerade Zahl ist, verschwinden müssen. Je nachdem nun

$$n = 2m \quad \text{oder} \quad n = 2m + 1$$

ist, lautet demgemäss die charakteristische Gleichung

$$\varrho^n + c_2\varrho^{n-2} + \cdots + c_{2m} = 0,$$

beziehungsweise

$$\varrho^n + c_2\varrho^{n-2} + \cdots + c_{2m}\varrho = 0.$$

Im letzteren Falle gehört zu der Wurzel $\varrho = 0$ das Integral

$$y_n = [R(x)]^{-\frac{n-1}{4}}$$

von (A), dieses ist die Wurzel aus einer rationalen Function, wir können uns also, wenn $n = 2m + 1$ ist, nach dem Verfahren der Nr. 18 (Bd. I, S 47) die Differentialgleichung (A) durch Kenntniss

dieses Integrals auf eine Differentialgleichung $2m^{ter}$ Ordnung reducirt denken, die offenbar auch wieder zur Fuchs'schen Classe gehören wird und auch sonst dieselben Eigenschaften besitzt wie (A). Wir setzen darum gleich von vornherein $n = 2m$ voraus

Dann ist also

$$\psi'(x) = \sqrt{R(x)},$$

und die Integrale von (A) lauten

$$y_\iota = [R(x)]^{-\frac{n-1}{4}} e^{\varrho_\iota \int \sqrt{R(x)}\, dx} \qquad (\iota = 1, 2, \dots 2m),$$

die $\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_{2m}$ sind dabei paarweise einander gleich und entgegengesetzt, sei etwa

$$\varrho_{2\iota-1} = -\varrho_{2\iota} \qquad (\iota = 1, 2, \dots m),$$

also

$$\left.\begin{matrix} y_{2\iota-1} \\ y_{2\iota} \end{matrix}\right\} = [R(x)]^{-\frac{n-1}{4}} e^{\pm \varrho_{2\iota-1} \int \sqrt{R(x)}\, dx}.$$

Daraus folgt, dass je zwei der Integrale von (A), nämlich $y_{2\iota-1}$ und $y_{2\iota}$, eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten

$$\frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{1}{2}\frac{R'(x)}{R(x)}\frac{dv}{dx} - \varrho_{2\iota}^2 R(x) v = 0$$

befriedigen, so dass also in diesem Falle die Differentialgleichung (A) reductibel ist.

Da die Verhältnisse der $\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_{2m}$ rational sein müssen, können wir setzen

$$\varrho_{2\iota-1} = \gamma h_\iota \qquad (\iota = 1, 2, \dots m),$$

wo γ eine Constante, die h_ι ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler bedeuten; wir haben demnach

$$\left.\begin{aligned} y_{2\iota-1} &= [R(x)]^{-\frac{n-1}{4}} \omega^{h_\iota} \\ y_{2\iota} &= [R(x)]^{-\frac{n-1}{4}} \omega^{-h_\iota} \end{aligned}\right\} \qquad (\iota = 1, 2, \dots m),$$

wo

$$\omega = e^{\gamma \int \sqrt{R(x)}\, dx}$$

gesetzt wurde; d. h. die Verhältnisse der $y_1, y_2, \cdots y_{2m}$ sind rationale Functionen des Parameters ω, und die Gleichungen der so dargestellten rationalen Curve lauten für $n = 2m$

$$\text{(21)} \qquad \begin{cases} y_1 y_2 = y_3 y_4 = \cdots = y_{2m-1} y_{2m} \\ \left(\dfrac{y_1}{y_2}\right)^{h_\varkappa} = \left(\dfrac{y_{2\varkappa-1}}{y_{2\varkappa}}\right)^{h_1} \qquad (\varkappa = 2, 3, \dots m), \end{cases}$$

zu denen für $n = 2m + 1$ noch die Gleichung

(22) $$y_n^2 = y_1 y_2$$

hinzutritt.

Die Integrale $y_1, y_2, \cdots y_{2m}$ sind in diesem Falle algebraisch, wenn die

$$e^{\int \varrho_i \sqrt{R(x)}\, dx}$$

algebraisch sind Die Bedingungen hierfür ergeben sich aus einem Satze von Abel (Crelle's Journal Bd I, S. 221), der wie folgt lautet:

„Wenn ein Integral von der Form

$$\int \frac{f(x)\, dx}{\sqrt{\varphi(x)}},$$

wo $f(x)$, $\varphi(x)$ ganze rationale Functionen sind, durch Logarithmen ausdrückbar ist, so lässt es sich in die Form setzen

$$A \log \frac{p + q\sqrt{\varphi(x)}}{p - q\sqrt{\varphi(x)}},$$

wo A eine Constante, p, q ganze rationale Functionen von x sind."

Wenn also die Lösungen $y_1, y_2, \quad y_{2m}$ unserer Differentialgleichung algebraische Functionen von x sind, so lassen sie sich in der Form

$$\left\{\frac{p + q\sqrt{R(x)}}{p - q\sqrt{R(x)}}\right\}^{\pm \alpha}$$

darstellen, wo p, q ganze Functionen, α eine rationale Zahl bedeutet.

Es brauchen aber, wie sich an einfachen Beispielen zeigen lässt, die $y_1, y_2, \cdots y_{2m}$ nicht immer algebraische Functionen zu sein.

Wenn wir voraussetzen, dass die Differentialgleichung (A) irreductibel ist, so können wir also den folgenden Satz aussprechen:

Wenn die Integralcurve einer zur Fuchs'schen Classe gehörigen irreductiblen linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, deren determinirende Fundamentalgleichungen lauter rationale Wurzeln haben, eine algebraische Curve ist, so ist diese Differentialgleichung algebraisch integrirbar, ausgenommen wenn die Gleichungen jener Curve von der Form (D) sind, d. h. wenn dieselbe die rationale Normalcurve des $(n-1)$-fach ausgedehnten Raumes ist.

Dieser Satz wurde für den einfachsten der hier in Betracht kommenden Fälle $n = 3$ zuerst von Herrn Fuchs aufgestellt. Für $n = 4$ hat ihn der Verfasser, für allgemeines n Herr Wallenberg bewiesen.

Elfter Abschnitt.

Formulirung und allgemeine Discussion der Umkehrprobleme.

Erstes Kapitel.

191. **Differentialgleichungen dritter und vierter Ordnung mit einer homogenen Relation zwischen den Integralen. Covarianten. Hesse'sche Covariante. Werthe der unabhängigen Variablen für einen Punkt der Integralcurve.**

Für $n = 3$ ist der Fall des Bestehens einer homogenen Relation mit constanten Coefficienten zwischen den Elementen y_1, y_2, y_3 eines Fundamentalsystems der einzig mögliche, der in Betracht kommen kann, derselbe ist also durch den am Schlusse der vorigen Nummer erwähnten Fuchs'schen Satz erledigt.

Für $n = 4$ wäre nebst dem Falle, wo die homogenen Relationen zwischen den vier Integralen y_1, y_2, y_3, y_4 eine algebraische Curve definiren, noch der Fall in's Auge zu fassen, wo dieselben nur eine Fläche (Gebilde erster Stufe) darstellen, d. h. nach einem bereits (Nr. 186, S. 208) erwähnten Satze von Kronecker, wo eine und nur eine irreductible homogene Gleichung mit constanten Coefficienten

$$f(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0 \tag{1}$$

zwischen den Lösungen y_1, y_2, y_3, y_4 der gegebenen Differentialgleichung (A_1) besteht. In diesem Falle wäre also die Integralcurve $\mathfrak{C}$

$$y_\nu = y_\varkappa(x) \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

keine algebraische, sondern eine transcendente Raumcurve, die auf einer algebraischen Fläche liegt.

Wenn die Differentialgleichung (A_1) algebraische Coefficienten hat, so kann in diesem Falle ihre Transformationsgruppe H keine endliche sein, da sonst (A_1) algebraisch integrirbar wäre. Wenden wir auf die y_1, y_2, y_3, y_4 eine Transformation dieser Gruppe H an, so verwandelt sich $f(y_1, y_2, y_3, y_4)$ in eine homogene Function desselben Grades der y_1, y_2, y_3, y_4, die ebenfalls identisch verschwinden muss

Zufolge der Voraussetzung, dass keine von (1) verschiedene homogene Beziehung zwischen den y_1, y_2, y_3, y_4 bestehen soll, ergiebt sich demnach, dass sich durch Anwendung einer Transformation von H die Form f nur mit einer Constanten multipliciren kann Wir schliessen also zuvörderst, dass die Fläche (1) die Eigenschaft haben muss, durch eine Gruppe von Collineationen, die aus einer oder aus mehreren continuirlichen Schaaren besteht, in sich selbst überzugehen

Die Gruppe der Collineationen, durch welche eine algebraische Fläche in sich selbst transformirt wird, ist jedenfalls eine algebraische und muss folglich eine algebraische continuirliche (aus infinitesimalen Transformationen erzeugte) ausgezeichnete Untergruppe enthalten. Man kennt aus Untersuchungen der Herren Klein, Lie u. a. (vergl. die Arbeiten des Herrn Gino Fano in den Rendiconti della Accad. dei Lincei 1895) die sämmtlichen algebraischen Flächen, welche die Eigenschaft haben, durch continuirliche Schaaren von Collineationen in sich selbst überzugehen; diese sind also die einzigen, die die Integralcurve unserer Differentialgleichung (A_4) enthalten können Es bedarf aber noch der Untersuchung, ob die Integralcurve von (A_4), wenn sie auf einer dieser algebraischen Flächen liegt, auch wirklich transcendent sein kann, d. h. ob nicht schon daraus, dass zwischen den Integralen y_1, y_2, y_3, y_4 die eine Relation (1) besteht, deren linke Seite sich bei Anwendung irgend einer Transformation der Transformationsgruppe mit einer Constanten multiplicirt, mit Nothwendigkeit die algebraische Natur der Integralcurve, d. h. das Bestehen einer zweiten von (1) unabhängigen ebenfalls homogenen Relation erschlossen werden kann. Ohne auf die Erörterung dieser Frage genauer eingehen zu wollen, begnügen wir uns damit, einige Schlüsse aus dem Bestehen der Relation (1) zu ziehen, wobei wir es dahin gestellt lassen, ob neben (1) noch eine zweite davon unabhängige Relation besteht, sondern nur allein die Voraussetzung festhalten, dass $f(y_1, y_2, y_3, y_4)$ sich bei Anwendung der Transformationen von H mit einer Constanten multiplicirt.

Denken wir uns irgend eine Covariante der quaternären Form $f(y_1, y_2, y_3, y_4)$ gebildet, d. h. eine homogene ganze Function von y_1, y_2, y_3, y_4 und den Coefficienten von f, die die Eigenschaft besitzt, abgesehen von einem constanten Factor ungeändert zu bleiben, wenn wir in derselben an Stelle von y_1, y_2, y_3, y_4 setzen

$$\sum_{\varkappa=1}^{4} \alpha_{i\varkappa} y_\varkappa \qquad (i=1, 2, 3, 4) \tag{2}$$

und an Stelle der Coefficienten von $f(y_1, y_2, y_3, y_4)$ die Coefficienten der Form

(3) $$f\left(\sum_\varkappa \alpha_{1\varkappa} y_\varkappa,\ \sum_\varkappa \alpha_{2\varkappa} y_\varkappa,\ \sum_\varkappa \alpha_{3\varkappa} y_\varkappa,\ \sum_\varkappa \alpha_{4\varkappa} y_\varkappa\right),$$

wobei

$$(\alpha_{\iota\varkappa}) \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, 3, 4)$$

irgend eine lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante bedeutet. Stellt dann (2) eine Transformation der Transformations gruppe H unserer Differentialgleichung (A_4) dar, so unterscheidet sich die transformirte Form (3) von $f(y_1, y_2, y_3, y_4)$ nur durch einen constanten Factor; es wird folglich jede Covariante von $f(y_1, y_2, y_3, y_4)$ auch nur mit einem constanten Factor multiplicirt, wenn man in derselben auf die y_1, y_2, y_3, y_4 eine Transformation von H anwendet. Also ist die logarithmische Ableitung einer nicht verschwindenden Covariante von $f(y_1, y_2, y_3, y_4)$ nach x eine rationale Differentialfunction der y_1, y_2, y_3, y_4, die bei den Transformationen von H ungeändert bleibt, d. h. sie ist nach dem Picard-Vessiot'schen Satze eine algebraische Function von x, wenn, wie wir voraussetzen, (A_4) algebraische Coefficienten hat. Wir erhalten also den Satz:

Eine nicht identisch verschwindende Covariante von $f(y_1, y_2, y_3, y_4)$ ist in der Form

$$e^{\int r(x)\,dx}$$

darstellbar, wo $r(x)$ eine rationale Function desselben algebraischen Gebildes bedeutet, als dessen rationale Functionen die Coefficienten von (A_4) dargestellt werden können.

Wenn (A_4) insbesondere zur Fuchs'schen Classe gehört und die determinirenden Fundamentalgleichungen lauter rationale Wurzeln haben, so ist jede Covariante von $f(y_1, y_2, y_3, y_4)$ die Wurzel aus einer rationalen Function von x.

Bilden wir die sogenannte Hesse'sche Covariante von $f(y_1, y_2, y_3, y_4)$

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y_\iota \partial y_\varkappa}\right| \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, 3, 4),$$

so ist dieselbe eine homogene Function $(4m - 8)^{\text{ten}}$ Grades der y_1, y_2, y_3, y_4, wenn m den Grad von $f(y_1, y_2, y_3, y_4)$ bedeutet Dieselbe könnte

1) identisch in den y_1, y_2, y_3, y_4 verschwinden,

2) die Form $f(y_1, y_2, y_3, y_4)$ als Factor enthalten,

3) als Function von x verschwinden, wenn man für y_1, y_2, y_3, y_4 die Lösungen von (A_4) nimmt und, gleich Null gesetzt, eine von (1) unabhängige Relation zwischen den Integralen y_1, y_2, y_3, y_4 darstellen

Im letzteren Falle wäre die Integralcurve von (A_4) sicher algebraisch, so dass wir also auf die bereits allgemein erledigte Frage zurückkämen Im Falle 2) denken wir uns die Hesse'sche Covariante durch die höchste in derselben enthaltene Potenz von $f(y_1, y_2, y_3, y_4)$ dividirt und bezeichnen den Quotienten durch

$$P(y_1, y_2, y_3, y_4).$$

Dann könnte dieser Quotient eine Constante sein, wenn

2a) $m = 2$,

2b) $m = 4$ und die Hesse'sche Covariante das Quadrat der Form selbst,

2c) $m = 8$ und die Hesse'sche Covariante der Cubus von f ist.

Wenn wir von diesen Fällen ebenso wie von 1) vorläufig absehen, so ist also

$$P(y_1, y_2, y_3, y_4) = e^{\int r(x)\,dx} = \chi(x),$$

wo $r(x)$ eine nicht verschwindende algebraische Function bedeutet.

Sei k der Grad der homogenen Function $P(y_1, y_2, y_3, y_4)$, dann ist also

$$(4) \qquad P(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1^{\,k}\, \Pi(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = e^{\int r(x)\,dx} = \chi(x),$$

woselbst

$$\Pi(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = P(1, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$$

gesetzt wurde

Denken wir uns die Integralcurve $\mathfrak{C}$ von (A_4) dargestellt, indem wir η_1, η_2, η_3 jetzt etwa als gewöhnliche Cartesius'sche Coordinaten eines Punktes im Raume deuten und dieselben als Functionen von x auffassen

$$\eta_\varkappa = \eta_\varkappa(x) \qquad (\varkappa = 1, 2, 3),$$

so wird im Allgemeinen zu jedem Punkte der Curve eine gewisse Menge von x-Werthen gehören. Diese Werthe haben also die Eigenschaft, dass, wenn wir uns die η_1, η_2, η_3 auf geeigneten Wegen von x aus nach einem dieser Werthe hin fortgesetzt denken, dieselben Werthe der Functionen η_1, η_2, η_3 zum Vorschein kommen, wie für den Ausgangspunkt x. Sei x_1 irgend ein solcher mit x zusammengehöriger Werth, dann ist also

$$\eta_\varkappa(x) = \eta_\varkappa(x_1) \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

und folglich nach Gleichung (4)

$$(5) \qquad \frac{y_\iota(x)^k}{\chi(x)} = \frac{y_\iota(x_1)^k}{\chi(x_1)} \qquad (\iota = 1, 2, 3, 4).$$

Machen wir in die Differentialgleichung

$$(\mathrm{A}_4) \qquad \frac{d^4y}{dx^4} + p_1\frac{d^3y}{dx^3} + p_2\frac{d^2y}{dx^2} + p_3\frac{dy}{dx} + p_4 y = 0$$

die Substitution

$$y = e^{\frac{1}{k}\int r(x)\,dx} z,$$

so verwandelt sich dieselbe in

$$(\bar{\mathrm{A}}_1) \qquad \frac{d^4z}{dx^4} + \bar{p}_1(x)\frac{d^3z}{dx^3} + \bar{p}_2(x)\frac{d^2z}{dx^2} + \bar{p}_3(x)\frac{dz}{dx} + \bar{p}_1(x)z = 0,$$

wo (vergl. Nr. 172, S. 145) die $\bar{p}_i(x)$ rationale Functionen desselben algebraischen Gebildes darstellen, als dessen rationale Functionen die p_i $(i=1,2,3,4)$ vorausgesetzt wurden, und die Ausdrücke

$$(6) \qquad z_i(x) = y_i(x)e^{-\frac{1}{k}\int r(x)\,dx} \qquad (i=1,2,3,4)$$

stellen ein Fundamentalsystem von $(\bar{\mathrm{A}}_4)$ dar. Ersetzen wir in $(\bar{\mathrm{A}}_4)$ die unabhängige Variable x durch x_1, so besitzt die Differentialgleichung

$$(7) \qquad \sum_{i=0}^{4} \frac{d^iz}{dx_1^i}\bar{p}_{4-i}(x_1) = 0, \quad \bar{p}_0(x) = 1,$$

die Integrale $z_i(x_1)$ für $i = 1, 2, 3, 4$, also, da zufolge der Gleichungen (5), (6)

$$z_i(x_1) = e^{\frac{2\pi g\sqrt{-1}}{k}} z_i(x) \qquad (i=1,2,3,4)$$

ist, wo g eine ganze Zahl bedeutet, auch die Integrale

$$z_1(x), \quad z_2(x), \quad z_3(x), \quad z_4(x).$$

Sei nun

$$x = \varphi(x_1)$$

und führen wir in die Differentialgleichung (7) mittelst dieser Beziehung x als unabhängige Variable ein, so muss die so entstehende Differentialgleichung mit (A_4) identisch sein. D. h. es geht die Differentialgleichung (7) aus (A_1) durch die Transformation

$$(8) \qquad y = e^{\frac{1}{k}\int r(x)\,dx} z, \quad x = \varphi(x_1)$$

hervor.

Wenn nun für die Differentialgleichung (A_4) nicht alle Invarianten (16) (Nr. 187, S 213) identisch verschwinden, so folgt, wie in der Nr. 187 (S 212) aus der Betrachtung der absoluten Invarianten, die ja gemäss den Gleichungen (8) für die Differentialgleichungen (7) und

(A_4) identisch sind, dass x_1 eine algebraische Function von x sein muss. Sehen wir also von dem Falle ab, wo die Invarianten

$$\delta_{34}, \quad \varepsilon_3, \quad \varepsilon_4$$

identisch Null sind oder illusorisch werden, ein Fall, in welchem sich (A_4) auf eine Differentialgleichung mit constanten Coefficienten zurückführen lässt (Nr. 189, S. 219), und fassen denselben mit den Fällen 1), 2), 3) (S. 229) unter der Bezeichnung „Ausnahmefälle“ zusammen, so können wir den Satz aussprechen:

Wenn die Integralcurve $\mathfrak{C}$ der Differentialgleichung (A_4) mit algebraischen Coefficienten auf einer algebraischen Fläche liegt, so genügt, von den wohlumgrenzten Ausnahmefällen abgesehen, die Gesammtheit der Werthe der unabhängigen Variabeln, die zu einem und demselben Punkte der Curve $\mathfrak{C}$ gehören, als Functionen eines dieser Werthe aufgefasst, einer algebraischen Gleichung mit rationalen Coefficienten; die Anzahl dieser Werthe ist also jedenfalls eine endliche

Ein analoger Satz gilt, wie aus dem Gange des Beweises zu übersehen ist, auch für eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung (A) mit algebraischen Coefficienten, wenn zwischen den Integralen derselben eine homogene Relation mit constanten Coefficienten besteht, deren linke Seite sich bei jeder Transformation der Transformationsgruppe von (A) mit einer Constanten multiplicirt und welche eine Covariante besitzt, die sich nicht auf eine Constante reducirt. Nur bietet für ein beliebiges $n > 4$ die Fixirung der Ausnahmefälle grössere Schwierigkeiten dar wie für $n = 4$, deshalb haben wir uns auf die Betrachtung von Differentialgleichungen vierter Ordnung beschränkt. Wir wollen jetzt, ehe wir an den eben bewiesenen Satz weitere Ueberlegungen knüpfen, in eine Discussion der beiden Ausnahmefälle 1), 2) (S. 229) eintreten.

192. Erledigung der Ausnahmefälle. Ternäre Relation. Quadratische Relation mit nicht verschwindender Discriminante.

Der Fall 1), dass die Hesse'sche Covariante der quaternären Form $f(y_1, y_2, y_3, y_4)$ identisch verschwindet, kann nach einem von Hesse aufgestellten, von den Herren Gordan und Noether berichtigten Satze nur dann eintreten, wenn sich die Form $f(y_1, y_2, y_3, y_4)$ durch eine lineare Transformation der Grössen y_1, y_2, y_3, y_4 auf eine ternäre reduciren lässt. Wir können also von vornherein voraus-

setzen, dass das Fundamentalsystem y_1, y_2, y_3, y_4 von (A_4) so gewählt sei, dass etwa y_1, y_2, y_3 die von y_4 unabhängige homogene Relation

(I) $$f(y_1, y_2, y_3) = 0$$

befriedigen, deren linke Seite sich durch jede Substitution der Gruppe H mit einer Constanten multiplicirt. Sei

(II) $$\sum_{i=1}^{4} \alpha_{\varkappa i} y_i \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4)$$

eine Substitution S von H, dann muss $f(y_1, y_2, y_3)$ auch nach Ausübung der Substitution (II) von y_4 unabhängig sein, d. h $f(y_1, y_2, y_3)$ multiplicirt sich durch Anwendung der Substitution

$$\begin{gathered} \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \alpha_{13} y_3 , \\ \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \alpha_{23} y_3 , \\ \alpha_{31} y_1 + \alpha_{32} y_2 + \alpha_{33} y_3 \end{gathered}$$

mit einer Constanten λ Bilden wir nun die partiellen Ableitungen

(III) $$\frac{\partial f}{\partial y_1} = Y_1, \quad \frac{\partial f}{\partial y_2} = Y_2, \quad \frac{\partial f}{\partial y_3} = Y_3,$$

so erfahren diese Ausdrücke durch Anwendung der Transformation S auf y_1, y_2, y_3, y_4 die Substitution

$$\begin{gathered} \lambda \beta_{11} Y_1 + \lambda \beta_{12} Y_2 + \lambda \beta_{13} Y_3 , \\ \lambda \beta_{21} Y_1 + \lambda \beta_{22} Y_2 + \lambda \beta_{23} Y_3 , \\ \lambda \beta_{31} Y_1 + \lambda \beta_{32} Y_2 + \lambda \beta_{33} Y_3 , \end{gathered}$$

wobei gesetzt wurde:

$$\left| \alpha_{i\varkappa} \right|_{(i, \varkappa = 1, 2, 3)} = \delta; \quad \beta_{i\varkappa} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \alpha_{i\varkappa}} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, 3),$$

und zwischen den Y_1, Y_2, Y_3 besteht die sich durch Elimination der y_1, y_2, y_3 aus den Gleichungen (I) und (III) ergebende homogene Relation

(IV) $$F(Y_1, Y_2, Y_3) = 0,$$

die, wenn wir die y_1, y_2, y_3 als homogene Coordinaten eines Punktes einer Ebene deuten, die Gleichung der durch (I) definirten Curve in Liniencoordinaten darstellt. Die Coefficienten der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung

(α) $$\frac{D(Y, Y_1, Y_2, Y_3)}{D(Y_1, Y_2, Y_3)} = 0,$$

für welche Y_1, Y_2, Y_3 ein Fundamentalsystem bilden, sind rationale

Differentialfunctionen der y_1, y_2, y_3, y_4, die bei den Transformationen der Gruppe H ungeändert bleiben, d. h. es sind algebraische Functionen von x.

Wenn die Differentialgleichung (A_4) zur Fuchs'schen Classe gehört, so gehört auch die Differentialgleichung (α) zur Fuchs'schen Classe und zwischen den Elementen eines Fundamentalsystems besteht die Gleichung (IV). Der in der Nr. 190 (S. 226) aufgestellte Satz lehrt also, dass die Differentialgleichung (α) algebraisch integrirbar ist, wenn nicht die Gleichung (IV) die Form

$$Y_2^2 = Y_1 Y_3$$

hat Im letzteren Falle ist die Curve (I) ein Kegelschnitt, der sich durch eine Collineation, d. h. bei geeigneter Wahl des Fundamentalsystems y_1, y_2, y_3, y_4, in der Form

$$y_2^2 - y_1 y_3 = 0$$

darstellen lässt. Dieser Fall gehört also unter den Fall 2a), der nachher zu behandeln sein wird.

Sehen wir von demselben ab, so sind also die Y_1, Y_2, Y_3, und folglich auch die y_1, y_2, y_3, algebraische Functionen von x Wenn dann die y_1, y_2, y_3 nicht einer linearen Differentialgleichung dritter Ordnung mit rationalen Coefficienten genügen, so ist auch y_4 nothwendig algebraisch. Befriedigen dagegen die y_1, y_2, y_3 eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit rationalen Coefficienten

$$Q(y) = 0,$$

so ist die Differentialgleichung (A_4) in der Form

$$R\,Q(y) = 0$$

darstellbar, wo R einen Differentialausdruck erster Ordnung bedeutet. Mit Hülfe der in der Nr. 26 (Bd I, S. 81) gegebenen Formeln ergiebt sich dann y_4 durch blosse Ausübung von Quadraturen.

Wir schreiten zur Behandlung des Ausnahmefalles 2a), wo also $f(y_1, y_2, y_3, y_4)$ vom zweiten Grade

$$f(y_1, y_2, y_3, y_4) = \sum_{\varkappa=1}^{4} \sum_{\iota=1}^{4} a_{\iota\varkappa} y_\iota y_\varkappa = 0$$

ist und machen zunächst die Annahme, dass die Hesse'sche Covariante, d. h. in diesem Falle die Discriminante von f,

$$\left| a_{\iota\varkappa} \right| \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, 3, 4),$$

nicht identisch verschwindet.

Man kann dann bekanntlich lineare homogene Functionen

$$w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4$$

der y_1, y_2, y_3, y_4 so einführen, dass f die Gestalt:

$$f = w_1^2 + w_2^2 - w_3^2 - w_4^2$$

erhält. Setzt man

$$\text{(V)} \qquad \zeta_1 = \frac{w_1 - w_3}{w_4 - w_2}, \quad \zeta_2 = \frac{w_1 + w_3}{w_4 - w_2},$$

so lässt sich leicht einsehen, dass durch eine lineare Transformation der w_1, w_2, w_3, w_4, die die Form f mit einer Constanten multiplicirt, die ζ_1, ζ_2 sich entweder in

$$\text{(a)} \qquad \bar{\zeta}_1 = \frac{\alpha_1 \zeta_1 + \beta_1}{\gamma_1 \zeta_1 + \delta_1}, \quad \bar{\zeta}_2 = \frac{\alpha_2 \zeta_2 + \beta_2}{\gamma_2 \zeta_2 + \delta_2}$$

oder in

$$\text{(b)} \qquad \bar{\zeta}_1 = \frac{\alpha_1 \zeta_2 + \beta_1}{\gamma_1 \zeta_2 + \delta_1}, \quad \bar{\zeta}_2 = \frac{\alpha_2 \zeta_1 + \beta_2}{\gamma_2 \zeta_1 + \delta_2}$$

verwandeln müssen, wo die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Constanten bedeuten.

Setzen wir also (vergl. Nr. 180, S. 184)

$$\varDelta\begin{pmatrix}\zeta_1\\ x\end{pmatrix} = P_1(x),$$

$$\varDelta\begin{pmatrix}\zeta_2\\ x\end{pmatrix} = P_2(x)$$

und beachten die durch die Gleichung (c) der Nr. 180 (S 185) dargestellte Eigenschaft des Differentialausdruckes $\varDelta$, wonach derselbe eine Differentialinvariante für die allgemeine projective Gruppe von einer Variabeln ist, so erkennen wir, dass bei einer linearen Transformation der w_1, w_2, w_3, w_4, die die Form f ungeändert lässt, die beiden Ausdrücke $P_1(x)$, $P_2(x)$ entweder ungeändert bleiben oder in einander übergehen, je nachdem dieser Transformation die Formeln (a) oder (b) entsprechen. Bezeichnen wir mit $\widetilde{H}$ die Transformationsgruppe von (A_4) bei Zugrundelegung des Fundamentalsystems

$$w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4,$$

so sind demnach die Ausdrücke

$$P_1(x) + P_2(x), \quad P_1(x)\, P_2(x)$$

rationale Differentialfunctionen der w_1, w_2, w_3, w_4, die bei den Transformationen von $\widetilde{H}$ ungeändert bleiben.

Es genügen folglich die $P_1(x)$, $P_2(x)$ einer quadratischen Gleichung, deren Coefficienten sich aus den Coefficienten der

Differentialgleichung (A_4) und deren Ableitungen rational zusammensetzen.

Die Grössen ζ_1, ζ_2 können als die Integralquotienten zweier linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\text{(VI)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 u}{dx^2} = P_1(x) u, \\[2ex] \dfrac{d^2 v}{dx^2} = P_2(x) v \end{cases}$$

aufgefasst werden, für welche (vergl. Nr. 180, S. 184)

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{d\zeta_1}{dx}}}, \quad u_2 = \zeta_1 u_1$$

beziehungsweise

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{d\zeta_2}{dx}}}, \quad v_2 = \zeta_2 v_1$$

Fundamentalsysteme darstellen.

Denken wir uns dann das Fundamentalsystem y_1, y_2, y_3, y_4 von (A_4) von vornherein so gewählt, dass

$$w_4 - w_2 = y_1, \quad w_1 - w_3 = y_2, \quad w_1 + w_3 = y_3, \quad w_1 + w_2 = y_4$$

ist und setzen wir

$$y_1 = \lambda u_1 v_1,$$

so ergeben die Gleichungen (V)

$$y_2 = \lambda u_2 v_1, \quad y_3 = \lambda v_2 u_1, \quad y_4 = \lambda v_2 u_2.$$

Wenn die w_1, w_2, w_3, w_4 eine Transformation von $\tilde{H}$ erfahren, so verwandeln sich die beiden Systeme u_1, u_2 und v_1, v_2 entweder in lineare homogene Functionen ihrer selbst, oder u_1, u_2 gehen in lineare homogene Functionen der v_1, v_2 über und umgekehrt. Die vier Producte

$$u_1 v_1, \quad u_1 v_2, \quad u_2 v_1, \quad u_2 v_2$$

verwandeln sich also bei jeder Transformation von $\tilde{H}$ in lineare homogene Functionen ihrer selbst mit constanten Coefficienten. Es sind demnach die Coefficienten der linearen Differentialgleichung vierter Ordnung

$$(\bar{A}_4) \qquad \frac{D(z, u_1 v_1, u_2 v_1, v_2 u_1, v_2 u_2)}{D(u_1 v_1, u_2 v_1, v_2 u_1, v_2 u_2)} = 0$$

rationale Differentialfunctionen der w_1, w_2, w_3, w_4, die bei den Transformationen der Gruppe $\tilde{H}$ ungeändert bleiben, das heisst, sie gehören demselben Rationalitätsbereiche an wie die Coefficienten von (A_1). Da die Ausdrücke

$$u_1 v_1, \quad u_1 v_2, \quad u_2 v_1, \quad u_2 v_2$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $(\bar{A}_4)$ darstellen, geht diese Differentialgleichung aus (A_4) durch die Transformation

$$y = \varrho z$$

hervor, es ist demnach (vergl. Nr. 172, S. 145) ϱ in der Form

$$\varrho = e^{\int r(x)\,dx}$$

darstellbar, wo $r(x)$ eine Function bedeutet, die demselben Rationalitätsbereiche angehört, wie die Coefficienten von (A_4).

Ist umgekehrt ein gewisser Rationalitätsbereich festgelegt und bedeuten $P_1(x)$, $P_2(x)$ irgend zwei Functionen, die einer quadratischen Gleichung mit diesem Rationalitätsbereiche angehörigen Coefficienten genügen, so können wir die Differentialgleichung $(\bar{A}_4)$ bilden, indem wir z. B

$$z = u \cdot v$$

setzen und nach viermaliger Differentiation dieser Gleichung die u, v und deren Ableitungen mit Hülfe der Differentialgleichungen (VI) eliminiren. Die Coefficienten der Differentialgleichung $(\bar{A}_4)$ gehören dann dem Rationalitätsbereiche an, und ihre Integrale befriedigen eine homogene quadratische Relation mit nicht verschwindender Discriminante Damit ist also der Fall 2a) erledigt, wenn die Discriminante der Form f von Null verschieden ist

193. Ternäre quadratische Relation. Abwickelbare Fläche vierter Ordnung.

Bedeutet f eine quadratische Form, deren Discriminante

$$|a_{ik}| = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

ist, so lässt sich bekanntlich diese Form bei geeigneter Wahl des Fundamentalsystems in die Gestalt setzen

$$f = y_2^2 - y_1 y_3 = 0.$$

(Der Fall, wo die quadratische Form f ein Product von zwei linearen Factoren ist, kommt für uns nicht in Betracht, da die y_1, y_2, y_3, y_4 ein Fundamentalsystem bilden sollen.) Der Ausdruck $y_2^2 - y_1 y_3$ ist dann die Discriminante der quadratischen binären Form

$$\varphi = y_1 t^2 + 2 y_2 t s + y_3 s^2$$

und bleibt folglich bis auf einen Factor ungeändert, wenn auf die t, s eine lineare Substitution

$$\left.\begin{matrix} \alpha t + \beta s \\ \gamma t + \delta s \end{matrix}\right\} \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

ausgeübt wird. Einer solchen linearen Substitution der t, s entspricht aber eine lineare homogene Substitution der y_1, y_2, y_3 mit constanten Coefficienten.

Wenn umgekehrt die y_1, y_2, y_3, y_4 eine lineare Substitution erfahren, welche die Form f mit einem constanten Factor multiplicirt,

$$\bar{y}_\varkappa = \sum_{i=1}^{4} \alpha_{\varkappa i} y_i \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4),$$

so verwandelt sich (vergl. die Erörterungen im Falle 1)) f durch die Substitution

$$\bar{y}_\varkappa = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{\varkappa i} y_i \qquad (\varkappa = 1, 2, 3) \quad .$$

in sich selbst multiplicirt mit einer Constanten. Betrachten wir dann die beiden binären Formen

$$y_1 t^2 + 2 y_2 ts + y_3 s^2,$$
$$\bar{y}_1 t^2 + 2 \bar{y}_2 ts + \bar{y}_3 s^2,$$

so unterscheiden sich die Discriminanten derselben nur durch einen constanten Factor, die Formen sind also im Sinne der Invariantentheorie aequivalent und gehen durch eine lineare homogene Substitution

$$\left.\begin{matrix} \alpha t + \beta s \\ \gamma t + \delta s \end{matrix}\right\} \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,$$

deren Coefficienten von den y_1, y_2, y_3 unabhängig sind, in einander über.

Wenn also auf die y_1, y_2, y_3, y_4 eine Transformation der Gruppe H ausgeübt wird, so erfährt der Quotient

$$\zeta = \frac{t}{s}$$

eine gebrochene lineare Substitution, und es ist demnach

$$\varDelta \binom{\zeta}{x} = P(x)$$

eine Function, die demselben Rationalitätsbereiche angehört, wie die Coefficienten von (A_4)

Die Discriminante $y_2^2 - y_1 y_3$ der Form φ ist das Resultat der Elimination aus den Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0,$$

es ist demnach

$$\zeta = -\frac{y_2}{y_1} = -\frac{y_3}{y_2}.$$

Setzen wir also

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{d\zeta}{dx}}}, \quad u_2 = \zeta u_1,$$

so sind u_1, u_2 die Elemente eines Fundamentalsystems der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = P(x) u,$$

und es ist

$$y_1 = \varrho u_1^2, \quad y_2 = \varrho u_1 u_2, \quad y_3 = \varrho u_2^2.$$

Die u_1^2, $u_1 u_2$, u_2^2 befriedigen (vergl Nr. 185, S. 203) eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit dem Rationalitätsbereiche angehörigen Coefficienten; dieselbe geht also durch Multiplication der abhängigen Variabeln mit ϱ in eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung für y_1, y_2, y_3 über Das Integral y_4 ergiebt sich dann nach dem auch im Falle 1) angedeuteten Verfahren durch Quadraturen.

Wir gehen an die Erledigung des Falles 2b).

Wenn die Hesse'sche Covariante einer quaternären Form m^{ten} Grades

$$f(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1^m F(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$$

mit der Form gleichzeitig verschwindet, so stellt die Gleichung

$$f(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$$

eine abwickelbare Fläche dar. Die Gleichung

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial y_\iota \partial y_\varkappa} \right| = 0 \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, 3, 4)$$

lässt sich nämlich unter Benutzung der Gleichung

$$F(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = 0$$

in die Form setzen

$$\left(\frac{\partial^2 \eta_3}{\partial \eta_1 \partial \eta_2}\right)^2 - \frac{\partial^2 \eta_3}{\partial \eta_1^2} \frac{\partial^2 \eta_3}{\partial \eta_2^2} = 0,$$

und dies ist die bekannte partielle Differentialgleichung, die zwischen den Cartesius'schen Coordinaten einer abwickelbaren Fläche bestehen muss

Wenn insbesondere $m = 4$ und die Fläche

$$f(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$$

eine abwickelbare ist, so ist, wie Cayley gezeigt hat, die Hesse'sche

Covariante stets das Quadrat der Form selbst, und f lässt sich in die Gestalt setzen

$$f = y_1^2 y_4^2 - 6 y_1 y_2 y_3 y_4 + 4 y_1 y_3^3 + 4 y_2^3 y_4 - 3 y_2^2 y_3^2 = 0.$$

In diesem Falle ist also f nichts anderes als die Discriminante der binären cubischen Form

$$\varphi = y_1 t^3 + 3 y_2 t^2 s + 3 y_3 t s^2 + y_4 s^3,$$

und daraus erhellt sofort, dass die Form f keine von sich selbst wesentlich verschiedene Covariante besitzen kann, da jede Covariante von f eine Invariante von φ sein müsste und bekanntlich die Discriminante die einzige Invariante einer binären cubischen Form ist.

Transformirt man φ durch die Substitution

$$\text{(VII)} \qquad \left\{\begin{array}{l} t = \alpha t' + \beta s' \\ s = \gamma t' + \delta s' \end{array}\right\} \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,$$

so verwandelt sich diese Form in

$$\varphi' = y_1' t^3 + 3 y_2' t^2 s + 3 y_3' t s^2 + y_4' s^3,$$

wo die y_1', y_2', y_3', y_4' mit den y_1, y_2, y_3, y_4 durch die Transformationsrelationen (vergl. Nr. 181, S. 186)

$$\text{(VIII)} \qquad \begin{cases} y_1 = \alpha^3 y_1' + 3\alpha^2\gamma y_2' + 3\alpha\gamma^2 y_3' + \gamma^3 y_4', \\ y_2 = \alpha^2\beta y_1' + (2\beta\gamma + \alpha\delta)\alpha y_2' + (2\alpha\delta + \beta\gamma)\gamma y_3' + \gamma^2\delta y_4', \\ y_3 = \alpha\beta^2 y_1' + (2\alpha\delta + \beta\gamma)\beta y_2' + (2\beta\gamma + \alpha\delta)\delta y_3' + \gamma\delta^2 y_4', \\ y_4 = \beta^3 y_1' + 3\beta^2\delta y_2' + 3\beta\delta^2 y_3' + \delta^3 y_4' \end{cases}$$

verknüpft sind, und es ist

$$f(y_1', y_2', y_3', y_4') = (\alpha\delta - \beta\gamma)^6 f(y_1, y_2, y_3, y_4)$$

Die letztere Gleichung ist die Eliminationsresultante der Gleichungen (VIII), somit die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen derselben D. h. wenn sich die Form f durch eine lineare Transformation der y_1, y_2, y_3, y_4 mit einer Constanten c multiplicirt, so muss diese Transformation die Gestalt (VIII) haben, wo dann

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \sqrt[3]{c} = \varepsilon$$

zu nehmen ist.

Also muss in unserem Falle die Transformationsgruppe H der Differentialgleichung eine Untergruppe der viergliedrigen algebraischen, durch die Gleichungen (VIII) dargestellten Gruppe sein.

Wenden wir auf die y_1, y_2, y_3, y_4 eine Transformation der Gruppe H an, so verwandeln sich demnach t, s in lineare homogene Functionen ihrer selbst, und zwar, wenn die y_1, y_2, y_3, y_4 die Substitution (VIII) erfahren, in

$$\text{(IX)} \qquad t' = \frac{-\delta t + \beta s}{\varepsilon}, \quad s' = \frac{\gamma t - \alpha s}{\varepsilon}, \quad \varepsilon = \alpha\delta - \beta\gamma.$$

Die Gleichung $f = 0$ ist die Eliminationsresultante der Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0,$$

aus denselben folgt:

$$\frac{t^2}{s^2} = \frac{y_4 y_2 - y_3^2}{y_1 y_3 - y_2^2}, \quad \frac{2ts}{s^2} = \frac{y_2 y_3 - y_1 y_4}{y_1 y_3 - y_2^2},$$

wir können also setzen

$$\begin{cases} u_1 = \varrho s^2 = y_1 y_3 - y_2^2, \\ u_2 = \varrho st = \frac{1}{2}(y_2 y_3 - y_1 y_4), \\ u_3 = \varrho t^2 = y_4 y_2 - y_3^2. \end{cases}$$

Nun ist aber die Hesse'sche Covariante der Form φ

$$u_1 t^2 - u_2 ts + u_3 s^2,$$

dieselbe muss sich, wenn t, s die Substitution (VII) erfahren, mit ε^2 multipliciren. Daraus ergiebt sich leicht, dass, wenn auf die y_1, y_2, y_3, y_4 die Transformation (VIII) der Gruppe H ausgeübt wird, die u_1, u_2, u_3 die Substitution

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^2}(\alpha^2 u_1 - 2\alpha\gamma u_2 + \gamma^2 u_3), \\ \frac{1}{\varepsilon^2}((\alpha\delta + \beta\gamma)u_2 - \alpha\beta u_1 + \gamma\delta u_3), \\ \frac{1}{\varepsilon^2}(\beta^2 u_1 - 2\beta\delta u_2 + \delta^2 u_3) \end{cases}$$

erfahren. Die u_1, u_2, u_3 genügen folglich einer linearen Differentialgleichung dritter Ordnung

$$-\frac{D(u, u_1, u_2, u_3)}{D(u_1, u_2, u_3)} = 0,$$

deren Coefficienten demselben Rationalitätsbereiche angehören, wie die Coefficienten von (A_t), und zwischen den u_1, u_2, u_3 besteht die Relation

$$u_2^2 - 4u_1 u_3 = 0.$$

Im Sinne des allgemeinen Satzes der Nr. 186 (S. 210) ist das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung dritter Ordnung als binäre

Form zweiten Grades der t, s darstellbar, welche ihrerseits wieder einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit dem Rationalitätsbereiche angehörigen Coefficienten genügen, wie aus den Gleichungen (IX) unmittelbar zu erkennen ist.

Man findet aus den entwickelten Formeln, dass ϱ den Werth Eins haben muss, es ist also in dem betrachteten Falle

$$y_1 y_3 - y_4^2 = s^2, \quad \frac{1}{2}(y_2 y_3 - y_1 y_4) = ts, \quad y_4 y_2 - y_3^2 = t^2,$$

die Integration der Differentialgleichung (A_4) ist demnach auf die Integration einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung und auf Quadraturen zurückgeführt.

Bemerken wir noch, dass die Gleichungen

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0$$

die Wendekante der abwickelbaren Fläche vierter Ordnung $f = 0$ darstellen.

Der Fall 2c) kann unter den in Bezug auf die y_1, y_2, y_3, y_4 festzuhaltenden Voraussetzungen nicht eintreten

Nachdem auf diese Weise die „Ausnahmefälle“ erledigt sind, knüpfen wir an die in der Nummer 191 durchgeführten Untersuchungen an, um aus denselben einige bemerkenswerthe Folgerungen zu ziehen.

Zweites Kapitel.

194. Differentialgleichungen, deren unabhängige Variable eine eindeutige Function des Ortes der Integralcurve ist.

Wenn eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung algebraisch integrirbar ist, oder auch wenn nur die Integralquotienten $\eta_1, \eta_2, \cdot\ \eta_{n-1}$ algebraische Functionen der unabhängigen Variabeln x sind, so ist jedenfalls die Anzahl der Werthe der unabhängigen Variabeln, für welche auf geeigneten Wegen fortgesetzt die $\eta_1, \eta_2, \cdot\ \eta_{n-1}$ dieselben Werthe annehmen wie für x, eine endliche, und die Gesammtheit dieser Werthe $x_1, x_2, \cdots x_{\nu-1}$ genügt einer algebraischen Gleichung mit in x rationalen Coefficienten.

Der in der Nr. 191 (S. 232) für die Differentialgleichung vierter Ordnung (A_4) bewiesene Satz lenkt unsere Aufmerksamkeit auf den Umstand, dass es auch lineare Differentialgleichungen (A) geben kann, deren Integralquotienten von x nicht algebraisch abhängen, und für welche dennoch die Gesammtheit der Stellen der unabhängigen Variabeln, an denen auf geeigneten Wegen fortgesetzt die Integralquotienten dieselben Werthe annehmen wie für x, einer algebraischen Gleichung mit in x rationalen Coefficienten Genüge leisten Das heisst mit anderen Worten: Wenn wir uns die Integralcurve $\mathfrak{C}$ der Differentialgleichung (A) in der Form

$$\eta_\varkappa = \eta_\varkappa(x) \qquad (\varkappa = 1, 2, \quad n-1)$$

dargestellt denken, und wir suchen diejenigen Werthe des Parameters x, für welche derselbe Curvenpunkt zum Vorschein kommt, wie für den bestimmten Werth x dieses Parameters, so befriedigen diese Werthe $x_1, x_2, \cdot\ x_n$ eine algebraische Gleichung mit in x rationalen Coefficienten. Wir verweilen etwas ausführlicher bei der Betrachtung dieser Art von Differentialgleichungen, um schon hier eine Vorstellung von der fundamentalen Wichtigkeit derselben für unsere Theorie gewinnen zu können

Wir setzen voraus, dass die betrachtete Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdot\ + p_n y = 0$$

der Fuchs'schen Classe angehört

Bilden wir nach dem Vorgange von Herrn Fuchs, unter α eine unbestimmte Constante verstehend, den Ausdruck

(9) $$t = (\alpha - x)(\alpha - x_1)(\alpha - x_2) \cdot\cdot\ (\alpha - x_{\nu-1}) = \varphi(x, \alpha),$$

so erleiden, wenn x irgend einen geschlossenen Umlauf vollzieht, die $x_1, x_2, \cdot\ \cdot x_{\nu-1}$ nur eine Permutation, und da überdies diese Grössen von x algebraisch abhängen, so ist t eine algebraische Function von x, die bei allen Umläufen ungeändert bleibt, d h. t oder $\varphi(x, \alpha)$ ist eine rationale Function von x.

Betrachten wir die $x_\varkappa$ als Functionen von x,

$$x_\varkappa = f_\varkappa(x) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdot\ \nu - 1),$$

so können sich die Ausdrücke

$$x_i,\ f_\varkappa(x_i) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdot\ \nu - 1)$$

von den Grössen

$$x,\ x_1,\ x_2, \cdots x_{\nu-1}$$

nur durch die Reihenfolge unterscheiden, da zufolge der Definition der $x_1, x_2, \ \cdot x_{\nu-1}$ nur für diese Werthe der unabhängigen Variabeln derselbe Punkt der Curve $\mathfrak{C}$ zum Vorschein kommen sollte wie für x Es ist folglich

(10) $$\varphi(x, \alpha) = \varphi(x_\varkappa, \alpha) \qquad (\varkappa = 1, 2,\ \ \nu - 1)$$

Berechnen wir aus der Gleichung (9) x als Function von t, so gehören zu einem willkürlichen Werthe von t genau die Werthe

$$x,\ x_1,\ x_2, \cdots x_{\nu-1},$$

denn für einen von diesen Werthen verschiedenen Werth x' kann die Gleichung

$$\varphi(x, \alpha) = \varphi(x', \alpha)$$

wegen der Unbestimmtheit von α nicht erfüllt werden. Vollzieht also t irgend einen geschlossenen Umlauf in seiner Ebene, so beschreibt x einen Weg, der in irgend einem der Punkte

$$x,\ x_1,\ x_2, \cdot\ \ x_{\nu-1}$$

endet.

Betrachten wir nun die Integralquotienten $\eta_1, \eta_2, \cdot\cdot\ \eta_{n-1}$ der Differentialgleichung (A) als Functionen von t.

Wenn t geschlossene Umläufe vollzieht, so hat x Wege zu beschreiben, die sich aus geschlossenen Umläufen von x und aus solchen Wegen zusammensetzen, längs denen fortgesetzt die $\eta_1, \eta_2, \cdot\cdot\ \eta_{n-1}$ dieselben Werthe annehmen wie für x Bezeichnen wir also durch ϑ die Gruppe der projectiven Substitutionen, welche die $\eta_1, \eta_2, \ \cdot\ \eta_{n-1}$ durch alle möglichen Umläufe von x erfahren, so erleiden die Integral-

quotienten $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ bei einem geschlossenen Umlaufe von t nur eine Substitution dieser Gruppe ϑ. Ueberdies sind die $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ als Functionen von t betrachtet überall bestimmt, da dieselben als Functionen von x keine Unbestimmtheitsstellen besitzen und t eine rationale Function von x ist

Setzen wir nun (vergl. Nr. 179, S 175, Gleichungen (2), (3))

$$(11) \qquad \begin{cases} \mathfrak{y}_1 = \left\{\dfrac{1}{D(\eta_1', \eta_2', \cdots \eta_{n-1}')}\right\}^{\frac{1}{n}}, \\ \mathfrak{y}_\varkappa = \mathfrak{y}_1 \eta_{\varkappa-1} \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots n), \end{cases}$$

wo $\eta_\varkappa'$ die Ableitung von $\eta_\varkappa$ nach t bedeutet und

$$D(\eta_1', \eta_2', \cdots \eta_{n-1}') = \left|\frac{d^\iota \eta_\varkappa}{dt^\iota}\right| \qquad (\varkappa, \iota = 1, 2, \cdots n-1)$$

zu nehmen ist, so folgt aus der Gleichung (12) der Nr. 22 (Bd I, S. 60), dass

$$D(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n) = \underset{(\iota, \varkappa = 1, 2, \cdots n)}{\left|\frac{d^{\iota-1} \mathfrak{y}_\varkappa}{dt^{\iota-1}}\right|} = \mathfrak{y}_1^n D(\eta_1', \eta_2', \cdots \eta_{n-1}') = 1$$

ist.

Sei dann

$$\bar{\eta}_{\varkappa-1} = \frac{\alpha_{\varkappa 1} + \alpha_{\varkappa 2}\eta_1 + \cdots + \alpha_{\varkappa n}\eta_{n-1}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}\eta_1 + \cdots + \alpha_{1n}\eta_{n-1}} \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots n)$$

die einem Umlaufe von t entsprechende projective Substitution der Gruppe ϑ, und bezeichnen wir durch $\bar{\mathfrak{y}}_\varkappa$ dasjenige, was aus $\mathfrak{y}_\varkappa$ wird, wenn t jenen Umlauf vollzieht, so ist offenbar

$$\bar{\mathfrak{y}}_\varkappa = M(t)(\alpha_{\varkappa 1}\mathfrak{y}_1 + \alpha_{\varkappa 2}\mathfrak{y}_2 + \cdots + \alpha_{\varkappa n}\mathfrak{y}_n),$$

wo $M(t)$ eine noch zu bestimmende Function von t bedeutet. Nun ist aber zufolge der bereits oben benutzten Gleichung (12) der Nr 22 (Bd I, S 60)

$$D(\bar{\mathfrak{y}}_1, \bar{\mathfrak{y}}_2, \cdots \bar{\mathfrak{y}}_n) = [M(t)]^n \underset{(\iota, \varkappa = 1, 2, \cdots n),}{|\alpha_{\iota\varkappa}|} D(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n)$$

und da $D(\bar{\mathfrak{y}}_1, \bar{\mathfrak{y}}_2, \cdots \bar{\mathfrak{y}}_n)$ den Werth bedeutet, in welchen sich $D(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n)$ durch den in Rede stehenden Umlauf von t verwandelt, also auch constant und zwar gleich Eins ist, so haben wir

$$M(t) = \sqrt[n]{\frac{1}{|\alpha_{\iota\varkappa}|}} \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

d h. die durch die Gleichungen (11) definirten Functionen

$$\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n$$

von t erleiden, wenn t einen geschlossenen Umlauf vollzieht, eine unimodulare, lineare homogene Substitution. Die Gesammtheit dieser, allen möglichen Umläufen von t entsprechenden Substitutionen bildet eine lineare homogene unimodulare Gruppe Θ, die mit der projectiven Gruppe ϑ isomorph ist.

Ferner ist sofort einzusehen, dass die Functionen $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n$ von t keine Unbestimmtheitsstellen besitzen können, und daraus folgt endlich, dass die Coefficienten der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$(12)\quad (-1)^n \frac{D(\mathfrak{y}, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \quad \mathfrak{y}_n)}{D(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \quad \mathfrak{y}_n)} = \frac{d^n \mathfrak{y}}{dt^n} + r_2(t)\frac{d^{n-2}\mathfrak{y}}{dt^{n-2}} + \cdots + r_n(t)\mathfrak{y} = 0,$$

für welche $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n$ ein Fundamentalsystem darstellt, eindeutige Functionen von t sind, die sich überall bestimmt verhalten, d. h. diese Coefficienten sind rationale Functionen von t, und die Differentialgleichung (12) gehört zur Fuchs'schen Classe. Die Gruppe Θ ist dann im allgemeinen die Monodromiegruppe der Differentialgleichung (12).

Da die Integralquotienten von (12) mit den Integralquotienten von (A) übereinstimmen, gehen diese beiden Differentialgleichungen durch die Transformation

$$(13)\qquad y = \lambda \mathfrak{y}, \quad t = \varphi(x, \alpha)$$

aus einander hervor, wo (vergl. Nr. 181, S. 189, Gleichung (10))

$$(14)\qquad \lambda = e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx}\left(\frac{dt}{dx}\right)^{-\frac{1}{2}(n-1)}$$

gefunden wird. Bemerkenswerth ist der Umstand, dass die Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten (A) durch eine Transformation, in welcher die unabhängige Variable x nicht rational durch die neue unabhängige Variable t darstellbar ist, dennoch in eine Differentialgleichung (12) mit rationalen Coefficienten übergeführt wird.

Die Differentialgleichung (12) erfreut sich nun einer überaus wichtigen Eigenschaft

Es giebt nämlich, wenn t ein willkürlicher Werth der unabhängigen Variabeln ist, keinen davon verschiedenen Werth t_1, für welchen derselbe Punkt der Integralcurve $\mathfrak{C}$ zum Vorschein kommt, d. h. für den auf geeigneten Wegen fortgesetzt, die Integralquotienten $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ dieselben Werthe annehmen, wie für t.

Würde nämlich jeder Integralquotient von (12) in t_1 denselben Werth annehmen wie in t, und bedeuten $x, x_1, x_2, \cdots x_{\nu-1}$ die Werthe von x, die vermöge der Gleichung

$$t = \varphi(x, \alpha)$$

zu t gehören, ebenso $x', x_1', x_2', \cdots x'_{\nu-1}$ die Werthe von x, die vermöge derselben Gleichung zu t_1 gehören, so kann, wenn t_1 von t verschieden ist, keines der $x', x_1', \cdots x'_{\nu-1}$ mit einem der $x, x_1, \cdots x_{\nu-1}$ übereinstimmen, weil $\varphi(x, \alpha)$ eine rationale, also eindeutige Function von x ist. Es würde demnach für die 2ν Werthe $x', x_1', \cdots x'_{\nu-1}$ und $x, x_1, \cdots x_{\nu-1}$ ein und derselbe Punkt der Integralcurve $\mathfrak{C}$ zum Vorschein kommen müssen, was der Definition von t widerstreitet.

Fassen wir also in der Differentialgleichung (12) die unabhängige Variable t als Function des Ortes der Integralcurve $\mathfrak{C}$ auf, so ist diese Function eine *eindeutige*, und zwar hat dieselbe die Eigenschaft, ungeändert zu bleiben, wenn die Integralcurve durch eine Collineation der Gruppe ϑ in sich selbst transformirt wird.

195. **Algebraisch integrirbare lineare Differentialgleichungen. Satz von Fuchs.**

Um die in der vorhergehenden Nummer dargelegten Verhältnisse an einem einfachen Beispiele zu erläutern, denken wir uns, die Differentialgleichung (A) habe algebraische Integrale.

Dann ist also zufolge der Gleichungen (13), (14), wo jetzt λ die Wurzel aus einer rationalen Function von x bedeutet, auch die Differentialgleichung (12) algebraisch integrirbar, und die in diesem Falle algebraische Integralcurve $\mathfrak{C}$ wird in homogenen Coordinaten dargestellt durch die zwischen den Integralen $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n$ bestehenden homogenen Relationen mit constanten Coefficienten

$$(15) \qquad g_\iota(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n) = 0 \qquad (\iota = 1, 2, 3, \cdots),$$

deren Anzahl nicht kleiner ist als $n - 2$. Es ist dann in (12) die unabhängige Variable t eine eindeutige Function der durch die Gleichungen

$$g_\iota(1, \eta_1, \cdots \eta_{n-1}) = 0 \qquad (\iota = 1, 2, 3 \cdots)$$

mit einander verknüpften Grössen $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$, also in unserem Falle, wo diese Grössen von t algebraisch abhängen, eine rationale Function derselben. Diese rationale Function bleibt ungeändert, wenn auf die $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ eine Substitution der (endlichen) projectiven Gruppe ϑ ausgeübt wird, die mit der Monodromiegruppe $\overline{\Theta}$ von (12) isomorph ist. Wir haben also zunächst den wichtigen, im Wesentlichen von Herrn Fuchs herrührenden Satz:

Wenn eine lineare Differentialgleichung (A) mit rationalen Coefficienten algebraisch integrirbar ist, so kann man von derselben durch die Transformation

$$y = \lambda \mathfrak{y}, \quad t = \varphi(x),$$

wo λ die Wurzel aus einer rationalen Function, $\varphi(x)$ eine rationale Function bedeutet, zu einer aequivalenten Differentialgleichung für $\mathfrak{y}$ als Function von t übergehen, in welcher die unabhängige Variable t als rationale Function der Integralquotienten darstellbar ist

Die rationale Function der $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$, welche gleich t ist, braucht im allgemeinen nicht die Eigenschaft zu haben, bei den projectiven Substitutionen der Gruppe ϑ formal, d. h. wenn man die $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ als unabhängige Variable auffasst, ungeändert bleiben. Man kann dieselbe, indem man Zähler und Nenner mit einer geeigneten Potenz von $\mathfrak{y}_1$ multiplicirt, auf die Form bringen

$$t = \frac{g(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n)}{h(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n)},$$

wo g, h ganze homogene Functionen desselben Grades der $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n$ sind Betrachten wir dann das System von homogenen Gleichungen

$$(16) \qquad \begin{cases} g(\mathfrak{y}_1, \cdots \mathfrak{y}_n) - t h(\mathfrak{y}_1, \cdots \mathfrak{y}_n) = 0, \\ g_\iota(\mathfrak{y}_1, \cdots \mathfrak{y}_n) = 0 \qquad (\iota = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

und denken uns in demselben auf die $\mathfrak{y}_1, \cdots \mathfrak{y}_n$ eine Substitution der Gruppe $\overline{\Theta}$ ausgeübt, so muss dieses Gleichungssystem in ein ihm völlig aequivalentes übergehen, welches ebenso wie (16) die $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ als Functionen von t vollständig definirt.

Wir wollen die linken Seiten des Gleichungssystems (16) als Functionen der $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n$ betrachten und dieselben als die Elemente eines Modulsystems M im Sinne von Kronecker auffassen. Die Variable t spielt dann die Rolle eines Parameters, und das Modulsystem M oder das Gleichungssystem (16) ist von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Stufe in der durch die $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ bestimmten $(n-1)$-fachen Mannigfaltigkeit R_{n-1}.

Wir denken uns nun dieses Modulsystem M nach dem von Kronecker in der „Festschrift etc" dargelegten auf der Theorie der Elimination beruhenden Verfahren in seine irreductiblen Theiler zerlegt Diese Theiler stellen, gleich Null gesetzt, Gebilde verschiedener Stufen in der $(n-1)$-fachen Mannigfaltigkeit R_{n-1} dar; die Irreductibilität eines solchen Theilers $(n-k)^{\text{ter}}$ Stufe giebt sich darin kund, dass kein Theil des durch denselben dargestellten Gebildes, welcher

selbst ein Gebilde $(n - k)^{\text{ter}}$ Stufe ist, durch ein System von algebraischen Gleichungen definirt werden kann.

Für uns kommen dann nur diejenigen Theiler in Betracht, welche Gebilde $(n - 1)^{\text{ter}}$ Stufe, also Systeme isolirter Punkte darstellen.

Einer und nur einer dieser Theiler P verschwindet identisch, wenn wir die $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n$ durch die gleichbezeichneten Lösungen der Differentialgleichung (12) ersetzen. Wir können denselben, wie aus dem Kronecker'schen Verfahren für seine Herstellung direct zu übersehen ist, durch ein System von höchstens n homogenen ganzen Functionen vom gleichen Grade der $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n$ darstellen, deren Coefficienten den Parameter t nur linear enthalten. Diese n Functionen bestimmen, gleich Null gesetzt, ein System von Punkten $\eta_1(t), \eta_2(t), \cdots \eta_{n-1}(t)$, welches zufolge der Irreductibilität des Theilers P so beschaffen ist, dass kein Theil dieses Punktesystems durch ein System von algebraischen Gleichungen definirt werden kann

Wenden wir auf die $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n$ eine Substitution der Gruppe $\overline{\Theta}$ an, so verwandelt sich der irreductible Theiler P des Modulsystems M in einen offenbar ebenfalls irreductiblen Theiler P' desselben Modulsystems, und die Elemente von P' verschwinden ebenfalls identisch, wenn die $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n$ durch die gleichbezeichneten Lösungen von (12) ersetzt werden. Daraus folgt, dass P' mit P aequivalent sein muss; es können also die Elemente von P' nur lineare homogene Combinationen mit constanten Coefficienten von den Elementen von P sein.

Wir haben somit n homogene ganze Functionen vom gleichen Grade der $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n$, die den Parameter t linear enthalten und die in lineare homogene Combinationen ihrer selbst übergehen, wenn die $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n$ eine Substitution der Gruppe $\overline{\Theta}$ erfahren. Wir können alsdann den Theiler P auch so darstellen, dass nur in einer der homogenen Functionen der Parameter t wirklich auftritt, und erhalten also schliesslich ein Gleichungssystem von der Form

$$\begin{gathered} f_1(\mathfrak{y}_1, \cdots \mathfrak{y}_n) + t f_2(\mathfrak{y}_1, \cdots \mathfrak{y}_n) = 0, \\ f_3(\mathfrak{y}_1, \cdots \mathfrak{y}_n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_{n+1}(\mathfrak{y}_1, \cdots \mathfrak{y}_n) = 0, \end{gathered}$$

welches so beschaffen ist, dass sich die $(n + 1)$ ganzen homogenen Functionen $f_1, f_2, \cdots f_{n+1}$ bei jeder Substitution der Gruppe $\overline{\Theta}$ in lineare homogene Combinationen ihrer selbst verwandeln, und welches, nach den $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ aufgelöst, genau die Integralquotienten der Differentialgleichung (12) als Functionen von t und nur diese ergiebt.

Da die Anzahl der Substitutionen von $\overline{\Theta}$ eine endliche ist, so kann man von den homogenen Functionen $f_1, f_2, \cdots f_{n-1}$ leicht zu solchen übergehen, die sich bei Anwendung der Substitutionen von $\overline{\Theta}$ entweder gar nicht verändern oder nur mit constanten Factoren multipliciren; wir nennen dieselben die zur Gruppe $\overline{\Theta}$ gehörigen invarianten Formen. Durch Quotientenbildung ergeben sich aus diesen invarianten Formen rationale Functionen der $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$, die bei den Transformationen der projectiven Gruppe ϑ formal ungeändert bleiben, wir nennen diese invariante Functionen. Eine dieser rationalen Functionen erhält, wenn man darin die $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ durch die gleichbezeichneten Integralquotienten der Differentialgleichung (12) ersetzt, den Werth t, die übrigen verschwinden als Functionen von t identisch.

Wenn die Differentialgleichung (A) nicht algebraisch integrirbar ist, so hat es seine Schwierigkeit, von der die unabhängige Variable t der Differentialgleichung (12) darstellenden eindeutigen Function der Integralquotienten $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$, die sich bei den Substitutionen der projectiven Gruppe ϑ nicht verändert, zu einer eindeutigen Function der als willkürliche Variable gedachten $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ überzugehen, die bei den Substitutionen von ϑ (formal) ungeändert bleibt. Diese Schwierigkeit fällt weg, wenn die Differentialgleichung (A) von der zweiten Ordnung ist, und dieser Fall ist auch der einzige, in welchem bisher concrete Ergebnisse in der hier angedeuteten Richtung erzielt worden sind. Wir wollen uns daher im Folgenden zunächst mit den Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschäftigen und dann nur an dem Beispiele der hyperelliptischen Functionen die Schwierigkeiten hervorzuheben suchen, die sich der Behandlung von Differentialgleichungen höherer Ordnung entgegenstellen.

196. Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Umkehrungsfunction des Integralquotienten. Nothwendige Bedingungen für die Eindeutigkeit der Umkehrungsfunction.

Der Ausgangspunkt, den wir für die Formulirung der Frage nach Differentialgleichungen von der in der letzten Nummer betrachteten Art gewählt hatten, lässt sich für den Fall $n = 2$ nicht mehr festhalten, denn die Elemente eines Fundamentalsystems einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung können keine ganze homogene Gleichung mit constanten Coefficienten befriedigen. Auch der Begriff der Integralcurve verliert für $n = 2$ im Wesentlichen seine Bedeutung (vergl. Nr. 180, S. 183), wir formuliren daher die Frage direct dahin:

Giebt es homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$(A_2) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + p_1 \frac{dy}{dx} + p_2 y = 0$$

der Fuchs'schen Classe, für welche die Anzahl der Werthe der unabhängigen Variablen, in denen auf geeigneten Wegen fortgesetzt der Quotient η der Elemente y_1, y_2 eines Fundamentalsystems denselben Werth annimmt wie für x, eine endliche ist, und für welche die Gesammtheit dieser Werthe einer algebraischen Gleichung mit in x rationalen Coefficienten Genüge leistet?

Die Ergebnisse der Nr. 194 (S. 244 ff.) lehren uns, dass, wenn die Differentialgleichung (A_2) die geforderte Eigenschaft besitzt, stets eine Transformation

$$y = \lambda \mathfrak{y}, \quad t = \varphi(x)$$

angegeben werden kann, in welcher $\varphi(x)$ eine rationale Function und (vergl. Gleichung (14), Nr. 194, S. 246)

$$\lambda = e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx} \left(\frac{dt}{dx}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

ist, und durch die unsere Differentialgleichung (A_2) in eine Differentialgleichung

$$(\mathfrak{A}_2) \qquad \frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2} = p(t)\mathfrak{y}$$

übergeht, in welcher t eine eindeutige Function des Quotienten η zweier Fundamentalintegrale

$$\mathfrak{y}_1 = y_1 \frac{1}{\lambda}, \quad \mathfrak{y}_2 = y_2 \frac{1}{\lambda}$$

ist. Wir können jetzt η direct als eine unabhängige Variable auffassen, indem der Werthevorrath der Function $\eta(t)$ von t ein Continuum von derselben Dimension bildet, wie das der unbeschränkt veränderlichen Grösse η, wir können aber im Allgemeinen nicht η als unbeschränkt veränderlich betrachten, sondern müssen, wenn wir t als Function von η studiren, die Variabilität von η eben auf jenes Continuum einschränken, welches durch den Werthevorrath der Function $\eta(t)$ von t bestimmt wird.

Im Sinne der für die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung bisher festgehaltenen Vorstellungsweise, vermöge deren die Integrale $y_1, y_2, \cdots y_n$ als homogene Punktcoordinaten einer complexen $(n-1)$-fachen ebenen Mannigfaltigkeit gedeutet wurden, müssten wir das Gebiet von η als das einer geraden Linie ansehen. Aber ebenso wie es in der Theorie der algebraischen Functionen einer complexen Variabeln für tiefergehende Untersuchungen zweckmässiger ist, eine algebraische Gleichung

zwischen zwei complexen Veränderlichen nicht als eine ebene Curve zu deuten, sondern beide Variable als complexe Grössen durch reelle Punkte einer Ebene darzustellen, so wird es auch in unserem Falle vorzuziehen sein, den Bereich von η als die Ebene einer complexen Variabeln, beziehungsweise als einen Theil dieser Ebene aufzufassen, je nachdem der Werthevorrath der Function $\eta(t)$ von t alle complexen Werthe oder nur ein beschränktes Continuum derselben erfüllt.

Denken wir uns nun jene eindeutige Function von η, welche die unabhängige Variable t darstellt,

$$t = \varphi(\eta),$$

so erscheint dieselbe als **Umkehrung** der Function $\eta(t)$. Die Gesammtheit der Werthe des Integralquotienten η, die zu einem Werthe der unabhängigen Variabeln gehören, geht aus einem dieser η-Werthe hervor, indem man auf η die Substitutionen der projectiven Gruppe ϑ anwendet, die mit der Monodromiegruppe $\overline{\Theta}$ der Differentialgleichung $(\mathfrak{A}_2)$ isomorph ist, und zwar wissen wir, dass der identischen Substitution von ϑ nur die Substitutionen

$$\bar{\mathfrak{y}}_\varkappa = \pm \mathfrak{y}_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2)$$

der Gruppe $\overline{\Theta}$ entsprechen können (Nr 180, S. 179).

Die eindeutige Function $\varphi(\eta)$ hat also die Eigenschaft, dass sie denselben Werth annimmt, wenn auf η eine Substitution der projectiven Gruppe ϑ angewandt wird, und dass auch umgekehrt, wenn

$$\varphi(\bar{\eta}) = \varphi(\eta)$$

ist, der Werth $\bar{\eta}$ aus η nothwendig durch eine Operation der Gruppe ϑ hervorgehen muss Wir wollen zunächst einige nothwendige Bedingungen dafür aufzustellen suchen, dass die Differentialgleichung $(\mathfrak{A}_2)$ die Eigenschaft habe, dass ihr Integralquotient $\eta(t)$ zu einer eindeutigen Umkehrungsfunction Veranlassung giebt.

Sei $t = t_0$ eine reguläre Stelle der Differentialgleichung $(\mathfrak{A}_2)$, dann ist in der Umgebung dieser Stelle das Fundamentalsystem $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2$ in der Form

$$\mathfrak{y}_1 = \varepsilon_0 + \varepsilon_1(t - t_0) + \varepsilon_2(t - t_0)^2 + \cdots,$$
$$\mathfrak{y}_2 = \delta_0 + \delta_1(t - t_0) + \delta_2(t - t_0)^2 + \cdots$$

darstellbar, und es können, da die Determinante

$$D(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2) = \mathfrak{y}_1 \frac{d\mathfrak{y}_2}{dt} - \mathfrak{y}_2 \frac{d\mathfrak{y}_1}{dt}$$

eine von Null verschiedene Constante ist, von den vier Grössenpaaren

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1; \quad \delta_0, \delta_1; \quad \varepsilon_0, \delta_0; \quad \varepsilon_1, \delta_1$$

nicht beide Grössen eines Paares gleichzeitig verschwinden. Es ist folglich allemal eine lineare Function von η

$$\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}, \quad \alpha\delta-\beta\gamma \neq 0,$$

in der Form

$$\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta} = \gamma_1(t-t_0)+\gamma_2(t-t_0)^2+\cdots$$

darstellbar, wo γ_1 von Null verschieden ist, und aus dieser Gleichung ergiebt sich, dass

$$t = t_0 + \beta_1\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta} + \beta_2\left(\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}\right)^2+\cdots$$

sein muss. Also ist t in einer gewissen Umgebung der durch die Gleichung

$$\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta} = 0$$

bestimmten Stelle η eindeutig.

Sei ferner $t=a$ eine singuläre Stelle von $(\mathfrak{A}_2)$, und seien r_1, r_2 die der Grösse ihrer realen Theile nach geordneten Wurzeln der zu a gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung. Möge ferner

$$(1) \qquad \begin{cases} z_1 = (t-a)^{r_1}\,\mathfrak{P}_1(t\,|\,a), \\ z_2 = (t-a)^{r_2}\,\mathfrak{P}_2(t\,|\,a) + Az_1\log(t-a), \end{cases}$$

wo $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ nach positiven ganzen Potenzen von $t-a$ fortschreitende Reihen, A eine Constante bedeutet, das zu $t=a$ gehörige canonische Fundamentalsystem (Nr 54, Bd. I, S. 193) darstellen, welches mit $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$ durch die Beziehungen

$$(2) \qquad \left.\begin{cases} z_1 = \alpha\mathfrak{y}_1 + \beta\mathfrak{y}_2 \\ z_2 = \gamma\mathfrak{y}_1 + \delta\mathfrak{y}_2 \end{cases}\right\}, \quad \alpha\delta-\beta\gamma \neq 0,$$

verknüpft ist. Da in der Differentialgleichung $(\mathfrak{A}_2)$ der Coefficient der ersten Ableitung gleich Null ist, muss

$$r_1 + r_2 = 1$$

sein, und daraus folgt zunächst, dass die Differentialgleichung $(\mathfrak{A}_2)$ keinen ausserwesentlich singulären Punkt besitzen kann

Wenn die Differenz $r_1 - r_2$, deren realer Theil zufolge der Voraussetzung nicht negativ ist, keine ganze Zahl ist, so ist die Constante A in dem Ausdrucke für z_2 gleich Null, und beide Potenzreihen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ haben im Punkte $t=a$ einen nicht verschwindenden Werth Wir haben folglich

$$\zeta = \frac{z_1}{z_2} = (t-a)^{r_1-r_2}(\delta_0+\delta_1(t-a)+\delta_2(t-a)^2+\cdots),$$

wo δ_0 von Null verschieden ist, und

$$\zeta^{\frac{1}{r_1-r_2}} = (t-a)(\varepsilon_0 + \varepsilon_1(t-a) + \cdots),$$

woselbst

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1(t-a) + \cdots = \{\delta_0 + \delta_1(t-a) + \cdots\}^{\frac{1}{r_1-r_2}}$$

gesetzt wurde. Hieraus ergiebt sich durch Umkehrung

$$t - a = \beta_1 \zeta^{\frac{1}{r_1-r_2}} + \beta_2 \zeta^{\frac{2}{r_1-r_2}} \cdots; \quad \beta_1 = \frac{1}{\varepsilon_0}$$

Da zufolge der Gleichungen (2)

$$(3) \qquad \zeta = \frac{\alpha + \beta\eta}{\gamma + \delta\eta}$$

ist, so verhält sich t in der Umgebung der durch die Gleichung

$$\frac{\alpha + \beta\eta}{\gamma + \delta\eta} = 0$$

bestimmten Stelle von η dann und nur dann eindeutig, wenn

$$\frac{1}{r_1 - r_2} = g$$

eine positive ganze Zahl ist. D h wenn t eine eindeutige Function von η sein soll, so muss für einen singulären Punkt a, wo die Differenz $r_1 - r_2$ nicht ganzzahlig ist, der reciproke Werth dieser Differenz eine ganze Zahl sein

Wenn $r_1 - r_2$ eine ganze Zahl

$$r_1 - r_2 = m$$

ist, so kann A von Null verschieden sein

Sei zunächst $m = 0$, also

$$r_1 = r_2 = \frac{1}{2},$$

dann ist das Auftreten von Logarithmen unvermeidlich (Nr. 50, Bd. I, S 174) und da s_1 zum Exponenten r_1 gehören soll, ist

$$\mathfrak{P}_1(a \mid a) \neq 0, \quad A \neq 0.$$

Wir erhalten somit die Entwickelung

$$\frac{1}{A\zeta} = \delta_0 + \delta_1(t-a) + \delta_2(t-a)^2 + \cdots + \log(t-a),$$

also, wenn wir von den Logarithmen zu den Numeris übergehen,

$$e^{\frac{1}{A\zeta}} = (t-a)\{\varepsilon_0 + \varepsilon_1(t-a) + \varepsilon_2(t-a)^2 + \cdots\}, \quad \varepsilon_0 \neq 0,$$

woraus sich

$$t - a = \mathfrak{P}\left(e^{\frac{1}{A\zeta}}\right)$$

ergiebt, wo $\mathfrak{P}$ eine gewöhnliche Potenzreihe andeutet. Nun ist aber, wenn β von Null verschieden ist,

$$(4)\qquad \frac{1}{A\zeta} = \frac{1}{A}\frac{\gamma+\delta\eta}{\alpha+\beta\eta} = -\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{A\beta^2}\left\{\frac{1}{\eta+\frac{\alpha}{\beta}} - \frac{\beta\delta}{\alpha\delta-\beta\gamma}\right\},$$

wir erhalten also

$$(5)\qquad t-a = \mathfrak{P}\left[e^{-\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{A\beta}\frac{1}{\alpha+\beta\eta}}\right],$$

und für $\beta = 0$

$$(5\text{a})\qquad t-a = \mathfrak{P}\left(e^{\frac{1}{A\alpha}(\gamma+\delta\eta)}\right),$$

d. h. t als Function von η in eindeutiger Form dargestellt.

Wenn $m > 0$ ist, so könnte A verschwinden; in diesem Falle wäre der Punkt $t = a$ ein scheinbar singulärer Punkt (Nr. 55, Bd I, S. 196) und wir erhielten

$$\zeta = (t-a)^m(\delta_0 + \delta_1(t-a) + \cdots), \quad \delta_0 \neq 0.$$

Hieraus kann sich für t dann und nur dann eine eindeutige Entwickelung nach Potenzen von ζ ergeben, wenn $m = 1$ ist; dann wäre aber der Punkt a eine reguläre Stelle der Differentialgleichung. Soll also t eine eindeutige Function von η sein, so darf die Differentialgleichung $(\mathfrak{A}_2)$ keine scheinbar singuläre Stelle besitzen

Wenn für $m > 0$ A von Null verschieden ist, so muss, da z_2 zum Exponenten r_2 gehören soll, nothwendig

$$\mathfrak{P}_2(a\,|\,a) \neq 0$$

sein; es ist also

$$\frac{1}{\zeta} = (t-a)^{-m}(\delta_0 + \delta_1(t-a) + \cdots) + A\log(t-a), \quad \delta_0 \neq 0,$$

und hieraus kann sich offenbar niemals eine eindeutige Entwickelung von t als Function von ζ beziehungsweise η ergeben.

197 Neue Auffassung der scheinbar singulären Stellen. Das Fuchs'sche Beispiel.

Um das in der vorigen Nummer gewonnene Ergebniss in eleganter Form aussprechen zu können, wollen wir eine besondere Auffassung der scheinbaren singulären Stellen Platz greifen lassen.

Wenn $t = a$ eine Stelle ist, in deren Umgebung die Entwickelungen des canonischen Fundamentalsystems keine Logarithmen enthalten, so ist dieselbe eine reguläre Stelle, wenn

$$r_1 - r_2 = 1$$

ist, sie ist eine scheinbar singuläre Stelle, wenn

$$r_1 - r_2 = m > 1$$

ist Wir sagen im letzteren Falle, $t = a$ sei eine $(m-1)$-fache scheinbar singuläre Stelle, oder in $t = a$ seien $(m-1)$ einfache scheinbar singuläre Stellen vereinigt. Allgemein, wenn a eine nicht scheinbar singuläre Stelle und

$$r_1 - r_2 = \lambda + m - 1$$

ist, wo λ eine Zahl bedeutet, deren realer Theil nicht negativ, aber kleiner wie Eins ist, so sagen wir, in $x = a$ sei eine einfache singuläre Stelle mit $m-1$ scheinbar singulären Stellen vereinigt.

Wenn $t = a$ den unendlich fernen Punkt bedeutet, so bleiben alle vorhin durchgeführten Betrachtungen bestehen, wenn man nur $\frac{1}{t}$ an die Stelle von $t - a$ setzt, wir können also sagen:

Damit sich aus der Differentialgleichung $(\mathfrak{A}_2)$ die unabhängige Variable t als eindeutige Function des Integralquotienten η ergeben soll, ist nothwendig, dass $(\mathfrak{A}_2)$ keine scheinbar singulären Punkte besitzt, und dass die Differenzen der Wurzeln der zu nicht logarithmischen singulären Stellen gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen reciproke ganze Zahlen sind.

Diese nothwendigen Bedingungen sind aber im Allgemeinen nicht hinreichend, wie wir an einem sehr lehrreichen von Herrn Fuchs gegebenen Beispiele zeigen wollen

Sei die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{2}\,\frac{d\log R}{dt}\,\frac{dy}{dt} + \frac{\lambda^2}{R}\,y = 0, \tag{6}$$

woselbst λ eine Constante bedeutet und

$$R = (t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)(t-a_4)$$

zu nehmen ist, vorgelegt; dieselbe verwandelt sich durch die Transformation

$$y = e^{-\frac{1}{4}\int d\log R}\,\mathfrak{y}$$

in

$$\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt} = \left(\frac{1}{4}\,\frac{R''}{R} - \frac{3}{16}\,\frac{R'^2}{R^2} - \frac{\lambda^2}{R}\right)\mathfrak{y}, \tag{7}$$

und diese Differentialgleichung besitzt, wie man sofort verificirt, die Lösungen

$$\mathfrak{y}_1 = R^{-\frac{1}{4}} e^{i\lambda \int_\alpha^t \frac{dt}{\sqrt{R}}}, \quad \mathfrak{y}_2 = R^{-\frac{1}{4}} e^{-i\lambda \int_\alpha^t \frac{dt}{\sqrt{R}}}, \quad (i = \sqrt{-1}),$$

deren Quotienten

$$\frac{\mathfrak{y}_2}{\mathfrak{y}_1} = \eta = e^{-2\lambda i \int_\alpha^t \frac{dt}{\sqrt{R}}}$$

wir zu untersuchen haben; α bedeutet eine Integrationsconstante.

Zunächst erkennen wir, dass die für die eindeutige Umkehrbarkeit gefundenen nothwendigen Bedingungen erfüllt sind. Die Wurzeln der zu $t = a_\varkappa$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen sind nämlich

$$r_1 = \frac{3}{4}, \quad r_2 = \frac{1}{4}, \quad (\varkappa = 1, 2, 3, 4),$$

die Wurzeln der zu $t = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung

$$r_1 = 0, \quad r_2 = -1;$$

Logarithmen treten in der Umgebung von $t = \infty$ nicht auf.

Bezeichnen wir mit $\varphi(u)$ die durch Umkehrung des elliptischen Integrales erster Gattung

$$u = \int_\alpha^t \frac{dt}{\sqrt{R}}$$

entstehende eindeutige doppeltperiodische Function von u, mit ω_1, ω_2 ein System von Fundamentalperioden derselben, so ist t als Function des Integralquotienten η in der Form

$$(8) \qquad t = \varphi\left(-\frac{1}{2\lambda i} \log \eta\right)$$

darstellbar Diese Function ist aber im Allgemeinen nicht eindeutig, sondern hat die Stellen $\eta = 0$ und $\eta = \infty$ zu Verzweigungspunkten Damit t eine eindeutige Function von η sein soll, muss

$$(9) \qquad \frac{2\pi i}{2\lambda i} = \varkappa_1 \omega_1 + \varkappa_2 \omega_2 = \omega$$

sein, wo $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ ganze Zahlen bedeuten, d h. es muss

$$\lambda = \frac{\pi}{\omega}$$

sein. Während die allgemein als nothwendig erkannten Bedingungen sich in algebraische Gleichungen oder Ungleichungen zwischen den in den Coefficienten der Differentialgleichung auftretenden Parametern umsetzen lassen, ist die Bedingung (9) nicht durch eine algebraische,

sondern durch eine transcendente Gleichung zwischen λ und den a_1, a_2, a_3, a_4 dargestellt, da ja bekanntlich die Perioden ω_1, ω_2 transcendente Functionen von den a_1, a_2, a_3, a_4 sind. Wir werden darum im Folgenden die gefundenen nothwendigen Bedingungen kurz als die algebraischen, die im allgemeinen Falle uns noch unbekannten übrigen als die transcendenten Bedingungen für die eindeutige Umkehrbarkeit des Integralquotienten bezeichnen.

Machen wir uns an dem Beispiele klar, woran es liegt, dass die algebraischen Bedingungen allein nicht hinreichend sind.

Wir hatten bemerkt, dass die Punkte $\eta = 0$, $\eta = \infty$ Verzweigungspunkte der Function t von η sein könnten, es wird sich also darum handeln, die Bedeutung dieser Punkte zu ergründen.

Da das Integral erster Gattung

$$\int_{\alpha}^{t} \frac{dt}{\sqrt{R}}$$

bei freier Beweglichkeit von t in seiner Ebene zwar alle endlichen complexen Werthe annehmen, aber niemals unendlich gross werden kann, so wird die Function η von t, wenn t alle möglichen Wege in seiner Ebene beschreibt, alle complexen Werthe erreichen können mit Ausnahme der Werthe Null und Unendlich. Wenn wir also die Gesammtheit der η-Werthe darstellen wollen, so werden wir aus der Ebene der complexen Variabeln η die Stellen

$$\eta = 0, \quad \eta = \infty$$

ausschliessen müssen; dadurch verwandelt sich diese Ebene in eine Fläche mit zwei Grenzpunkten F, die erst durch einen diese Grenzpunkte mit einander verbindenden Querschnitt l in eine einfach zusammenhängende Fläche $\overline{F}$ übergeht.

Innerhalb dieser Fläche $\overline{F}$ ist unsere Function t von η eindeutig; denn da die algebraischen Bedingungen erfüllt sind, ist t in der Umgebung jeder Stelle von $\overline{F}$ eindeutig, d. h. t bleibt ungeändert, wenn η einen unendlich kleinen geschlossenen Weg beschreibt, der irgend eine Stelle von $\overline{F}$ umgiebt Nun lässt sich aber jeder in einer einfach zusammenhängenden Fläche beschriebene geschlossene Weg durch stetige Deformation innerhalb dieser Fläche auf einen Punkt zusammenziehen, so dass also für eine einfach zusammenhängende Fläche aus der Eindeutigkeit einer Function in der Umgebung jeder Stelle ohne Weiteres die Eindeutigkeit in der ganzen Fläche folgt

Dies gilt nicht für eine mehrfach zusammenhängende Fläche. Soll vielmehr t innerhalb F eindeutig sein, so müssen wir dafür Sorge

tragen, dass diese Function keine Werthänderung erfährt, wenn die Variable η den Querschnitt l, der F in eine einfach zusammenhängende Fläche $\overline{F}$ verwandelt, überschreitet. Dies wird dadurch erreicht, dass wir λ gemäss der Gleichung (9) bestimmen

Beiläufig gewinnen wir den folgenden allgemeinen Satz:

Die für die eindeutige Umkehrbarkeit des Integralquotienten η einer Differentialgleichung zweiter Ordnung der Fuchs'schen Classe aufgestellten nothwendigen algebraischen Bedingungen sind dann und nur dann hinreichend, wenn das Gebiet der η-Werthe, die durch analytische Fortsetzung des Integralquotienten erreicht werden können, ein einfach zusammenhängendes ist

Ist jenes Gebiet ein mehrfach zusammenhängendes, so müssen zu den algebraischen Bedingungen noch andere hinzutreten, welche bewirken, dass die unabhängige Variable der Differentialgleichung auch dann keine Werthänderung erleidet, wenn η einen der Querschnitte überschreitet, durch welche jenes mehrfach zusammenhängende Gebiet in ein einfach zusammenhängendes verwandelt wird.

198 Bedeutung der Unbestimmtheitsstellen der Umkehrungsfunction bei der Aufstellung der hinreichenden Bedingungen für die Eindeutigkeit.

In unserem Beispiele sind die Stellen $\eta = 0$, $\eta = \infty$ Unbestimmtheitsstellen der Function t von η; sehen wir zu, auf welche Weise diese Unbestimmtheitsstellen entstehen

Denken wir uns die t-Ebene nach Ausschluss der singulären Punkte a_1, a_2, a_3, a_4 unserer Differentialgleichung (7) durch vier von diesen Punkten ausgehende nach dem Unendlichen hin gelegte Querschnitte l_1, l_2, l_3, l_4 in eine einfach zusammenhängende Fläche $\overline{T}$ verwandelt und betrachten einen innerhalb dieser Fläche eindeutig definirten Zweig

$$\eta = e^{-2\lambda i u}$$

des Integralquotienten, wo also das Integral

$$u = \int_a^t \frac{dt}{\sqrt{R}}$$

innerhalb $\overline{T}$ erstreckt zu denken ist Wir suchen die Substitutionen der projectiven Gruppe ϑ zu bestimmen, die der Monodromiegruppe $\overline{\Theta}$ von $(\mathfrak{A}_2)$ isomorph ist.

Bezeichnen wir das Integral

$$\int \frac{dt}{\sqrt{R}}$$

erstreckt längs einer vom Punkte α ausgehenden, den Punkt $a_\varkappa$ umschliessenden Schleife (vergl. Nr. 114, Bd. I, S. 410), die den Querschnitt l_ν im positiven Sinne überschreitet, durch $\alpha_\varkappa$ für $\varkappa = 1, 2, 3, 4$, so verwandelt sich u, wenn t einen Weg beschreibt, der den Querschnitt $l_\varkappa$ im positiven Sinne durchkreuzt, in

$$\alpha_\varkappa - u,$$

und demnach η in

$$(10) \qquad A_\varkappa \eta = \frac{c_\varkappa}{\eta} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4),$$

wo

$$c_\varkappa = e^{-2\lambda i \alpha_\varkappa}$$

gesetzt wurde. Die Substitutionen (10) stellen eine Basis der projectiven Gruppe ϑ dar, indem nämlich zwischen denselben, da $t = \infty$ kein Verzweigungspunkt der Function η ist, die Beziehung

$$A_1 A_2 A_3 A_4 = 1$$

besteht, woraus sich

$$c_1 c_2^{-1} c_3 c_4^{-1} = 1$$

ergiebt. Man kann dann z. B.

$$\omega_1 = \alpha_1 - \alpha_2, \quad \omega_2 = \alpha_1 - \alpha_3$$

als ein System von Fundamentalperioden der elliptischen Function

$$t = \varphi(u)$$

ansehen, und wenn man

$$\gamma_1 = c_1 c_2^{-1} = e^{-2\lambda i \omega_1},$$
$$\gamma_2 = c_1 c_3^{-1} = e^{-2\lambda i \omega_2}$$

setzt, so sind die Substitutionen von ϑ in einer der beiden Formen

$$S\eta = \gamma_1^{g_1} \gamma_2^{g_2} \eta,$$
$$T\eta = \gamma_1^{g_1} \gamma_2^{g_2} c_1 \frac{1}{\eta}$$

darstellbar, wo g_1, g_2 irgendwelche ganze Zahlen bedeuten.

Wenn $t = a_\varkappa$ ist, erhält η den Werth

$$e^{-2\lambda i \int_\alpha^{a_\varkappa} \frac{dt}{\sqrt{R}}},$$

d. h. da, wie leicht zu erkennen ist,

$$\alpha_\varkappa = 2\int_a^{a_\varkappa} \frac{dt}{\sqrt{R}}$$

gefunden wird, den Werth

$$e^{-\lambda i \alpha_\varkappa} = \sqrt{c_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4)$$

Die Gesammtheit der Werthe des Integralquotienten, die den Werthen $t = a_1, a_2, a_3, a_4$ entsprechen, ist demnach in der Formel

$$\sqrt{\gamma_1^{g_1}\gamma_2^{g_2}c_1}$$

enthalten; in der Umgebung derselben ist zufolge der erfüllten algebraischen Bedingungen t eindeutig. Wir sehen sofort, dass diese Werthe durch die Wurzeln der Gleichungen

(11) $$\eta = T\eta$$

dargestellt werden. Auf der anderen Seite erkennen wir die beiden Stellen

$$\eta = 0, \quad \eta = \infty$$

als die Wurzeln der Gleichungen

(12) $$\eta = S\eta.$$

Die beiden Typen von Substitutionen der Gruppe ϑ, die durch die beiden Formen S und T charakterisirt werden, zeigen also einen wesentlichen Unterschied, wir können denselben durch die folgende Ueberlegung noch klarer hervortreten lassen.

Bilden wir für eine der Substitutionen T die Substitution T^2, so ist offenbar

$$T^2 = 1,$$

dagegen sind für eine der Substitutionen S die successiven Potenzen

$$S^\nu \qquad (\nu = -\infty, \quad +\infty)$$

im Allgemeinen sämmtlich von einander verschieden. Sei

$$-2\lambda i(g_1\omega_1 + g_2\omega_2) = \mu_1 + \mu_2 i,$$

wo μ_1, μ_2 reale Grössen bedeuten, dann sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem nämlich

$$1)\quad \mu_1 = 0,$$
$$2)\quad \mu_1 > 0,$$
$$3)\quad \mu_1 < 0$$

ist Im Falle 1) ist

$$\left|\gamma_1^{g_1}\gamma_2^{g_2}\right| = 1,$$

und wenn η irgend einen complexen Werth bedeutet, so nähert sich

$$S^\nu \eta = e^{\nu \mu_2 i} \eta$$

für $\nu = \pm \infty$ keiner bestimmten Grenze. Dagegen ist im Falle 2)

$$\lim_{\nu=+\infty} S^\nu \eta = \infty, \quad \lim_{\nu=+\infty} S^{-\nu} \eta = 0,$$

und im Falle 3)

$$\lim_{\nu=+\infty} S^\nu \eta = 0, \quad \lim_{\nu=+\infty} S^{-\nu} \eta = \infty,$$

für jeden endlichen Werth von η. Wir sehen hiernach, dass es in jeder noch so kleinen Umgebung der Stellen $\eta = 0$ und $\eta = \infty$ stets Werthe giebt, die aus jedem beliebigen endlichen Werthe von η durch Substitutionen der Gruppe ϑ hervorgehen, d. h. die Function t von η nimmt in jeder Nähe der Stellen $\eta = 0$, $\eta = \infty$ jeden beliebigen Werth beliebig oft an.

Diese Eigenschaft charakterisirt die Stellen $\eta = 0$, $\eta = \infty$ als Unbestimmtheitsstellen der Function t von η

Wenn λ der Gleichung (9) gemäss gewählt und durch ω' eine Periode von $\varphi(u)$ bezeichnet wird, die mit

$$\omega = \frac{\pi}{\lambda}$$

zusammen ein System von Fundamentalperioden constituirt, so lässt sich der Ausdruck

$$-2\lambda i(g_1 \omega_1 + g_2 \omega_2)$$

in die Form setzen

$$-2\lambda i(g_1 \omega_1 + g_2 \omega_2) = 2h_1 \pi i + 2h_2 \pi i \frac{\omega'}{\omega},$$

wo h_1, h_2 ganze Zahlen bedeuten. Da, wie wir stillschweigend vorausgesetzt haben, die a_1, a_2, a_3, a_4 von einander verschieden sind, ist der Quotient irgend zweier Fundamentalperioden ω, ω' niemals real, es kann also niemals vorkommen, dass der reale Theil von

$$-2\lambda i(g_1 \omega_1 + g_2 \omega_2)$$

verschwindet; d. h wenn λ der Gleichung (9) gemäss bestimmt wird, ist das Eintreten des Falles 1) ausgeschlossen. Wir können aber auch direct zeigen, dass der Fall 1) nicht eintreten darf, wenn t eine eindeutige Function von η sein soll.

In der That sei also

$$S\eta = e^{\mu_2 i} \eta,$$

wo μ_2 eine reale Grösse bedeutet, dann liegen die sämmtlichen Werthe, die aus η durch successive Anwendung der Potenzen von S hervorgehen, auf dem mit dem Radius $|\eta|$ um den Punkt $\eta = 0$ als Mittelpunkt beschriebenen Kreise K. Nehmen wir zunächst an, μ_2 sei kein

rationales Vielfaches von π, was offenbar darauf hinauskommt, dass $\frac{\pi}{\lambda}$ kein aliquoter Theil einer Periode der Function $\varphi(u)$ ist.

Dann lässt sich bekanntlich stets ein System von ganzen Zahlen m_1, m_2 so wählen, dass der Ausdruck

$$m_1 \mu_2 + m_2 \pi$$

sich von irgend einer vorgeschriebenen realen Grösse φ beliebig wenig unterscheidet. Es giebt folglich in jeder Nähe jeder beliebigen Stelle

$$|\eta| e^{\varphi i}$$

der Kreisperipherie K Stellen, die aus η durch eine Potenz der Substitution S hervorgehen, d. h. wenn t einen Werth der unabhängigen Variabeln unserer Differentialgleichung bedeutet, für welchen der Werth η des Integralquotienten zum Vorscheine kommt, so giebt es in jeder Nähe einer jeden Stelle der Kreisperipherie K ebenfalls auf K gelegene Stellen, die diesem selben Werthe t der unabhängigen Variabeln zugehören

Aber noch mehr! Betrachten wir die Substitutionen T unserer Gruppe ϑ. Wenn $\frac{\pi}{\lambda}$ kein aliquoter Theil einer Periode der Function $\varphi(u)$ ist, so besteht zwischen den Grössen π, $\lambda \omega_1$, $\lambda \omega_2$ keine homogene lineare Beziehung mit ganzzahligen Coefficienten; es lässt sich folglich nach einem berühmten Satze von Jacobi ein System von drei ganzen Zahlen g_1, g_2, g_3 so finden, dass das Aggregat

$$-2\lambda i(g_1 \omega_1 + g_2 \omega_2) + 2 g_3 \pi i$$

sich von einer beliebig vorgeschriebenen complexen Grösse dem absoluten Betrage nach beliebig wenig unterscheidet. Es liegen folglich in jeder Nähe einer jeden beliebigen Stelle der η-Ebene Stellen, die aus dem Werthe η durch Anwendung einer der Substitutionen T hervorgehen, d. h. bedeutet t irgend einen Werth der unabhängigen Variabeln der Differentialgleichung (A_2), so befinden sich in jeder noch so kleinen Umgebung jedes Punktes der η-Ebene Stellen, die als Werthe des Integralquotienten zu jenem Werthe t gehören. Dass dies nicht möglich ist, wenn t eine eindeutige Function von η sein soll, werden wir sehr bald allgemein erörtern. Wir gehen vorher noch auf den Fall ein, wo $\frac{\pi}{\lambda}$ ein aliquoter Theil einer Periode von $\varphi(u)$ ist.

Sei also

(9a) $$\frac{\pi}{\lambda} = \frac{\varkappa_1 \omega_1 + \varkappa_2 \omega_2}{\varkappa}, \quad \varkappa > 1,$$

wo $\varkappa$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ ganze Zahlen bedeuten, dann ist t auch keine eindeutige

Function von η, sondern es gehören zu einem Werthe von η die $\varkappa$ verschiedenen Werthe

$$\varphi\left(-\frac{\log\eta}{2\lambda i}-\frac{h(\varkappa_1\omega_1+\varkappa_2\omega_2)}{\varkappa}\right)\qquad (h=0,1,\ \ \varkappa-1)$$

von t, welche, wie aus der Theorie der elliptischen Functionen bekannt ist, von einem derselben, etwa

$$\varphi\left(-\frac{\log\eta}{2\lambda i}\right),$$

algebraisch abhängen. In diesem Falle kann demnach die Differentialgleichung $(\mathfrak{A}_2)$ durch eine Transformation von der Form

$$\mathfrak{y}=\varrho\bar{\mathfrak{y}},\quad \bar{t}=\psi(t),$$

wo ψ eine rationale Function, ϱ die Wurzel aus einer rationalen Function von t bedeutet, in eine Differentialgleichung mit der unabhängigen Variabeln $\bar{t}$ übergeführt werden, in welcher $\bar{t}$ eine eindeutige Function des Integralquotienten η ist.

Drittes Kapitel.

199 Eigenschaften projectiver Substitutionen einer Variabeln. Canonische Form und Eintheilung derselben.

Wir gehen nun dazu über, die an dem Fuchs'schen Beispiele beobachteten Verhältnisse allgemein zu discutiren und beginnen mit einer etwas eingehenderen Untersuchung der projectiven Substitutionen einer Variabeln η, die ja bei unserer Frage wesentlich in Betracht kommen.

Sei eine solche projective Substitution

$$\zeta = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta} = S\eta$$

vorgelegt, wo wir in der Regel die Determinante

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

annehmen werden, so bemerken wir zuvörderst, dass durch dieselbe eine eindeutig conforme, d. h. in den kleinsten Theilen ähnliche, oder, wie man sich auch ausdrückt, winkeltreue Abbildung der Ebene der complexen Variabeln η auf die Ebene der complexen Variabeln ζ vermittelt wird, da ja $S\eta$ eine monogene Function von η darstellt

Bei dieser conformen Abbildung entspricht jeder Geraden und jedem Kreise der ζ-Ebene eine Gerade oder ein Kreis der η-Ebene und umgekehrt.

In der That, bezeichnen wir durch einen oberen Accent die conjugirte Grösse einer complexen Grösse a, so stellt die Gleichung

$$A\zeta\zeta' + B\zeta + B'\zeta' + C = 0, \tag{2}$$

wo A, C reale Grössen bedeuten, einen Kreis beziehungsweise, wenn $A = 0$, eine Gerade in der ζ-Ebene dar, und zwar den allgemeinsten Kreis bez. die allgemeinste Gerade. Setzen wir hierin

$$\zeta = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \quad \zeta' = \frac{\alpha'\eta' + \beta'}{\gamma'\eta' + \delta'},$$

so erhalten wir als entsprechende Gleichung in der η-Ebene

$$\tag{3} \begin{cases} \eta\eta'(A\alpha\alpha' + B\alpha\gamma' + B'\alpha'\gamma + C\gamma\gamma') \\ + \eta\ (A\alpha\beta' + B\alpha\delta' + B'\gamma\beta' + C\gamma\delta') \\ + \eta'(A\beta\alpha' + B'\delta\alpha' + B\gamma'\beta + C\gamma'\delta) \\ + \quad A\beta\beta' + B\beta\delta' + B'\beta'\delta + C\delta\delta' = 0, \end{cases}$$

und diese stellt wieder einen Kreis dar. Dass auch umgekehrt jedem Kreise der η-Ebene ein Kreis der ζ-Ebene entspricht, erhellt daraus, dass

$$\eta = \frac{\delta\zeta - \beta}{-\gamma\zeta + \alpha}$$

ist.

Wenn $A = 0$ ist, d. h. die Gleichung (2) eine gerade Linie darstellt, so geht der entsprechende Kreis (3) der η-Ebene durch den Punkt

$$\eta = -\frac{\delta}{\gamma},$$

der dem $\zeta = \infty$ entspricht, hindurch Diese Bemerkung leitet uns beiläufig darauf hin, dass zwischen der durch die projective Transformation (1) der complexen Grössen η, ζ bestimmten Abbildung und den sogenannten Cremona'schen Transformationen eine einfache Beziehung besteht.

Bekanntlich lässt sich eine Cremona'sche Transformation beliebiger Ordnung stets aus solchen Transformationen zweiter Ordnung zusammensetzen (Rosanes, Crelle's Journal, Bd. 73, S. 109). Die Cremona'sche Transformation zweiter Ordnung zweier Ebenen in einander ist dadurch charakterisirt, dass jeder Geraden der einen Ebene ein Kegelschnitt der anderen entspricht, der durch drei feste Punkte hindurchgeht, oder mit anderen Worten, den sämmtlichen Geraden der einen Ebene entsprechen die Kegelschnitte eines bestimmten Netzes der anderen.

Daraus folgt also zunächst, dass die zwischen der η- und ζ-Ebene statuirte Beziehung (1) eine Cremona'sche Transformation ist, denn den Geraden der einen Ebene entsprechen Kreise der anderen, die durch einen festen Punkt hindurchgehen, d. h. also Kegelschnitte, die durch diesen festen Punkt und die beiden imaginären Kreispunkte hindurchgehen. Setzt man

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 i, \quad \eta = \eta_1 + \eta_2 i,$$

so kann ein solches Kreisnetz der η-Ebene durch Anwendung einer realen Collineation

$$\frac{\alpha_2 + \beta_2\eta_1 + \gamma_2\eta_2}{\alpha_1 + \beta_1\eta_1 + \gamma_1\eta_2}, \quad \frac{\alpha_3 + \beta_3\eta_1 + \gamma_3\eta_2}{\alpha_1 + \beta_1\eta_1 + \gamma_1\eta_2}$$

in ein beliebiges Kegelschnittnetz transformirt werden, es setzt sich also jede Cremona'sche Transformation zweiter Ordnung aus einer projectiven Substitution zwischen den complexen Grössen

$$\zeta_1 + \zeta_2 i, \quad \eta_1 + \eta_2 i$$

und aus einer realen Collineation zusammen. Daraus folgt, dass auch

jede beliebige Cremona'sche Transformation aus projectiven Substitutionen zwischen den complexen Grössen $\zeta_1 + \zeta_2 i$, $\eta_1 + \eta_2 i$ und aus realen Collineationen zusammengesetzt werden kann

Wir werden in der Regel die durch eine Substitution von der Form (1) verknüpften complexen Grössen ζ, η nicht in zwei verschiedenen, sondern vielmehr in einer und derselben Ebene zu deuten haben; es wird dann jeder Punkt η in einen gewissen anderen Punkt ζ transformirt. Fragen wir insbesondere nach denjenigen Punkten der η-Ebene, die mit ihren transformirten identisch sind, so haben wir zur Bestimmung derselben die quadratische Gleichung

$$\gamma\eta^2 + (\delta - \alpha)\eta - \beta = 0,$$

deren Wurzeln wir als die Doppelpunkte der projectiven Substitution bezeichnen.

Dieselben ergeben sich in der Form

$$\left.\begin{matrix}\lambda\\ \mu\end{matrix}\right\} = \frac{\alpha - \delta}{2\gamma} \pm \sqrt{\frac{(\alpha + \delta)^2 - 4}{4\gamma^2}},$$

sie sind also von einander verschieden, wenn

$$(\alpha + \delta)^2 \neq 4$$

ist. In diesem Falle lässt sich die Substitution (1) in die Form setzen

$$\text{(I)} \qquad \frac{\zeta - \lambda}{\zeta - \mu} = K\frac{\eta - \lambda}{\eta - \mu},$$

wir nennen dies die canonische Form der Substitution (1), da dieselbe der canonischen Form der homogenen Substitution

$$\text{(1a)} \qquad \begin{aligned} z_1 &= \delta y_1 + \gamma y_2, \\ z_2 &= \beta y_1 + \alpha y_2 \end{aligned}$$

entspricht, wenn wir

$$\zeta = \frac{z_2}{z_1}, \quad \eta = \frac{y_2}{y_1}$$

setzen Die Constante K, die wir den Multiplicator der projectiven Substitution (1) nennen, bestimmt sich demgemäss als der Quotient der Wurzeln der zur homogenen Substitution (1a) gehörigen Fundamentalgleichung

$$\begin{vmatrix} \delta - \omega & \beta \\ \gamma & \alpha - \omega \end{vmatrix} = 0;$$

der Multiplicator ist demnach im Sinne der Nr 121 (Bd I, S 439, vergl. Nr 125, ebenda S 462) eine Invariante der Substitution (1), d. h er ändert sich nicht, wenn man von (1) zu einer ähnlichen projectiven Substitution übergeht.

Da sich aus (I) durch Differentiation

$$\frac{1}{(\zeta-\mu)^2}\,d\zeta = \frac{K}{(\eta-\mu)^2}\,d\eta$$

ergiebt, finden wir für K überdies die zwiefache Darstellung

(4) $$K = \left(\frac{d\zeta}{d\eta}\right)_{\eta=\lambda}, \quad \frac{1}{K} = \left(\frac{d\zeta}{d\eta}\right)_{\eta=\mu}.$$

Dieser Multiplicator K ist im Allgemeinen eine complexe Zahl, die wir in der Form

$$K = |K|\,e^{i\,\mathrm{Arg}\,K}$$

darstellen wollen. Wir scheiden dann nach dem Vorgange von Herrn Klein die projectiven Substitutionen mit getrennten Doppelpunkten in drei Unterarten, je nachdem

$$\begin{array}{ll} 1)\ |K| = 1, & \\ 2)\ |K| \neq 1, & \mathrm{Arg}\,K = 0, \\ 3)\ |K| \neq 1, & \mathrm{Arg}\,K \neq 0 \end{array}$$

ist

Im Falle 1) nennt man die Substitution (1) eine elliptische; ihre ν^{te} Potenz ist in der Form

$$\frac{\zeta_\nu-\lambda}{\zeta_\nu-\mu} = K^\nu\,\frac{\eta-\lambda}{\eta-\mu} \qquad (\nu=-\infty, \quad +\infty)$$

darstellbar, wenn man

$$\zeta_\nu = S^\nu \eta$$

setzt. Falls die reelle Grösse

$$\mathrm{Arg}\,K = \frac{g}{h}\,2\pi$$

ist, wo g, h ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler bedeuten, so ist

$$S^h\eta = \eta \quad \text{oder} \quad S^h = 1,$$

man sagt dann, die elliptische Substitution S sei eine periodische.

Im Falle 2) nennt man die Substitution S eine hyperbolische, im Falle 3) eine loxodromische In beiden Fällen ist

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{\zeta_\nu-\lambda}{\zeta_\nu-\mu} = \frac{\eta-\lambda}{\eta-\mu}\lim_{\nu=\infty} K^\nu,$$

d. h. wenn $|K| < 1$ ist, so haben wir

(5) $$\begin{cases} \lim\limits_{\nu=+\infty}\zeta_\nu = \lim\limits_{\nu=+\infty} S^\nu\eta = \lambda, \\ \lim\limits_{\nu=-\infty}\zeta_\nu = \lim\limits_{\nu=-\infty} S^\nu\eta = \mu, \end{cases}$$

dagegen, wenn $|K| > 1$ ist, umgekehrt

(6) $$\lim_{\nu=+\infty} S^\nu\eta = \mu; \quad \lim_{\nu=-\infty} S^\nu\eta = \lambda$$

Die Doppelpunkte λ, μ der Substitution S fallen zusammen, wenn

$$(\alpha + \delta)^2 = 4$$

ist; in diesem Falle nennt man ebenfalls nach Herrn Klein die Substitution eine parabolische. Es hat dann auch die zu der homogenen Substitution (1a) gehörige Fundamentalgleichung eine doppelte Wurzel und die canonische Form von (1) lautet demnach (vergl. Nr 77, Bd. I, S 126)

$$\text{(II)} \qquad \frac{1}{\xi - \lambda} = \frac{1}{\eta - \lambda} + L,$$

wo durch einfache Rechnung

$$\text{(7)} \qquad L = \frac{\alpha + \delta}{2}\gamma, \quad \lambda = \frac{\alpha - \delta}{2\gamma}, \quad \left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)_{\eta = \lambda} = 1$$

gefunden wird. Für

$$\xi_\nu = S^\nu \eta$$

ergiebt sich

$$\frac{1}{\xi_\nu - \lambda} = \frac{1}{\eta - \lambda} + \nu L,$$

woraus

$$\text{(8)} \qquad \lim_{\nu = \pm\infty} S^\nu \eta = \lambda$$

folgt. Stellen wir dieses Ergebniss mit dem durch die Gleichungen (5), (6) dargestellten zusammen, so haben wir den Satz:

Die aus einem beliebigen complexen Werthe η durch alle möglichen Potenzen einer nicht elliptischen Substitution erzeugte Punktmenge besitzt zwei durch die beiden Doppelpunkte der angewandten Substitution dargestellte Grenzstellen, die nur im Falle einer parabolischen Substitution mit einander coincidiren.

Betrachten wir dagegen für eine elliptische Substitution die aus einem Werthe $\eta = \eta^0$ erzeugte Punktmenge

$$\xi_\nu^0 = S^\nu \eta^0,$$

so liegen diese sämmtlichen Punkte auf dem durch die Gleichung

$$\text{(9)} \qquad \left|\frac{\eta - \lambda}{\eta - \mu}\right| = \left|\frac{\eta^0 - \lambda}{\eta^0 - \mu}\right|$$

dargestellten Kreise Wenn S eine periodische Substitution ist, so ist die Anzahl dieser Punkte eine endliche; wenn S nicht periodisch, d h. $\operatorname{Arg} K$ mit 2π nicht commensurabel ist, so lassen sich nach Vorschrift einer beliebig kleinen positiven Grösse ε zwei ganze Zahlen ν_1, $\varkappa_1$ stets so bestimmen, dass sich das Aggregat

$$2\nu_1 \operatorname{Arg} K + 2\varkappa_1 \pi$$

von einer willkürlich vorgeschriebenen realen Grösse dem absoluten Betrage nach um weniger unterscheidet wie ε Die Punktmenge

$$P = \left(\zeta_\nu^{\,0}\right) \qquad (\nu = -\infty, \quad +\infty)$$

ist also derart beschaffen, dass sich in jeder Nähe eines jeden Punktes der Kreislinie (9) Punkte dieser Menge befinden, d h. es ist jeder Punkt des Kreises (9) eine Grenzstelle dieser Punktmenge, oder anders ausgedrückt, die erste Ableitung P' der Punktmenge P (vergl. Nr. 133, S 8) erfüllt die Kreislinie (9) vollständig und lückenlos.

200 **Allgemeines über Punktmengen. Bahncurven elliptischer Substitutionen. Weierstrass' Auffassung eines analytischen Gebildes.**

Betrachtet man eine durch n unbeschränkt veränderliche reale Grössen $x_1, x_2, \cdots x_n$ bestimmte Mannigfaltigkeit von Punkten, so nennt man nach Herrn G. Cantor eine in dieser Mannigfaltigkeit enthaltene Punktmenge P eine perfecte, wenn dieselbe mit ihrer ersten Ableitung P' identisch ist. Man nennt ferner eine Punktmenge M eine zusammenhängende, wenn für je zwei Punkte

$$\left(x_1^{\,0}, x_2^{\,0}, \cdots x_n^{\,0}\right), \quad \left(x_1^{\,\nu}, x_2^{\,\nu}, \cdots x_n^{\,\nu}\right)$$

derselben, nach Vorschrift einer beliebig kleinen positiven Grösse ε, sich eine endliche Anzahl von Punkten

$$\left(x_1^{\,1}, x_2^{\,1}, \cdots x_n^{\,1}\right), \cdots \left(x_1^{\,\nu-1}, x_2^{\,\nu-1}, \cdots x_n^{\,\nu-1}\right)$$

der Menge M so angeben lässt, dass die Ungleichungen

$$\left|\sum_{\varkappa=1}^{n}\left(x_\varkappa^{\lambda+1} - x_\varkappa^{\lambda}\right)^2\right| < \varepsilon \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \quad n)$$

erfüllt sind. Herr Cantor definirt dann eine perfecte und zusammenhängende Punktmenge als ein Continuum. Diese Definition ist in gewissem Sinne enger, in anderem Sinne wieder wesentlich weiter als die von uns in der Nr. 133 (S. 9) benutzte; ein Continuum in dem daselbst von uns festgelegten Sinne bezeichnet Herr Cantor, wenn es kein abgeschlossenes ist, als ein Semicontinuum Die von uns benutzte Definition des Continuums wurde so gefasst, dass unter dieselbe nur ein ebenso vielfach ausgedehntes Gebiet fällt, wie dasjenige ist, aus welchem die betrachtete Punktmenge ausgesondert ist, indem ja gleichzeitig mit jedem Punkte auch jeder Punkt einer gewissen Umgebung dem Continuum zugehören musste; diese Definition ist für functionentheoretische Betrachtungen von der Art, wie wir sie hier anzustellen haben, aus dem Grunde bequem, weil dann das Existenz-

gebiet einer monogenen Function von gewissen Variabeln als ein Continuum schlechthin bezeichnet werden kann, was den gewöhnlichen Vorstellungen entspricht. Wir wollen darum eine perfecte und zusammenhängende Punktmenge ein continuirliches Gebilde nennen und insbesondere von continuirlichen Curven, Flächen u. s. w sprechen

Wenn eine Punktmenge P so beschaffen ist, dass ihre erste Ableitung P' ein continuirliches Gebilde vollständig und lückenlos erfüllt, so sagt man, die Punktmenge sei auf diesem continuirlichen Gebilde überall dicht.

Mit Benutzung dieser Terminologie können wir also den Satz aussprechen:

Die Punktmenge, welche aus einem complexen Werthe η durch Anwendung aller Potenzen einer nicht periodischen elliptischen Substitution hervorgeht, erfüllt eine gewisse durch diesen Werth η hindurchgehende Kreislinie überall dicht.

Man kann diesen Kreis durch eine einfache geometrische Betrachtung noch genauer charakterisiren.

Man sagt bekanntlich von zwei Punkten η und $\bar{\eta}$, die durch die Gleichung

$$\bar{\eta} = \frac{-b'\eta' - c}{a\eta' + b}, \tag{10}$$

wo a, c reale Grössen bedeuten, mit einander verknüpft sind, sie lägen harmonisch in Bezug auf den Kreis

$$a\eta\eta' + b\eta + b'\eta' + c = 0, \tag{11}$$

oder auch (nach Lord Kelvin), sie seien Spiegelbilder von einander. Dann ist sofort zu übersehen, dass die Doppelpunkte λ, μ der Substitution S in Bezug auf jeden Kreis

$$\left|\frac{\eta - \lambda}{\eta - \mu}\right| = r, \tag{12}$$

wo r eine positive Constante bedeutet, harmonisch liegen; der Kreis (9) ist also jener Kreis, der durch η hindurchgeht und dem Kreisbüschel (12) angehört. Herr Klein nennt die Kreise des Büschels (12) die Bahncurven der elliptischen Substitution S; unser Satz kann also wie folgt ausgesprochen werden:

Die Punktmenge, welche aus dem beliebigen complexen Werthe η durch Anwendung aller Potenzen der nicht periodischen elliptischen Substitution S hervorgeht, liegt auf der durch η hindurchgehenden Bahncurve von S überall dicht.

Ehe wir diese Resultate auf das Studium des Integralquotienten η einer linearen Differentialgleichung anwenden, müssen wir eine Vorstellungsweise einführen, die sich an die von Herrn **Weierstrass** in seinen functionentheoretischen Vorlesungen gegebene Auffassung eines **analytischen Gebildes** anschliesst.

Hat man eine Function

$$\eta = f(t)$$

der complexen Variabeln t etwa dadurch definirt, dass ein Zweig dieser Function in der Umgebung einer regulären Stelle $t = t_0$ durch eine gewöhnliche Potenzreihe

$$(\alpha) \qquad \eta = \mathfrak{P}(t \mid t_0) = \delta_0 + \delta_1(t - t_0) + \delta_2(t - t_0)^2 + \cdot \cdot$$

dargestellt ist, so erhält man durch analytische Fortsetzung dieser Reihe die Gesammtheit aller derjenigen Functionselemente, die durch gewöhnliche Potenzreihen, fortschreitend nach positiven ganzen Potenzen von linearen Functionen von t, dargestellt werden können. Wenn in der Entwickelung (α) der Coefficient δ_1 nicht verschwindet, so ist auch umgekehrt t nach positiven ganzen Potenzen von $\eta - \delta_0$ entwickelbar

$$t = \mathfrak{Q}(\eta \mid \delta_0);$$

wenn wir von dieser Reihe ausgehen und dieselbe analytisch fortsetzen so erhalten wir die Gesammtheit aller Functionselemente, die durch gewöhnliche Potenzreihen, fortschreitend nach positiven ganzen Potenzen von linearen Functionen von η, darstellbar sind.

Betrachten wir die Gesammtheit der zusammengehörigen Werthepaare (t, η), die wir auf die eine oder auf die andere Weise erhalten, so bemerken wir, dass diejenigen Werthepaare

$$t = t_0, \quad \eta = \delta_0,$$

die so beschaffen sind, dass sowohl $t = t_0$ eine reguläre Stelle der Function η als auch $\eta = \delta_0$ eine reguläre Stelle der Function t von η ist, beide Male zum Vorschein kommen Dagegen kommen wir im Allgemeinen bei der Fortsetzung des Elementes $\mathfrak{P}(t \mid t_0)$ zu Werthepaaren (t, η), die bei der Fortsetzung des Elementes $\mathfrak{Q}(\eta \mid \delta_0)$ nicht erreicht werden, und umgekehrt bei Fortsetzung der letzteren Potenzreihe zu Werthepaaren, die durch Fortsetzung von $\mathfrak{P}(t \mid t_0)$ nicht erzielt werden können. Um diesem Uebelstande aus dem Wege zu gehen, kann man sich die beiden Variabeln η, t durch eine dritte **Hülfsvariable** dargestellt denken, also etwa

$$(\beta) \qquad \begin{cases} \eta = \delta_0 + \mathfrak{P}_1(\tau), \\ t = t_0 + \mathfrak{P}_2(\tau), \end{cases}$$

indem man z B. die Potenzreihe

$$\mathfrak{P}_2(\tau) = \varepsilon_1 \tau + \varepsilon_2 \tau^2 + \cdots$$

ganz beliebig, aber so wählt, dass ε_1 von Null verschieden ist, und dann $\mathfrak{P}_1(\tau)$ aus $\mathfrak{P}(t \mid t_0)$ dadurch herleitet, dass man in $\mathfrak{P}(t \mid t_0)$ für $t - t_0$ die Reihe $\mathfrak{P}_2(\tau)$ einsetzt. Herr Weierstrass nennt dann das Reihenpaar (β) ein Element des analytischen Gebildes (η, t) und definirt die Fortsetzung desselben in folgender Weise

Sei τ_0 eine Stelle des gemeinsamen Convergenzbereiches der beiden Reihen (β), dann setze man

$$\tau = \tau_0 + c_1 \tau' + c_2 \tau'^2 + \cdots,$$

wo c_1 von Null verschieden und die Reihe auf der rechten Seite für hinreichend kleines τ' convergent, aber sonst ganz willkürlich gewählt ist; dann verwandelt sich das Reihenpaar (β) in

$$(\beta') \qquad \begin{cases} \eta = \mathfrak{P}_1'(\tau'), \\ t = \mathfrak{P}_2'(\tau'), \end{cases}$$

und das Gebilde (β') coincidirt in einer gewissen Umgebung von $\tau' = 0$ mit dem Gebilde (β) in einer gewissen Umgebung von $\tau = \tau_0$, es kann also (β') als die Fortsetzung von (β) betrachtet werden.

Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens erhält man eine gewisse Gesammtheit von Reihenpaaren, die ein in sich abgeschlossenes Ganzes bilden in dem Sinne, dass, wenn man die Gesammtheit der Werthepaare (t, η) in's Auge fasst, die durch diese Reihenpaare geliefert werden, diese Gesammtheit dieselbe bleibt, wie man auch die Fortsetzung machen und von welchem jener Reihenpaare man auch ausgegangen sein mag. Diese so erzielten Werthepaare enthalten sowohl die durch Fortsetzung von $\mathfrak{P}(t \mid t_0)$ als auch die durch Fortsetzung von $\mathfrak{Q}(\eta \mid \delta_0)$ zu erreichenden, man bezeichnet die Gesammtheit derselben als das analytische Gebilde (η, t).

Denken wir uns etwa die vierfache reale ebene Mannigfaltigkeit R_4, die dadurch bestimmt wird, dass wir η, t als unbeschränkt veränderliche complexe Grössen auffassen, so ist das analytische Gebilde (η, t) ein Gebilde zweiter Stufe im R_4. Projiciren wir dasselbe auf die t-Ebene, so ist die Projection die Gesammtheit derjenigen Stellen t, in deren Umgebung sich η verhält wie eine algebraische Function, projiciren wir jenes Gebilde auf die η-Ebene, so erhalten wir ebenso die Gesammtheit der η-Werthe, in deren Umgebung sich t verhält wie eine algebraische Function.

Die Punktmenge (η, t), die durch Fortsetzung des Elementes (β) zum Vorschein kommt, besitzt im Allgemeinen (d h. wenn η keine

algebraische Function von t ist) noch Grenzstellen, die nicht zu der Punktmenge (η, t) gehören, für welche sich aber in jeder Nähe Punkte dieser Punktmenge befinden, und nur, wenn wir diese Grenzstellen der Punktmenge, d. h dem Gebilde hinzufügen würden, wäre dasselbe eine perfecte Punktmenge im R_4. Diese Grenzstellen werden von dem Gebilde nicht wirklich erreicht, sondern das Gebilde kommt ihnen nur beliebig nahe. Dass es nicht zweckmässig wäre, dieselben dem Gebilde hinzuzufügen, lehrt ein Blick auf das Fuchs'sche Beispiel.

201. Grenzstellen, die einem analytischen Gebilde nicht zuzuzählen sind. Gebilde, die nach einer Seite hin eindeutig sind. Isolirte Punktmengen und isolirtwerthige Functionen.

In der That hatten wir in der Nr. 198 (S. 263) gezeigt, dass, wenn $t = t_0$ ein beliebiger Werth der unabhängigen Variabeln, $\eta = \delta_0$ einer der zugehörigen Werthe der daselbst betrachteten Function

$$\eta = e^{-2\lambda i\int\limits_\alpha^t \frac{dt}{\sqrt{R}}}$$

ist und η_0 einen beliebigen complexen Werth bedeutet, stets eine der Substitutionen T angegeben werden kann, für welche

$$T\delta_0 - \eta_0$$

dem absoluten Betrage nach kleiner ist als eine beliebig klein vorgeschriebene positive Grösse, sofern λ nicht gemäss der Gleichung (9a), Nr. 198 (S. 263) gewählt wird. D. h. aber mit anderen Worten, in jeder Nähe jeder beliebigen Stelle (t_0, η_0) des R_4 liegen Stellen, die dem analytischen Gebilde (t, η) angehören; also ist jede Stelle der vierfachen Mannigfaltigkeit R_4 eine Grenzstelle dieses Gebildes, oder mit Benutzung der oben eingeführten Terminologie, das Gebilde (t, η) ist in der ganzen vierfachen Mannigfaltigkeit R_4 überall dicht. Würde man nun alle diese Grenzstellen dem Gebilde hinzuzählen, so würde dasselbe die ganze vierfache Mannigfaltigkeit R_4 lückenlos erfüllen, man hätte also überhaupt kein besonderes Gebilde, also auch keine functionale Beziehung zwischen η und t.

Bei den analytischen Beziehungen, die von den Analysten des achtzehnten Jahrhunderts eingehender studirt worden waren, hatten sich derartige Verhältnisse nicht gezeigt. Der erste, dem eine ähnliche Erscheinung, wie die eben beschriebene, bei seinen Untersuchungen aufgefallen zu sein scheint, war Abel. Aus der Zeit, in welcher sich

Abel mit der Untersuchung der hyperelliptischen und der allgemeinen Abel'schen Integrale beschäftigte, stammt ein Brief an Holmboe, in welchem Abel schreibt, er habe etwas Unmögliches bewiesen. Man geht wohl kaum fehl, wenn man annimmt, dass sich diese Bemerkung auf die Erkenntniss der Thatsache bezieht, dass die Werthe, welche ein allgemeines Abel'sches Integral oder auch ein elliptisches Integral dritter Gattung für einen beliebigen Werth der unabhängigen Variabeln x annimmt, durch die Formel

$$u = \bar{u} + m_1 w_1 + m_2 w_2 + m_3 w_3 + \cdots$$

dargestellt werden, wo $\bar{u}$ einen bestimmten zu x gehörigen Werth dieses Integrals, $m_1, m_2, m_3, \cdots$ irgendwelche ganze Zahlen, $w_1, w_2, w_3, \cdots$ Constanten bedeuten, deren Anzahl grösser ist wie zwei, und zwischen denen im Allgemeinen keine homogene lineare Relation mit ganzzahligen Coefficienten besteht.

Wie Jacobi zuerst bewiesen hat, lassen sich nämlich (vergl. Nr. 198, S. 263) die ganzen Zahlen $m_1, m_2, m_3, \cdots$ stets so wählen, dass das Aggregat

$$m_1 w_1 + m_2 w_2 + m_3 w_3 + \cdots$$

jedem complexen Werthe beliebig nahe kommt; es wird also in jeder Nähe jeder Stelle (x, u) Stellen geben, die dem durch das betrachtete Abel'sche Integral bestimmten analytischen Gebilde angehören, d. h dieses Gebilde ist in dem Gebiete der beiden Variabeln (x, u) überall dicht. Nimmt man nun keinen Anstand, die sämmtlichen Grenzstellen des Gebildes demselben hinzuzuzählen, so ergiebt sich wie oben die Ungereimtheit, dass eine Function für jeden Werth der unabhängigen Variabeln jeden beliebigen Werth „anzunehmen" im Stande ist, wodurch ja der Charakter einer functionalen Beziehung völlig aufgehoben erscheint. Ob Abel diese Schwierigkeit wirklich gefunden hat, entzieht sich unserer Combination, jedenfalls erwähnt er dieselbe in keiner seiner Abhandlungen. Bemerkenswerth ist, dass Jacobi aus dem erwähnten, von ihm völlig klar erkannten Umstande nur den Schluss gezogen hat, dass die Umkehrungsfunction eines Abel'schen Integrals, wie er sich ausdrückt, ein „Absurdum" sei, während doch derselbe Gedankengang ihn hätte veranlassen müssen, die Function u von x selbst für unmöglich zu erklären. Auf die Consequenzen, die Jacobi aus der von ihm entdeckten Schwierigkeit gezogen hat, kommen wir weiter unten zurück.

Wir werden also dem analytischen Gebilde (t, η) diejenigen Grenzstellen, denen das Gebilde nur beliebig nahe kommt, ohne dieselben wirklich zu erreichen, im Allgemeinen nicht hinzufügen, wodurch es

aber natürlich nicht ausgeschlossen ist, dass wir, je nachdem es sich als zweckmässig erweist, bei der Untersuchung specieller Functionen gewisse Arten dieser Grenzstellen dem Existenzbereiche der Function hinzuzählen

Betrachten wir nun den besonderen Fall, wo das analytische Gebilde (t, η) nach der einen Seite hin eindeutig, d h. wo die eine der beiden Variabeln, etwa t, eine allenthalben eindeutige Function der anderen η ist. Sei $\eta = \delta_0$, $t = t_0$ eine Stelle des Gebildes, also

$$(\beta) \qquad \begin{cases} t = t_0 + \mathfrak{P}_1(\tau) = t_0 + \varepsilon_1\tau + \varepsilon_2\tau^2 + \cdots, \\ \eta = \delta_0 + \mathfrak{P}_2(\tau) = \delta_0 + \delta_1\tau + \delta_2\tau^2 + \cdots, \end{cases}$$

wo $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ gewöhnliche Potenzreihen bedeuten, dann ist jedenfalls

$$\delta_1 \neq 0,$$

und die Entwickelungen (β) stellen in einer gewissen Umgebung der Stelle (t_0, δ_0) das ganze Gebilde dar, d. h jede Stelle des analytischen Gebildes (t, η), die in einer gewissen Umgebung von (t_0, δ_0) liegt, geht aus den Entwickelungen (β) hervor, indem man dem Parameter τ Werthe in der Umgebung von $\tau = 0$ beilegt. Daraus folgt nach bekannten Sätzen über Potenzreihen, dass sich eine endliche positive Grösse δ so angeben lässt, dass, wenn (t_0, η_0) eine ebenfalls dem Gebilde (t, η) angehörende Stelle bedeutet, der absolute Betrag der Differenz $\delta_0 - \eta_0$

$$|\delta_0 - \eta_0| > \delta$$

sein muss.

Projiciren wir das Gebilde (t, η) auf die Ebene der complexen Variabeln η, so ist diese Projection die Gesammtheit der Stellen η, in deren Umgebung sich die eindeutige Function t von η wie eine rationale Function verhält; diese Gesammtheit bildet ein Continuum E, welches als der Existenzbereich der Function t von η bezeichnet wird. Dieses Continuum E bedeckt die η-Ebene oder einen zweifach ausgedehnten Theil derselben einfach, es ist ein unabgeschlossenes und seine Begrenzung wird von denjenigen Stellen gebildet, die Projectionen der dem Gebilde (t, η) nicht angehörenden Grenzstellen desselben sind. Von diesen Stellen weiss man nach den Untersuchungen des Herrn Weierstrass, dass sie Unbestimmtheitsstellen (Herr Weierstrass nennt sie wesentlich singuläre Punkte) der Function t von η sein müssen, und dass die Function t die Eigenschaft hat, in der Nähe einer solchen Stelle jedem Werthe beliebig nahe zu kommen (vergl. eine Arbeit des Herrn Picard, Annales de l'École Normale, 2. Serie, Bd. 9, S. 147). Dagegen lässt sich um jede dem Existenzbereiche E angehörige

Stelle δ_0 ein Kreis mit dem endlichen Radius δ beschreiben, innerhalb dessen keine zweite Stelle η_0 liegt, für welche die Function t denselben Werth t_0 annimmt, wie für δ_0.

Von einer Punktmenge, die so beschaffen ist, dass sich um jeden Punkt derselben eine endliche Umgebung so abgrenzen lässt, dass innerhalb dieser Umgebung kein zweiter Punkt jener Menge liegt, sagt man nach Herrn Cantor, sie sei isolirt. Betrachtet man also die Punktmenge, welche von der Gesammtheit der η-Werthe gebildet wird, für welche die eindeutige Function t denselben Werth t_0 annimmt, so ist dieselbe eine isolirte, und ihre Grenzstellen sind nach den vorhergehenden Erörterungen die sämmtlichen Unbestimmtheitsstellen der Function t von η.

Wir ziehen hieraus zunächst die Folgerung:

Ein analytisches Gebilde (t, η), welches in der ebenen vierfachen Mannigfaltigkeit R_4 überall dicht ist, kann niemals nach einer Seite hin eindeutig sein.

Dies war die Consequenz, die Jacobi aus der von ihm erkannten Eigenschaft eines allgemeinen hyperelliptischen beziehungsweise Abel-schen Integrals, für jeden Werth der unabhängigen Variabeln jedem beliebigen Werthe beliebig nahe zu kommen, gezogen hat; er schloss nämlich, dass ein solches Integral niemals eindeutig umkehrbar sein könne.

Wir können aber die Natur eines analytischen Gebildes (t, η), welches nach einer Seite eindeutig sein soll, noch schärfer kennzeichnen.

Denken wir uns nämlich, das analytische Gebilde (t, η) sei zwar nicht im ganzen R_4, aber auf einem aus dem R_4 ausgesonderten continuirlichen dreifach ausgedehnten Gebilde G_3 überall dicht. Schneiden wir dann das Gebilde durch eine Ebene $t = t_0$, so sind die Schnittpunkte auf einer Curve dieser Ebene (nämlich dem Schnitt derselben mit G_3) überall dicht; projiciren wir die Gesammtheit dieser Schnittpunkte auf die η-Ebene, so sind dieselben auf der Projection jener Curve überall dicht. Die Projectionen jener Schnittpunkte unseres Gebildes (t, η) mit der Ebene $t = t_0$ auf die η-Ebene stellen aber die Gesammtheit der Werthe dar, für welche die Function t von η den Werth t_0 annimmt; sollte etwa t eine eindeutige Function von η sein, so müsste diese Gesammtheit eine isolirte Punktmenge bilden, könnte also auf keiner continuirlichen Curve überall dicht sein. Wir haben also den Satz:

Ein analytisches Gebilde (t, η), welches auf einem aus der vierfachen ebenen Mannigfaltigkeit R_4 ausgesonderten continuirlichen dreifach ausgedehnten Gebilde überall dicht ist, kann nicht nach einer Seite hin eindeutig sein.

Wenn eine abzählbare Punktmenge nicht auf einem continuirliche Gebilde überall dicht ist, so ist sie isolirt. Wenn also das analytisch Gebilde (t, η) die Eigenschaft hat, auf keinem aus dem R_4 ausgeson derten continuirlichen dreifach ausgedehnten Gebilde überall dicht zu sein, so ist sein Schnitt mit einer $t = t_0$-Ebene sowohl wie mit eine $\eta = \delta_0$-Ebene eine isolirte Punktmenge, also ist in diesem Fall sowohl t als Function von η, wie auch η als Function von t so be schaffen, dass die Gesammtheit der Werthe dieser Functionen, die zu einem bestimmten Werthe der unabhängigen Variabeln gehören, stet eine isolirte Punktmenge bildet. Wir sagen von einer solchen Functio sie sei eine **isolirtwerthige**. Das Gebilde (η, t) ist also in dem be trachteten Falle **nach beiden Seiten hin isolirtwerthig.**

Offenbar gilt der Satz:

Ein analytisches Gebilde (η, t), welches nach der eine Seite hin von endlicher Vieldeutigkeit ist, ist nach der an deren Seite hin isolirtwerthig.

202. Discontinuirliche projective Gruppen einer Variabeln. Begrenzung der Continua, wo die Gruppe eigentlich discontinuirlic ist. Infinitesimale Substitutionen.

Wir gehen jetzt nach diesen Vorbereitungen an das Studium de Integralquotienten η unserer homogenen linearen Differentialgleichun $(\mathfrak{A}_2)$ (Nr. 196, S 251), beziehungsweise des durch denselben bestimmte analytischen Gebildes (η, t).

Wenn t eine eindeutige Function von η sein soll, so muss η al Function von t isolirtwerthig sein Sei

$$t = t_0, \quad \eta = \delta_0$$

eine Stelle des durch den Integralquotienten η bestimmten analytische Gebildes, dann erhalten wir die Gesammtheit der η-Werthe, die z demselben Werthe t_0 von t gehören, indem wir auf δ_0 alle Substitu tionen der abzählbaren projectiven Gruppe ϑ anwenden. Damit also eine isolirtwerthige Function von t sei, muss die Gruppe ϑ die folgend Eigenschaft haben:

Es giebt einen complexen Werth δ_0, um den sich ei Kreis mit endlichem Radius δ beschreiben lässt, innerhal dessen kein von δ_0 verschiedener Punkt der Punktmeng liegt, die aus δ_0 durch Anwendung der Substitutionen de Gruppe ϑ hervorgeht.

Wenn eine Gruppe von projectiven Substitutionen einer Variabel

diese Eigenschaft hat, so sagen wir, sie sei innerhalb der complexen Zahlenebene discontinuirlich.

Für eine discontinuirliche Gruppe lassen sich die folgenden Eigenschaften nachweisen. Betrachten wir einen der aus δ_0 durch die Substitutionen der Gruppe hervorgegangenen Punkte ε_0; sei

$$\varepsilon_0 = S\delta_0,$$

so entspricht dem um δ_0 mit dem Radius δ beschriebenen Kreise k_0 ein den Punkt ε_0 einschliessender ebenfalls kreisförmiger Bereich l_0 von endlichem Radius, dessen Begrenzungspunkte von ε_0 in endlichen Abständen liegen. Befände sich innerhalb l_0 ein Punkt ε_1 (ausser ε_0), der aus ε_0 durch eine Substitution S_1 von ϑ hervorgeht, so müsste der Punkt

$$S^{-1}\varepsilon_1$$

innerhalb des Kreises k_0 liegen; dieser Punkt geht aber durch die Substitution

$$S^{-1}S_1S$$

aus δ_0 hervor, und da diese Substitution auch der Gruppe ϑ angehört, so ist dies nicht möglich. D. h. die Punktmenge, welche aus δ_0 durch die Substitutionen der discontinuirlichen Gruppe ϑ hervorgeht, ist eine isolirte.

Auf Grund des in der Nr. 200 (S. 271) bewiesenen Satzes folgt hieraus, dass eine discontinuirliche Gruppe keine nichtperiodische elliptische Substitution enthalten könne, d. h.:

Die in einer discontinuirlichen Gruppe enthaltenen elliptischen Substitutionen sind nothwendig periodisch

Eine isolirte Punktmenge ist stets abzählbar; wenn also, wie wir voraussetzen dürfen, δ_0 nicht ein Doppelpunkt einer in ϑ enthaltenen Substitution ist, so schliessen wir:

Eine discontinuirliche Gruppe ist stets abzählbar.

Wenn ε_0 aus δ_0 durch eine Substitution der Gruppe hervorgeht, so geht ein zu δ_0 unendlich benachbarter Punkt durch dieselbe Substitution in einen zu ε_0 unendlich benachbarten Punkt über. Also haben auch alle Punkte einer gewissen Umgebung von δ_0 die Eigenschaft, dass die aus einem derselben durch die Substitutionen der Gruppe ϑ hervorgehende Punktmenge eine isolirte ist. Wir sagen von einem Punkte δ_0 der complexen Zahlenebene, aus welchem durch die Substitutionen der discontinuirlichen Gruppe ϑ eine isolirte Punktmenge erzeugt wird, die Gruppe ϑ sei im Punkte δ_0 eigentlich discontinuirlich Die Gruppe ist dann auch für alle Punkte einer gewissen Umgebung von δ_0 eigentlich discontinuirlich; d. h:

Die Gesammtheit der Stellen, für welche eine discontinuirliche Gruppe eigentlich discontinuirlich ist, besteht aus lauter innerhalb dieser Gesammtheit gelegenen Punkten, sie zerfällt also in eine endliche oder unendlich grosse Anzahl von Continuis (vergl. Nr. 133, S. 9)

Die Begrenzung dieser Continua wird von einer gewissen abgeschlossenen Punktmenge P gebildet, wir können diese Punktmenge P leicht schärfer charakterisiren

Es folgt aus dem Begriffe der discontinuirlichen Gruppe, dass dieselbe keine infinitesimale Transformation enthalten kann Unter einer infinitesimalen Transformation haben wir dabei eine Substitution

$$\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$$

zu verstehen, in welcher die Grössen

$$\alpha-1,\ \beta,\ \gamma,\ \delta-1$$

unendlich klein sind Wenden wir also auf einen willkürlichen Werth η irgend eine Substitution der discontinuirlichen Gruppe an, so wird der transformirte Werth in endlichem Abstande von η liegen, sofern η nicht ein Doppelpunkt der angewandten Substitution ist. Bedeutet λ einen Punkt, der ein Doppelpunkt einer in der Gruppe enthaltenen parabolischen, hyperbolischen oder loxodromischen Substitution ist, so befinden sich nach dem Satze der Nr. 199 (S 269) in jeder Nähe desselben Stellen, die aus einem willkürlichen Werthe η durch Anwendung von Potenzen der betreffenden Substitution hervorgehen. In der Nähe einer solchen Stelle λ ist also die Gruppe nicht eigentlich discontinuirlich.

Wir sagen allgemein, die Gruppe ϑ sei in der Umgebung einer Stelle η uneigentlich discontinuirlich, wenn sich in jeder Nähe dieser Stelle Punkte befinden, die aus η durch Substitutionen der Gruppe hervorgehen

Aus den eben gemachten Bemerkungen ergiebt sich also, dass die Doppelpunkte der nicht elliptischen Substitutionen der Gruppe solche Stellen sind, in deren Umgebung die Gruppe uneigentlich discontinuirlich ist. Wenn in jeder Nähe einer Stelle a Stellen liegen, in deren Umgebung die Gruppe uneigentlich discontinuirlich ist, so ist die Gruppe auch in a uneigentlich discontinuirlich. Es bildet folglich die Gesammtheit derjenigen Stellen, in deren Umgebung die Gruppe uneigentlich discontinuirlich ist, eine abgeschlossene Punktmenge, und dies ist eben jene Punktmenge P, die die Begrenzung der von den Stellen, wo die Gruppe eigentlich discontinuirlich ist, erfüllten Continua ausmacht.

Betrachtet man allgemein eine Gruppe, die keine infinitesimale Substitution enthält, so kann diese Gruppe nur dann in der Umgebung einer Stelle uneigentlich discontinuirlich sein, wenn diese Stelle entweder selbst Doppelpunkt einer nicht elliptischen Substitution der Gruppe ist, oder wenn sich in jeder Nähe derselben solche Doppelpunkte befinden Bezeichnet man also die Gesammtheit der Doppelpunkte der nicht elliptischen Substitutionen einer solchen Gruppe als Punktmenge Q, bildet die erste Ableitung Q' dieser Punktmenge, so stellt die aus der Vereinigung von Q und Q' hervorgehende Punktmenge $Q + Q'$ die Gesammtheit der Stellen dar, in deren Umgebung die Gruppe uneigentlich discontinuirlich ist. Wenn diese abgeschlossene Punktmenge $Q + Q'$ die ganze complexe Zahlenebene überall dicht erfüllt, so ist die Gruppe keine in dieser Zahlenebene discontinuirliche. Wenn die Gruppe discontinuirlich ist, so muss es, wie wir gezeigt haben, mindestens ein Continuum von Punkten geben, welches nicht der Punktmenge $Q + Q'$ angehört, sondern von dieser Punktmenge begrenzt wird Die Punktmenge $Q + Q'$ ist dann mit der oben durch P bezeichneten identisch.

203. Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit discontinuirlicher Gruppe. Die Umkehrungsfunction des Integralquotienten ist isolirtwerthig.

Betrachten wir nun eine Differentialgleichung zweiter Ordnung $(\mathfrak{A}_2)$, für welche die zum Integralquotienten η gehörige projective Gruppe eine discontinuirliche ist.

Wenn ein Doppelpunkt einer Substitution der Gruppe ϑ zum Werthevorrathe der Function η von t gehört, so hat ein t-Werth, für welchen dieser Doppelpunkt zum Vorschein kommt, die Eigenschaft, dass für denselben zwei sonst von einander verschiedene Zweige der Function η von t denselben Werth annehmen; ein solcher t-Werth muss folglich eine Verzweigungsstelle der Function η, also ein singulärer Punkt der Differentialgleichung sein

Bedeutet $t = a$ eine singuläre Stelle der Differentialgleichung, für welche die Differenz der Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung $r_1 - r_2$ keine ganze Zahl ist, so erleidet irgend ein Zweig des Integralquotienten η (vergl. Nr. 196, S 253 ff.), wenn t einen einfachen unendlich kleinen Umlauf um a vollzieht, eine Substitution, die sich in der canonischen Form:

$$1)\qquad \frac{\bar{\eta} - \lambda}{\bar{\eta} - \mu} = e^{2\pi i(r_1 - r_2)} \frac{\eta - \lambda}{\eta - \mu}$$

darstellen lässt. Wenn $r_1 - r_2$ real ist, so ist diese Substitution eine elliptische, also muss, da die Gruppe ϑ discontinuirlich sein sollte, in diesem Falle $r_1 - r_2$ rational sein. Aus der Form der Entwickelung

$$(2) \qquad \frac{\eta - \lambda}{\eta - \mu} = (t-a)^{r_1 - r_2}(\delta_0 + \delta_1(t-a) + \cdots)$$

ergiebt sich dann, dass die Stellen

$$t = a, \quad \eta = \lambda$$

und allgemein

$$t = a, \quad \eta = S\lambda,$$

wo S irgend eine Substitution der Gruppe ϑ bedeutet, dem analytischen Gebilde (t, η) angehören.

Ist $r_1 - r_2$ complex, aber nicht rein imaginär, so ist die Substitution (1) eine loxodromische. In diesem Falle erreicht, wenn t in a einrückt, η den Werth λ, und wenn wir um $t = a$ herum einen Bereich f von hinreichend kleinen Dimensionen abgrenzen, so entspricht, vermöge der Entwickelung (2), jeder Stelle in einer gewissen Umgebung von $\eta = \lambda$ eine Stelle t des Bereiches f. Die Stelle

$$t = a, \quad \eta = \lambda$$

ist in diesem Falle eine Grenzstelle des Gebildes (t, η), die dem Gebilde nicht angehört, es werden aber durch die Entwickelung (2), wenn wir die Potenz

$$(t-a)^{r_1 - r_2}$$

in bestimmter Weise fixiren, wohldefinirte Stellen des Gebildes in jeder Nähe der Stelle $t = a$, $\eta = \lambda$ gegeben. In diesem Sinne können wir also $\eta = \lambda$ als eine isolirte singuläre Stelle der Function t von η auffassen, und diese Stelle ist dann ein Verzweigungspunkt dieser Function, indem t in der Umgebung von $\eta = \lambda$ nach positiven ganzen Potenzen von

$$(\eta - \lambda)^{\frac{1}{r_1 - r_2}}$$

entwickelt werden kann. Aehnliches gilt für alle Stellen $\eta = S\lambda$.

Wenn $r_1 - r_2$ rein imaginär ist, so ist die Substitution (1) eine hyperbolische. Setzt man

$$t - a = \varrho e^{\varphi i}, \quad r_1 - r_2 = \tau i,$$

so ist

$$(3) \qquad \frac{\eta - \lambda}{\eta - \mu} = e^{\tau i \log \varrho} e^{-\tau\varphi}(\delta_0 + \delta_1(t-a) + \cdots);$$

der Punkt $\eta = \lambda$ wird also, wenn t mit bestimmtem Argument in den Punkt a einrückt, nicht wirklich erreicht, sondern, wenn wir t unzählig viele Umläufe um $t = a$ vollziehen lassen, so dass $\tau\varphi$ positiv sehr

gross wird, so nähert sich η asymptotisch der Stelle λ; wird $\tau\varphi$ negativ unendlich gross, so nähert sich η ebenso der Stelle μ. Den Punkten eines $t=a$ umgebenden Bereiches f entspricht in diesem Falle ein die Punkte $\eta=\lambda$, $\eta=\mu$ umgebender bandförmiger Streifen, der zwar diese Punkte niemals erreicht, dieselben aber, sich ihnen spiralförmig annähernd, umwindet. Die Stellen $t=a$, $\eta=\lambda$ und $t=a$, $\eta=\mu$ sind auch hier Grenzstellen des Gebildes (t, η), die dem Gebilde nicht angehören; die Entwickelung (2) beziehungsweise (3) liefert aber wohldefinirte, dem Gebilde zugehörige Stellen, die an die Stellen $t=a$, $\eta=\lambda$ und $t=a$, $\eta=\mu$ so nahe herangebracht werden können, als man immerhin will. Es werden die Stellen $\eta=\lambda$, $\eta=\mu$ als Verzweigungspunkte der Function t von η gelten können, um welche herum eine Fortsetzung dieser Function bewirkt werden kann. Aehnlich für alle Stellen $t=a$, $\eta=S\lambda$ und $t=a$, $\eta=S\mu$, wo S eine Substitution von ϑ bedeutet.

Sei nun r_1-r_2 eine ganze Zahl m und mögen in der Umgebung von $t=a$ Logarithmen auftreten, dann lässt sich (vergl. die Gleichung (4), Nr. 196, S. 255) die Substitution, die ein Zweig von η erfährt, wenn t einen unendlich kleinen einfachen Umlauf um $t=a$ vollzieht, in die canonische Form

(4) $$\frac{1}{\bar{\eta}-\lambda}=\frac{1}{\eta-\lambda}+c$$

setzen, wo, wenn (vergl. a. a. O.) die Entwickelung die Gestalt

(5) $$\frac{\gamma+\delta\eta}{A(\alpha+\beta\eta)}=(t-a)^{-m}(\delta_0+\delta_1(t-a)+\cdots)+\log(t-a)$$

hat,

$$\lambda=-\frac{\alpha}{\beta},\quad c=-\frac{2\pi i A\beta^2}{\alpha\delta-\beta\gamma}$$

gefunden wird. Setzt man

$$\delta_0=\delta_0'+\delta_0''i,\quad t-a=\varrho e^{\varphi i},$$

so ist in hinreichender Nähe von $t=a$

$$\frac{\gamma+\delta\eta}{A(\alpha+\beta\eta)}\quad\text{von}\quad \varrho^{-m}(\delta_0'\cos m\varphi+\delta_0''\sin m\varphi)+\log\varrho$$
$$+i[\varrho^{-m}(\delta_0''\cos m\varphi-\delta_0'\sin m\varphi)+\varphi]$$

beliebig wenig verschieden; es entsprechen folglich, wenn die Zahl m von Null verschieden ist, allen Punkten in einer gewissen Umgebung von $\eta=\lambda$ Punkte einer gewissen Umgebung von $t=a$, und $\eta=\lambda$ ist auch wieder als ein Verzweigungspunkt der Function t von η aufzufassen. Wenn dagegen

$$r_1-r_2=m=0$$

ist, so ist für alle Punkte in einer gewissen Umgebung von $t = a$ der reale Theil von

$$\frac{\gamma + \delta\eta}{A(\alpha + \beta\eta)}$$

von dem Ausdrucke

$$\delta_0' + \log \varrho$$

beliebig wenig verschieden, also wenn t hinreichend nahe an a genommen wird, wesentlich negativ, so dass in diesem Falle nicht allen Punkten einer gewissen Umgebung von $\eta = \lambda$ Stellen t, die in der Umgebung von $t = a$ liegen, zugehören. Die Entwickelung (5) der Nr. 196 (§ 255) zeigt, dass t in der Nähe von $\eta = \lambda$ eindeutig ist, und dass die Function t von η den Werth a wirklich erreicht, wenn η so in den Punkt λ einrückt, dass der reale Theil des Ausdruckes

$$(6) \qquad -\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{A\beta}\,\frac{1}{\alpha + \beta\eta}$$

negativ unendlich gross wird

Wenn $\beta = 0$ ist, so tritt an die Stelle des Ausdruckes (6) der Ausdruck

$$\frac{1}{A\alpha}(\gamma + \delta\eta),$$

und an Stelle von (5) die Entwickelung (5a) der Nr. 196.

Allemal gehören auch in diesem Falle die sämmtlichen Stellen

$$t = a, \quad \eta = S\lambda$$

zu den Grenzstellen des analytischen Gebildes (t, η), die dem Gebilde nicht angehören; im Falle $r_1 - r_2 = 0$ sind die Stellen $\eta = S\lambda$ Unbestimmtheitsstellen der Function t von η, ohne Verzweigungsstellen derselben zu sein.

Wir erkennen aus diesen Betrachtungen zuvörderst, dass wir alle dem Gebilde (t, η) angehörigen Stellen erhalten, wenn wir zu jedem regulären, ferner zu den scheinbar singulären und denjenigen singulären Stellen von t, denen elliptische Substitutionen entsprechen, die zugehörigen η-Werthe berechnen. Jeder dieser η-Werthe ist so beschaffen, dass in demselben die Gruppe ϑ eigentlich discontinuirlich ist, denn keiner dieser η-Werthe gehört der abgeschlossenen Punktmenge $P = Q + Q'$ an. Also ist die Punktmenge, die von der Gesammtheit der η-Werthe, die zu einem t-Werthe der bezeichneten Art gehören, gebildet wird, eine isolirte, d. h η ist eine isolirtwerthige Function von t Wir haben also mit Rücksicht auf die Bemerkungen der Nr. 202 (S. 279) den Satz:

Die Discontinuität der projectiven Gruppe ϑ innerhalb der complexen Zahlenebene ist nothwendig und hinreichend dafür, dass der Integralquotient η eine isolirtwerthige Func-

tion der unabhängigen Variabeln t ist Der Werthevorrath dieser Function, d. h. die Projection des analytischen Gebildes (t, η) auf die η-Ebene, umfasst eines oder mehrere der Continua von Stellen, in denen die Gruppe ϑ eigentlich discontinuirlich ist.

Projiciren wir diejenigen Grenzstellen des analytischen Gebildes (t, η), die nicht dem Gebilde angehören, auf die η-Ebene, so gehören diese Projectionen der abgeschlossenen Punktmenge

$$P = Q + Q'$$

an. In jeder Nähe eines Punktes der Punktmenge nimmt nach den Ergebnissen der Nr. 199 (S. 269) die Function t von η jeden Werth beliebig oft an, es sind folglich die Stellen von P die Grenzstellen der isolirten Punktmenge, die von den zu einem Punkte t_0 des Existenzbereiches der Function η von t (der Existenzbereich ist nichts anderes wie die Projection des Gebildes (t, η) auf die t-Ebene) gehörigen η-Werthen gebildet wird, und wir sehen also, dass diese Grenzstellen unabhängig sind von der Wahl jenes Werthes t_0 und dass sie nur von der Natur der Gruppe ϑ abhängen.

Der Fall, dass einzelne dieser Grenzstellen, oder genauer, dass Stellen der Punktmenge Q, d h. Doppelpunkte nicht elliptischer Substitutionen von ϑ, Verzweigungspunkte der Function t von η sind, kann, wie sich leicht zeigen lässt, nur dann eintreten, wenn die Function t von η eine unendlich vieldeutige ist.

In der That sei t als Function von η von endlicher Vieldeutigkeit.

Wäre dann für eine singuläre Stelle $t = a$ die Differenz $r_1 - r_2$ der Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung nicht rational, also complex, oder eine von Null verschiedene ganze Zahl und es träten Logarithmen auf, so würden sich schon durch wiederholte Umkreisung der entsprechenden Stelle $\eta = \lambda$ unendlich viele Zweige der Function t von η ergeben. Wir haben also für die endliche Vieldeutigkeit der Function t von η die nothwendigen Bedingungen:

Die Gruppe ϑ muss discontinuirlich sein, und die Differenzen der Wurzeln der zu den singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen sind rationale Zahlen, wenn keine Logarithmen auftreten, und Null, wenn Logarithmen vorhanden sind.

Wenn zu der singulären Stelle $t = a$ eine elliptische Substitution gehört, und die Grösse $r_1 - r_2$ ist kein Stammbruch, sondern etwa

$$r_1 - r_2 = \frac{g}{h}, \quad g > 1,$$

wo g, h ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler bedeuten, so ist der Doppelpunkt $\eta = \lambda$ ein Verzweigungspunkt und zwar ein g-facher algebraischer Windungspunkt der Function t von η. Ebenso ist dann auch jeder Punkt $\eta = S\lambda$ ein g-facher Windungspunkt dieser Function; alle diese Verzweigungspunkte gehören dem Existenzbereiche der Function t an, und wenn diese Function von endlicher Vieldeutigkeit ist, so sind dies die einzigen isolirten Verzweigungsstellen, die überhaupt möglich sind

204. Die Umkehrungsfunction des Integralquotienten ist eindeutig. Existenzbereich dieser Function.

Sei nun insbesondere t eine eindeutige Function von η; dann ist zufolge der algebraischen Bedingungen (Nr 197, S. 256) der Existenzbereich der Function t in der η-Ebene frei von Verzweigungspunkten; jede Stelle der Punktmenge $P = Q + Q'$ ist eine Unbestimmtheitsstelle unserer Function, wo die Function in jeder Nähe jeden Werth beliebig oft annimmt, und umgekehrt muss auch jede Unbestimmtheitsstelle der Function der Punktmenge P angehören

Betrachten wir eine Stelle $\eta = \eta_0$, die dem Existenzbereiche der Function t angehört, dann gehört η_0 einem der Continua an, die von den Stellen, in deren Nähe die Gruppe ϑ eigentlich discontinuirlich ist, gebildet werden. Falls alle diese Stellen ein einziges (zusammenhängendes) Continuum ausmachen, so ist dasselbe mit dem Existenzbereiche der Function t von η identisch. Sind dagegen mehrere von einander getrennte Continua vorhanden, so wird also das Continuum L, dem der betrachtete Punkt η_0 angehört, von den übrigen Continuis durch einen Theil der Punktmenge P getrennt, der, da er die Begrenzung eines Flächenstücks ausmachen muss, eine perfecte und zusammenhängende Punktmenge, im einfachsten Falle eine geschlossene continuirliche Curve bildet.

Auf dieser Curve ist dann ein Theil der Punktmenge Q überall dicht, und jeder Punkt der Curve ist eine Unbestimmtheitsstelle der eindeutigen Function t von η; es ist folglich nach bekannten functionentheoretischen Principien nicht möglich, die Function t über jene Curve hinweg in das benachbarte Continuum von Stellen, in denen die Gruppe ϑ discontinuirlich ist, fortzusetzen; d. h. der Existenzbereich der Function t ist auf das eine Continuum L beschränkt. Wir haben also den wichtigen Satz:

Wenn in der Differentialgleichung $(\mathfrak{A}_2)$ der Integralquotient η eine eindeutige Umkehrung zulässt, so ist der Existenzbereich dieser eindeutigen Umkehrungsfunction *ein* Continuum von Punkten, in denen die Gruppe ϑ eigentlich discontinuirlich ist, und dieses Continuum wird begrenzt von der Punktmenge Q der Doppelpunkte der nicht elliptischen Substitutionen der Gruppe ϑ und der ersten Ableitung Q' dieser Punktmenge; jeder Punkt dieser Begrenzung ist eine Stelle der Unbestimmtheit für die Umkehrungsfunction.

Wenn die Punktmenge $Q + Q'$ keinen einzigen Punkt enthält, d. h. wenn die discontinuirliche Gruppe ϑ der Differentialgleichung $(\mathfrak{A}_2)$ aus lauter elliptischen Substitutionen besteht, und es ist der Integralquotient eindeutig umkehrbar, so umfasst die Projection des Gebildes (t, η) auf die η-Ebene die ganze Ebene; t als Function von η besitzt keine Stelle der Unbestimmtheit und ist folglich eine rationale Function. Die Gruppe ϑ muss also in diesem Falle eine endliche sein, und die Differentialgleichung $(\mathfrak{A}_2)$ ist algebraisch integrirbar.

In diesem Falle ist der Existenzbereich der Function t von η ein einfach zusammenhängender Es giebt aber, wie wir später sehen werden, auch noch andere Fälle, wo dieser Existenzbereich einfach zusammenhängend ist. Weiss man, dass die von den Punkten der Punktmenge P begrenzten Continua von Punkten, wo die Gruppe ϑ eigentlich discontinuirlich ist, einfach zusammenhängende sind, so kann man nach einer Bemerkung der Nr. 197 (S. 259) aus dem Bestehen der algebraischen Bedingungen auf die Eindeutigkeit der Umkehrungsfunction des Integralquotienten schliessen. Hat man also eine discontinuirliche Gruppe von der gedachten Beschaffenheit, so fällt die Frage nach einer eindeutigen Function von η, die bei den Substitutionen jener Gruppe ungeändert bleibt, im wesentlichen zusammen mit der Frage, ob sich eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung $(\mathfrak{A}_2)$ angeben lässt, die keinen scheinbar singulären Punkt besitzt und für welche die gegebene Gruppe die Monodromiegruppe eines Integralquotienten darstellt. Diese Frage wird im folgenden Abschnitte ihre Erledigung finden.

Der Existenzbereich der Function t von η kann aber auch ein mehrfach zusammenhängender sein; in dem Fuchs'schen Beispiele (Nr. 197, S. 256) ist er z. B ein zweifach zusammenhängender. Wir kommen später auf die hier nur berührte Frage der discontinuirlichen Gruppen und auf die damit zusammenhängenden Umkehrprobleme ausführlich zurück. Als das wesentliche Ergebniss der bisherigen Untersuchung heben wir die Thatsache hervor, dass die Natur der Um-

kehrungsfunction des Integralquotienten, sofern dieselbe eindeutig is ganz allein von der Beschaffenheit der projectiven Gruppe ϑ abhäng indem diese die Unbestimmtheitsstellen jener Function determinirt.

Wenn t als Function des Integralquotienten η zwar nicht ei deutig, aber von endlicher Vieldeutigkeit ist, so gilt, wie man leicl übersieht, auch der Satz, dass der Existenzbereich dieser Function m einem der Continua zusammenfallen muss, die von den Stellen, w die Gruppe ϑ eigentlich discontinuirlich ist, gebildet werden. Den auch in diesem Falle ist jeder Punkt der Punktmenge P eine Stell der Unbestimmtheit für die Function t, und da keine Stelle der Punk menge Q ein Verzweigungspunkt dieser Function sein kann, ist eir Fortsetzung von t über eine Linie hinweg, auf welcher die Punktmeng Q überall dicht ist, nicht möglich. Dagegen kann es sich, wenn eine unendlich vielwerthige Function von η ist, ereignen, dass d Existenzbereich dieser Function mehrere durch Theile der Punktmeng P von einander getrennte Continua umfasst; denn in diesem Falle kar eine Fortsetzung der Function t von einem dieser Continua in ei anderes dadurch ermöglicht werden, dass eine Stelle der Punktmenge (die auf der gemeinsamen Begrenzung zweier solcher Continua lieg eine Verzweigungsstelle der Function t von η ist und dass jede Werthe von η in einer gewissen Umgebung dieser Stelle, oder in eine diese Stelle umgebenden ringförmigen Bereiche, Werthe von t in d Umgebung eines gewissen singulären Punktes der Differentialgleichun zugehören.

Wenn in einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung (𝔄 die unabhängige Variable t eine eindeutige Function des Integra quotienten η ist, so liefert diese Function unmittelbar eine eindeuti Function der unabhängigen Variabeln η, die bei den Substitutione der discontinuirlichen projectiven Gruppe ϑ ungeändert bleibt.

Wesentlich anders liegt es bei einer Differentialgleichung n^{ter} Or nung, wo $n > 2$ ist, wenn in derselben die unabhängige Variable t a eindeutige Function der Integralquotienten $\eta_1, \eta_2, \cdot \cdot \eta_{n-1}$ erschen da in diesem Falle der Bereich der Werthesysteme, deren diese Integr quotienten fähig sind, kein Continuum von derselben Dimension, w die complexe $(n-1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit der una hängigen Veränderlichen $\eta_1, \cdots \eta_{n-1}$, sondern nur ein in dies Mannigfaltigkeit enthaltenes eindimensionales continuirliches Gebil erfüllt Gleichwohl lässt sich auch in diesem allgemeinen Falle e Satz aufstellen, der dem für $n = 2$ in Bezug auf die Discontinuit der projectiven Gruppe ϑ gefundenen analog ist.

Viertes Kapitel.

205. Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung. Discontinuirliche projective Gruppen in mehreren Veränderlichen. Beispiel solcher Gruppen durch Betrachtung hyperelliptischer Integrale erster Gattung.

Sei, wie in der Nr. 194 (S. 264),

$$\text{(I)} \qquad \frac{d^n \mathfrak{y}}{dt^n} + r_2(t)\frac{d^{n-2}\mathfrak{y}}{dt^{n-2}} + \cdot\cdot + r_n(t)\mathfrak{y} = 0$$

die vorgelegte Differentialgleichung, $\eta_1, \eta_2, \cdot\cdot\ \eta_{n-1}$ ein Fundamentalsystem von Integralquotienten, ϑ die zu demselben gehörige projective Monodromiegruppe. Wir fassen auch hier das analytische Gebilde

$$\text{(II)} \qquad (t, \eta_1, \eta_2, \cdot\cdot\ \eta_{n-1})$$

in's Auge, welches durch die Functionen von t, die als Integralquotienten der Differentialgleichung (I) mit $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ bezeichnet wurden, in dem Gebiete der n complexen Veränderlichen

$$t, \eta_1, \eta_2, \cdot\cdot\ \eta_{n-1}$$

definirt wird. Dieses Gebiet ist eine $2n$-fach ausgedehnte reale ebene Mannigfaltigkeit R_{2n}, deren Punkte durch die realen Theile und Coefficienten von i der complexen Grössen

$$t = t' + t''i, \quad \eta_\varkappa = \eta_\varkappa' + \eta_\varkappa'' i \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdot\cdot\ n-1)$$

bestimmt werden.

Eine Stelle

$$t = t_0, \quad \eta_1 = \delta_1, \cdot\cdot\ \eta_{n-1} = \delta_{n-1}$$

wird dem Gebilde (II) zugezählt, wenn sich ein Parameter τ so angeben lässt, dass alle Werthesysteme $t, \eta_1, \cdot\cdot\ \eta_{n-1}$, die durch die Gleichungen

$$\text{(III)} \qquad t = t_0 + \mathfrak{P}(\tau), \quad \eta_\varkappa = \delta_\varkappa + \mathfrak{P}_\varkappa(\tau) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdot\cdot\ n-1),$$

wo $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \cdot\cdot\ \mathfrak{P}_{n-1}$ gewöhnliche Potenzreihen bedeuten, für hinreichend kleine Werthe von τ geliefert werden, so beschaffen sind, dass für den Werth t der unabhängigen Variabeln die Werthe $\eta_1, \cdots \eta_{n-1}$ der Integralquotienten zum Vorschein kommen. Die Projection des

Gebildes (II) auf die $2(n-1)$-fach ausgedehnte reale ebene Mannigfaltigkeit R_{2n-2} der $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ bestimmt in dieser Mannigfaltigkeit ein continuirliches Gebilde, welches der früher betrachteten complexen Integralcurve $\mathfrak{C}$ analog ist, und welches wir als das Integralgebilde $\mathfrak{C}$ bezeichnen wollen Die Punkte dieses Integralgebildes machen den Existenzbereich der Function t der Integralquotienten $\eta_1, \cdot \quad \eta_{n-1}$ aus.

Wenn diese Function t eine eindeutige ist, d h. wenn jeder Punkt des Integralgebildes $\mathfrak{C}$ nur für einen Werth von t zum Vorschein kommt, so stellen die Gleichungen (III) das ganze Gebilde (II) in einer gewissen Umgebung der Stelle $(t_0, \delta_1, \cdot \cdot \delta_{n-1})$ dar; d. h. wenn wir mit ε eine hinreichend kleine positive Grösse bezeichnen, so werden alle Stellen des Gebildes (II), für welche gleichzeitig

$$|t-t_0|<\varepsilon, \quad |\eta_1-\delta_1|<\varepsilon, \qquad |\eta_{n-1}-\delta_{n-1}|<\varepsilon$$

ist, unter den sich aus den Gleichungen (III) für hinreichend kleine Werthe von τ ergebenden Werthesystemen von $t, \eta_1, \cdot \eta_{n-1}$ enthalten sein. Oder mit anderen Worten; wenn

$$\delta_\varkappa = \delta_\varkappa' + i\delta_\varkappa'' \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdot \, n-1),$$
$$t_0 = t_0' + it_0''$$

gesetzt wird, so stellen die Gleichungen (III) alle Punkte des Gebildes (II) dar, für welche die Summe

$$(t'-t_0')^2 + (t''-t_0'')^2 + \sum_{\varkappa=1}^{n-1}\left[(\eta_\varkappa'-\delta_\varkappa')^2 + (\eta_\varkappa''-\delta_\varkappa'')^2\right]$$

hinreichend klein ist.

Daraus schliessen wir, dass, wenn $(t_0, \bar\delta_1, \cdots \bar\delta_{n-1})$ ebenfalls eine Stelle des Gebildes (II) darstellt und

$$\bar\delta_\varkappa = \bar\delta_\varkappa' + i\bar\delta_\varkappa'' \qquad (\varkappa = 1, 2, \quad n-1)$$

gesetzt wird, stets eine endliche positive Grösse δ so angegeben werden kann, dass

$$\sum_{\varkappa=1}^{n-1}\left[(\bar\delta_\varkappa'-\delta_\varkappa')^2 + (\bar\delta_\varkappa''-\delta_\varkappa'')^2\right] > \delta^2$$

ist, d h. schneiden wir das Gebilde (II) durch die Ebene $t = t_0$, so bilden die Schnittpunkte auf dieser Ebene und folglich auch deren Projectionen auf die Mannigfaltigkeit R_{2n-2} der $(\eta_1, \quad \eta_{n-1})$ eine isolirte Punktmenge

Diese Punktmenge entsteht aber aus dem Punkte $(\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_{n-1})$ des Integralgebildes $\mathfrak{C}$ durch Anwendung aller Substitutionen der projectiven Gruppe ϑ; diese Gruppe muss also die Eigenschaft haben, dass,

wenn $(\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_{n-1})$ irgend eine Stelle des Integralgebildes $\mathfrak{C}$ bedeutet, keines der Werthesysteme

$$S(\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_{n-1}),$$

die aus $(\delta_1, \delta_2, \quad \delta_{n-1})$ durch irgend eine von der identischen Substitution verschiedene Substitution S der Gruppe ϑ hervorgehen, einen Punkt darstellt, der sich innerhalb einer gewissen mit einem endlichen Radius δ um den Punkt $(\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_{n-1})$ beschriebenen sphärischen Umgebung

$$\sum_{\varkappa=1}^{n-1}\left[(\eta_\varkappa' - \delta_\varkappa')^2 + (\eta_\varkappa'' - \delta_\varkappa'')^2\right] \leqq \delta^2$$

befindet.

Wir sagen von einer Gruppe projectiver Substitutionen in $(n-1)$ Grössen $\eta_1, \eta_2, \cdot \quad \eta_{n-1}$, sie sei in dem Gebiete der $(n-1)$ complexen Grössen $\eta_1, \eta_2, \cdot \quad \eta_{n-1}$, d. h. im R_{2n-2} discontinuirlich, wenn es einen Punkt $(\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_{n-1})$ dieses Gebietes giebt, um den sich eine sphärische Umgebung von endlichem Radius so abgrenzen lässt, dass innerhalb derselben kein Punkt liegt, der aus $(\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_{n-1})$ durch eine (von der 1 verschiedene) Substitution der Gruppe hervorgeht Wie für $n = 2$ in der Nr. 202 (S. 279 ff) lassen sich auch für beliebiges n die folgenden Eigenschaften einer discontinuirlichen Gruppe nachweisen.

Die Punktmenge, die aus $(\delta_1, \delta_2, \quad \cdot \delta_{n-1})$ durch die Substitutionen der Gruppe hervorgeht, ist eine isolirte.

Eine discontinuirliche Gruppe ist abzählbar.

Die Gesammtheit der Stellen, an denen die Gruppe eigentlich discontinuirlich ist, d. h. der Stellen, für welche die Punktmenge, die aus einer dieser Stellen durch die Transformationen der Gruppe hervorgeht, eine isolirte ist, bildet ein oder mehrere Continua im Gebiete R_{2n-2}.

Wir haben also zunächst den Satz:

Wenn in einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung die unabhängige Variable t eine eindeutige Function des Ortes der Integralcurve $\mathfrak{C}$ ist, so ist die projective Monodromiegruppe ϑ der Integralquotienten, bei deren Substitutionen diese Function ungeändert bleibt, eine discontinuirliche

Wir heben ferner noch besonders hervor, dass die Gruppe ϑ nicht nur für die Stellen des Integralgebildes $\mathfrak{C}$, sondern für alle Punkte gewisser $(2n-2)$-fach ausgedehnter Continua eigentlich discontinuirlich sein muss; es könnte also auch eindeutige Functionen der unbeschränkt veränderlichen complexen Grössen $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$

geben, die bei den Substitutionen von ϑ ungeändert bleiben, und in der That lassen sich unter Anwendung eines von Herrn Poincaré entdeckten Princips für jede gegebene discontinuirliche Gruppe in beliebig vielen complexen Veränderlichen Functionen dieser Veränderlichen bilden, die bei den Substitutionen jener Gruppe ungeändert bleiben. Wir werden von diesem Poincaré'schen Verfahren an späterer Stelle (Nr. 307) ausführlich zu handeln haben.

Auch die Aufstellung von discontinuirlichen projectiven Gruppen hat selbst für $n > 2$ keine erheblichen Schwierigkeiten; es handelt sich aber dann darum, zu untersuchen, ob es lineare Differentialgleichungen giebt, für welche eine auf irgend eine Weise erlangte projective discontinuirliche Gruppe die Monodromiegruppe der Integralquotienten bildet, und für welche die unabhängige Variable als eindeutige Function des Ortes auf der Integralcurve erscheint

Die Untersuchungen des folgenden Abschnittes werden zeigen, dass diese Frage für Differentialgleichungen höherer Ordnung einen wesentlich anderen Charakter hat, wie für Differentialgleichungen zweiter Ordnung, für welch' letztere durch die von Herrn Poincaré gegebene Aufstellung aller projectiven discontinuirlichen Gruppen einer Variabeln und der bei den Substitutionen derselben unveränderlichen Functionen in der That auch die Aufgabe, alle linearen Differentialgleichungen mit eindeutig umkehrbaren Integralquotienten aufzufinden, vollständig erledigt ist.

Eine Classe von discontinuirlichen Gruppen in mehreren Veränderlichen hat Jacobi bei Gelegenheit seiner bereits erwähnten Untersuchungen über die hyperelliptischen Integrale entdeckt; wir wollen, da wir auf Betrachtungen, die sich auf jene Integrale beziehen, noch wiederholt zurückzukommen haben, kurz die von Jacobi und seinen Nachfolgern gegebene Theorie skizziren.

Hat man ein hyperelliptisches Gebilde

$$(1) \qquad s = \sqrt{(z - a_0)(z - a_1)(z - a_2) \cdot\cdot (z - a_{2p+1})},$$

wo $a_0, a_1, a_2, \cdot\cdot a_{2p+1}$ von einander verschiedene complexe Grössen bedeuten, so bezeichnet man bekanntlich

$$u_x = \int \frac{g_x(z)\,dz}{s}$$

als Integral erster Gattung, wenn $g_x(z)$ eine ganze rationale Function von höchstens $(p-1)^{\text{tem}}$ Grade ist. Legt man durch die Punkte $a_0, a_1, \cdots a_{2p+1}$ die Querschnitte $l_0, l_1, \cdots l_{2p+1}$ nach dem unendlich fernen Punkte hin und bezeichnet den Werth von u_x, der in einem Punkte z erzielt wird, wenn man mit einem bestimmten Werthe von s

und von einer gewissen unteren Grenze z_0 ausgehend, auf einem in der zerschnittenen Ebene $\overline{T}$ verlaufenden Wege nach z hin integrirt, durch $\bar{u}_\varkappa(z)$, so ergiebt sich der allgemeinste Werth, dessen die Function $u_\varkappa$ im Punkte z fähig ist, in folgender Weise.

Bedeute $\alpha_{\varkappa\lambda}$ den Werth des Integrales $u_\varkappa$, wenn dasselbe über eine vom Punkte z_0 ausgehende, den Punkt a_λ umschlingende Schleife erstreckt wird, für $\lambda = 0, 1, 2, \cdots 2p+1$, dann ist zunächst, da $z = \infty$ kein singulärer Punkt ist,

$$\alpha_{\varkappa 0} - \alpha_{\varkappa 1} + \alpha_{\varkappa 2} - \cdots - \alpha_{\varkappa, 2p+1} = 0.$$

Jeder Werth, dessen die Function $u_\varkappa$ im Punkte z fähig ist, ist dann in einer der beiden Formen

$$\bar{u}_\varkappa(z) + m_1(\alpha_{\varkappa 0} - \alpha_{\varkappa 1}) + m_2(\alpha_{\nu 0} - \alpha_{\varkappa 2}) + \cdots + m_{2p}(\alpha_{\nu 0} - \alpha_{\nu, 2p}),$$

$$\alpha_{\varkappa 0} - \bar{u}_\varkappa(z) + m_1(\alpha_{\varkappa 0} - \alpha_{\varkappa 1}) + m_2(\alpha_{\varkappa 0} - \alpha_{\varkappa 2}) + \cdots + m_{2p}(\alpha_{\varkappa 0} - \alpha_{\varkappa, 2p})$$

enthalten, wo $m_1, m_2, \cdots m_{2p}$ irgend welche positive oder negative ganze Zahlen bedeuten, die nur von der Beschaffenheit des Weges abhängen, längs dessen die Integration von z_0 ausgehend ausgeführt wurde, und die Werthe von $u_\varkappa$, die im Punkte z zum Vorschein kommen auf Wegen, für welche die Quadratwurzel s auch ihr Zeichen beibehält, sind durch die erste dieser beiden Formeln gegeben. Die Differenzen

$$A_{\varkappa\lambda} = \alpha_{\varkappa 0} - \alpha_{\nu\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots 2p)$$

heissen die zu dem Integrale $u_\varkappa$ gehörigen Periodicitätsmoduln.

Wählen wir die ganze Function $g_\varkappa(z)$ auf p verschiedene Arten so, dass zwischen den diesen Wahlen

$$g_1(z), \quad g_2(z), \cdots g_p(z)$$

entsprechenden Integralen

$$u_\nu(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{g_\varkappa(z)\,dz}{s} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots p)$$

keine lineare Relation mit constanten Coefficienten stattfindet, so lässt sich jedes zu dem Gebilde (1) gehörige Integral erster Gattung in der Form

$$c_0 + c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_p u_p$$

darstellen, wo die $c_0, c_1, \cdots c_p$ Constanten bedeuten.

Die Aenderungen, die das Functionssystem $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \cdots \bar{u}_p$ bei allen möglichen geschlossenen Umläufen der unabhängigen Variabeln z erfährt, werden dann durch die Substitutionen einer projectiven Gruppe G_p in p Variabeln bestimmt, für welche die $2p+1$ Substitutionen

$$(2)\qquad \begin{cases} (u_1 + A_{1\lambda}, \quad u_2 + A_{2\lambda}, \cdots u_p + A_{p\lambda}) & (\lambda = 1, 2, \cdots 2p), \\ (\alpha_{10} - u_1, \quad \alpha_{20} - u_2, \quad \cdots \alpha_{p0} - u_p) \end{cases}$$

und deren inverse eine Basis darstellen.

Betrachtet man statt der sämmtlichen p Functionen $u_1, u_2, \cdots u_p$ deren nur $q < p$, etwa $u_1, u_2, \cdots u_q$, so erfahren diese bei allen möglichen Umläufen von z ebenfalls die Substitutionen einer projectiven Gruppe G_q in q Variabeln, für welche die $2p + 1$ Substitutionen

$$\begin{gathered} (u_1 + A_{1\lambda}, \quad u_2 + A_{2\lambda}, \cdots u_q + A_{q\lambda}) \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots 2p), \\ (\alpha_{10} - u_1, \quad \alpha_{20} - u_2, \quad \cdots \alpha_{q0} - u_q) \end{gathered}$$

und ihre inversen eine Basis bilden. Diese Gruppe ist nun, wenn $q < p$ ist, niemals discontinuirlich, d. h. es giebt keine Stelle $(u_1, u_2, \cdots u_q)$ im Bereiche der $2q$-fach ausgedehnten ebenen realen Mannigfaltigkeit R_{2q}, für welche die Gruppe G_q eigentlich discontinuirlich wäre. Dies ergiebt sich aus dem folgenden von Jacobi herrührenden Satze:

Es lassen sich nach Vorschrift von q willkürlichen complexen Grössen $r_1, r_2, \cdots r_q$ und einer positiven Grösse δ von beliebiger Kleinheit stets $2p$ ganze Zahlen $m_1, m_2, \cdots m_{2p}$ so finden, dass

$$\left| \sum_{\lambda=1}^{2p} m_\lambda A_{\varkappa\lambda} - r_\varkappa \right| < \delta \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots q),$$

falls zwischen den $A_{\varkappa\lambda}$ nicht gewisse Beziehungen mit ganzzahligen Coefficienten bestehen und q kleiner ist wie p.

Hiernach ist nämlich das durch die $q < p$ Functionen $u_1, u_2, \cdots u_q$ bestimmte analytische Gebilde in dem ganzen $2(q+1)$-fach ausgedehnten Gebiete der $u_1, u_2, \cdots u_q, t$ überall dicht, und das Functionssystem $u_1, u_2, \cdots u_q$ kommt für jeden beliebigen Werth von t jedem Punkte der $2q$-fach ausgedehnten ebenen Mannigfaltigkeit R_{2q} beliebig nahe.

Dagegen ist die Gruppe G_p discontinuirlich, und zwar ist sie für jeden endlichen Punkt $(u_1, u_2, \cdots u_p)$ der $2p$-fach ausgedehnten realen ebenen Mannigfaltigkeit R_{2p} eigentlich discontinuirlich. Es folgt dies indirect daraus, dass, wenn man im R_{2p} das durch den Werthevorrath der Functionen

$$(3)\qquad u_1(z), \quad u_2(z), \quad \cdots u_p(z)$$

bestimmte Gebilde $\mathfrak{C}$ in's Auge fasst und die abhängige Variable z als Function des Ortes auf diesem Gebilde $\mathfrak{C}$ studirt, gewisse rationale Functionen von z sich als eindeutige Functionen der Integrale (3) ergeben. Diese Functionen bleiben dann offenbar ungeändert, wenn

man die Integrale $u_1, u_2, \cdots u_p$ durch eine Substitution der Gruppe G_p transformirt. Nach den Untersuchungen von Herrn Weierstrass und Riemann gelangt man zu einer Darstellung dieser eindeutigen Functionen in folgender Weise.

206. Lösung des Umkehrproblems durch die Weierstrass'sche ϑ-Function. Jacobi'sches Umkehrproblem. Elliptische Functionen.

Man kann die ganzen Functionen $g_\varkappa(x)$ so wählen oder kann lineare Verbindungen der $u_1, u_2, \cdots u_p$ mit constanten Coefficienten so herstellen, dass die so entstehenden Integrale erster Gattung

$$(4) \qquad w_1(z), \quad w_2(z), \cdots w_p(z)$$

die Periodicitätsmoduln

$$\begin{matrix} \pi i, & 0, & & 0, & b_{11}, & b_{12}, & \cdot\, b_{1p}, \\ 0, & \pi i, & \cdot & 0, & b_{21}, & b_{22}, & \cdot\; b_{2p}, \\ \cdot & & \cdot & \cdot\;\; \cdot & & \cdot\;\; \cdot & \cdot\;\; \cdot \\ 0, & 0, & & \cdot\, \pi i, & b_{p1}, & b_{p2}, & \cdot\cdot\, b_{pp} \end{matrix}$$

besitzen. Allgemein bestehen zwischen den Periodicitätsmoduln eines Systems linear unabhängiger Integrale erster Gattung gewisse von Herrn Weierstrass entdeckte algebraische Beziehungen, von denen wir an späterer Stelle noch ausführlich handeln werden; diese Beziehungen haben für die Periodicitätsmoduln der $w_1, w_2, \cdots w_p$ die einfache Gestalt

$$(5) \qquad b_{\varkappa\lambda} = b_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \quad p),$$

und überdies ist der reale Theil der quadratischen Form

$$(6) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{p} \sum_{\lambda=1}^{p} b_{\varkappa\lambda} n_\varkappa n_\lambda = \varphi(n_1, n_2, \quad \cdot\cdot\, n_p)$$

für reale Werthesysteme der $n_1, n_2, \quad \cdot\, n_p$ negativ

Die Weierstrass'sche Thetareihe

$$\vartheta(v_1, v_2, \qquad v_p) = \sum_{(n_1, n_2, \quad n_p)}^{(p)} e^{\varphi(n_1, n_2, \quad n_p) + 2(n_1 v_1 + n_2 v_2 + \quad + n_p v_p)},$$

wo die $n_1, n_2, \;\cdot\; n_p$ alle Systeme von p ganzen Zahlen durchlaufen, convergirt dann für alle endlichen Werthesysteme der $v_1, v_2, \;\cdot\; v_p$

Bezeichnet man die Punkte $a_0, a_1, \;\cdot\cdot\, a_{2p+1}$ in irgend einer Reihenfolge durch

$$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_p, \quad \beta, \beta_1, \beta_2, \cdots \beta_p$$

und setzt

$$f(z) = \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2) \cdots (z-\alpha_p)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2) \cdots (z-\beta_p)},$$

so erhält man zur Berechnung von z als Function der Integrale (4) oder der mit denselben linear verknüpften Integrale (3) die Formel

$$(7) \quad \frac{f(z)}{\sqrt{f(\alpha)f(\beta)}} = \frac{\vartheta\left(w_1(z) - \sum_{\lambda=1}^{p} w_1(\alpha_\lambda),\ w_2(z) - \sum_{\lambda=1}^{p} w_2(\alpha_\lambda),\ \cdots\ w_p(z) - \sum_{\lambda=1}^{p} w_p(\alpha_\lambda)\right)^2}{\vartheta\left(w_1(z) - \sum_{\lambda=1}^{p} w_1(\beta_\lambda),\ w_2(z) - \sum_{\lambda=1}^{p} w_2(\beta_\lambda),\ \cdots\ w_p(z) - \sum_{\lambda=1}^{p} w_p(\beta_\lambda)\right)^2}$$

Wir sehen, dass die Darstellung der Function z des Ortes auf dem Gebilde $\mathfrak{C}$ erfolgt mit Hülfe einer Function von p unabhängigen Variabeln

$$\vartheta(v_1, v_2, \cdots v_p),$$

die die Eigenschaft hat, sich mit gewissen Exponentialfunctionen zu multipliciren, wenn auf die $v_1, v_2, \cdots v_p$ eine Substitution der Gruppe G_p ausgeübt wird. Von dieser ϑ-Function kann man leicht durch Quotientenbildung zu Functionen von p unabhängigen Variabeln gelangen, die bei den Substitutionen der Gruppe G_p absolut ungeändert bleiben; es ist aber von der grössten Bedeutung, dass man auch ohne Zuhülfenahme der ϑ-Function direct von der Function z der Integrale $u_1, u_2, \cdots u_p$, d. h. des Ortes auf dem Gebilde $\mathfrak{C}$, zu Functionen der als unabhängig veränderliche Grössen aufzufassenden $u_1, u_2, \cdots u_p$ gelangen kann, die bei den Substitutionen von G_p ungeändert bleiben, und zwar geschieht dies mit Hülfe des Abel'schen Theorems.

Durch Anwendung dieses berühmten Theorems kann man nämlich, wie wir hier nicht näher ausführen wollen, von dem Gleichungssysteme

$$(8) \qquad u_\varkappa(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{g_\varkappa(z)\,dz}{s} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots p)$$

zu den Gleichungen des sogenannten Jacobi'schen Umkehrproblems

$$(9) \qquad u_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{p} \int_{b_\lambda}^{z_\lambda} \frac{g_\varkappa(z)\,dz}{s} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots p)$$

gelangen, wo die $b_1, \cdots b_p$ Constanten, die $z_1, z_2, \cdots z_p$ von einander unabhängige Grössen bedeuten, die durch diese Gleichungen als Functionen der unabhängigen Variabeln $u_1, u_2, \cdots u_p$ eindeutig bestimmt werden. Eine explicite Darstellung dieser Functionen hat zuerst Herr Weierstrass mit Hülfe seiner allgemeinen ϑ-Function gegeben, dieselbe ist der Darstellung (7) der durch die Gleichungen (8) definirten Function z der Integrale (3) ganz analog

Die Gleichungen (9) liefern auch noch eine eindeutige Bestimmung der $z_1, z_2, \cdots z_p$ als Functionen der $u_1, u_2, \cdots u_p$, wenn unter den Integralzeichen an die Stelle der

$$(\alpha) \qquad \frac{g_\varkappa(z)}{s}\,dz \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots p)$$

irgend ein System von Differentialen erster Gattung eines beliebigen algebraischen Gebildes vom Range (Geschlecht) p gesetzt wird. Aber auch dann sind die so definirten eindeutigen Systeme von $2p$-fach periodischen Functionen nicht die allgemeinsten, indem zwischen den Perioden der aus dem Jacobi'schen Umkehrprobleme entspringenden Functionen (für $p > 3$) Beziehungen stattfinden, die zwischen den $\frac{p(p+1)}{2}$ Constanten, von denen die quadratische Form φ der allgemeinen ϑ-Function abhängt, nicht bestehen müssen. Die Argumente der allgemeinsten, durch ϑ-Functionen darstellbaren $2p$-fach periodischen Functionen von p Variabeln lassen sich zwar nicht immer als Summen von p Integralen erster Gattung, wohl aber als Summen von p algebraischen Integralen von anderer Beschaffenheit darstellen.

Für $p = 1$, d. h. im Falle der elliptischen Functionen, führt die Lösung des Umkehrproblems für das Integral erster Gattung

$$(10) \qquad u = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{(z-a_0)(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}}$$

zu den allgemeinsten doppeltperiodischen Functionen. Wenn nämlich zwei beliebige Grössen ω_1, ω_2 gegeben sind, die der einzigen Bedingung, die für die Perioden einer doppeltperiodischen eindeutigen Function erfüllt sein muss, Genüge leisten, der Bedingung nämlich, dass der Quotient $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ nicht real, d. h. dass die Gruppe

$$u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2,$$

wo m_1, m_2 ganze Zahlen bedeuten, eine discontinuirliche ist, so kann man die beiden Invarianten (vergl. Nr. 276) der biquadratischen Form

$$(11) \qquad (z-a_0)(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)$$

stets und zwar nur auf eine Weise so bestimmen, dass sich aus der Gleichung (10) z als doppeltperiodische Function von u mit den Perioden ω_1, ω_2 ergiebt. Dass man die Invarianten der Form (11), d. h. diejenigen ganzen Functionen der Coefficienten dieser Form, die ungeändert bleiben, wenn man die Form durch eine beliebige Substitution von der Gestalt

(12) $$z = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

transformirt, in Betracht zieht, liegt daran, dass durch Anwendung der Substitution (12) der Charakter des Integrales (10) nicht geändert wird. Statt die beiden Invarianten der allgemeinen Form (11) zu betrachten, kann man auch zuerst durch geeignete Wahl der Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in (12) drei der Nullstellen der biquadratischen Form für ζ in die Punkte

$$\zeta = 0,\ 1,\ \infty$$

verlegen und dann die vierte Nullstelle als Function von ω_1, ω_2 studiren; es entspricht dies der Transformation des elliptischen Integrales (10) in die Normalform

$$u = \int \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)(1-\lambda\zeta)}}.$$

Diese vierte Nullstelle λ ist dann eine eindeutige Function des Periodenverhältnisses $\frac{\omega_2}{\omega_1}$, die sogenannte elliptische Modulfunction, mit der wir uns noch eingehend zu beschäftigen haben werden.

Wir sehen also hier, dass sich, wenn das System der Perioden, d. h. die Gruppe der Function z von u willkürlich gegeben ist, die Coefficienten der Differentialgleichung

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{z - a_0 \cdot z - a_1 \cdot z - a_2 \cdot z - a_3},$$

die diese Function definirt, eindeutig bestimmen lassen. Für $p > 1$ kann man die $2p$ Perioden, ja selbst die Perioden $b_{\lambda\varkappa}$, wie sie in der allgemeinen ϑ-Function auftreten, nicht mehr willkürlich vorschreiben und dann die Coefficienten der Gleichungen des Jacobi'schen Umkehrproblems als Functionen derselben bestimmen; sondern damit eine solche Bestimmung möglich sein soll, müssen zwischen den Grössen $b_{\lambda\varkappa}$ nicht nur die Beziehungen (5) und die Bedingung, dass der reale Theil der quadratischen Form (6) negativ sei, sondern ausser diesen für $p > 3$ noch

$$\frac{(p-2)(p-3)}{2}$$

andere Relationen bestehen. Wir werden ähnliche Ergebnisse finden, wenn wir uns die Aufgabe stellen, eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung anzugeben, für welche die Monodromiegruppe der Integralquotienten gegeben ist. Diese Aufgabe wollen wir im folgenden Kapitel behandeln.

Fünftes Kapitel.

207. Die in den Coefficienten einer linearen Differentialgleichung auftretenden Parameter als Functionen der Fundamentalinvarianten. Constantenzählung. Auftreten von scheinbar singulären Stellen.

Wir denken uns die lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung der Fuchs'schen Classe in der Form geschrieben, wo der Coefficient der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung gleich Null ist:

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + p_n y = 0$$

und bezeichnen mit $y_1, y_2, \cdots y_n$ ein Fundamentalsystem von Integralen, mit h die demselben entsprechende unimodulare Monodromiegruppe; ferner sei

$$\eta_\varkappa = \frac{y_{\varkappa+1}}{y_1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n-1)$$

ein System von Integralquotienten und ϑ die zu demselben gehörige mit h isomorphe projective Monodromiegruppe. Da der identischen Substitution von ϑ nur Substitutionen von h entsprechen können, welche die $y_1, y_2, \cdots y_n$ mit einer n^{ten} Einheitswurzel multipliciren (Nr. 180, S. 179), so können wir an Stelle von h gleich die Gruppe ϑ betrachten

Wir scheiden unter den singulären Stellen der Differentialgleichung (A) die scheinbar singulären Punkte $b_1, b_2, \cdots b_\tau$ von den übrigen, den wirklich singulären Stellen $a_1, a_2, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1}$, welch' letzteren wir den unendlich fernen Punkt, falls derselbe weder reguläre noch scheinbar singuläre Stelle ist, als $a_{\sigma+1}$ bereits zugezählt denken. Bei Umläufen um die scheinbar singulären Stellen $b_1, b_2, \cdots b_\tau$ bleiben die Integralquotienten $\eta_1, \cdots \eta_{n-1}$ ungeändert. Die wirklichen singulären Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1}$ denken wir uns aus der Ebene der complexen Variabeln x ausgesondert, und die so entstehende Fläche T durch die σ von den Punkten $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ nach $a_{\sigma+1}$ hin gelegten Querschnitte $l_1, l_2, \cdots l_\sigma$ in eine einfach zusammenhängende $\overline{T}$ zerschnitten.

Dann sind also innerhalb $\overline{T}$ die Integralquotienten $\eta_1, \cdots \eta_{n-1}$ eindeutig und erfahren, wenn x den Querschnitt $l_\varkappa$ im positiven Sinne

überschreitet, eine gewisse projective Substitution $A_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots \sigma$), wenn x die Querschnitte $l_1, l_2, \cdots l_\sigma$ der Reihe nach in negativem Sinne überschreitet, eine projective Substitution $A_{\sigma+1}$, und es ist

(1) $$A_{\sigma+1} = A_1^{-1} A_2^{-1} \cdots A_\sigma^{-1} = (A_\sigma A_{\sigma-1} \cdots A_1)^{-1}.$$

Die Substitutionen

$$A_1,\ A_2, \cdots A_\sigma,\ A_{\sigma+1}$$

bilden dann eine Basis der Gruppe ϑ, und die Gruppe ist vollkommen bestimmt, wenn die Coefficienten der σ Substitutionen

(2) $$A_1,\ A_2, \cdots A_\sigma$$

bekannt sind. Da wir es mit projectiven Substitutionen zu thun haben so hängt jedes $A_\varkappa$ von $n^2 - 1$, die σ Substitutionen (2) also im Ganzen von

$$\sigma(n^2 - 1)$$

Constanten ab.

Da wir ähnlich wie in der Nr. 121 (Bd I, S. 440) die Gruppe ϑ nur in ihrer Beziehung zur Differentialgleichung untersuchen wollen, so können wir uns ϑ noch durch eine willkürliche projective Substitution, die von dem Quotientensysteme $\eta_1, \cdots \eta_{n-1}$ zu irgend einem andern Fundamentalsysteme von Integralquotienten überführt, transformirt denken, so dass also (vergl. a. a. O.) unsere Gruppe ϑ von

$$(\sigma - 1)(n^2 - 1) = \mathsf{N}$$

wesentlichen Constanten abhängt. Wir können z B. auch hier ein System von Fundamentalinvarianten als diese Constanten ansehen, darüber wollen wir aber nichts Genaueres festsetzen, sondern annehmen, die Gruppe ϑ sei, abgesehen von der transformirenden Substitution, durch die N Parameter

(3) $$\alpha_1,\ \alpha_2, \cdots \alpha_{\mathsf{N}}$$

bestimmt Wir wissen dann nach den Ergebnissen des achten Abschnittes, wie wir diese Parameter der Gruppe als Functionen der in den Coefficienten der Differentialgleichung auftretenden Parameter berechnen können.

Wir wollen jetzt die umgekehrte Aufgabe behandeln, d. h. wir fragen nach der Art der functionalen Abhängigkeit der in den Coefficienten der Differentialgleichung (A) auftretenden Constanten von den Parametern (3) der Gruppe ϑ

Die Coefficienten von (A) haben, da die Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe angehören sollte, nach den Ergebnissen der Nr. 62 (Bd. I, S. 220) die Gestalt

$$p_\varkappa = \frac{F_{(\sigma+\tau-1)\varkappa}(x)}{Q(x)} \qquad (\varkappa = 2, 3, \ldots n),$$

wo

$$Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_\sigma)(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_\tau)$$

gesetzt wurde und $F_\nu(x)$ eine ganze Function vom höchstens ν^{ten} Grade in x bedeutet. Die Differentialgleichung hängt demnach ab

1) von den $\sigma+\tau$ singulären Stellen $a_1, \ldots a_\sigma, b_1, \ldots b_\tau$,

2) von den (vergl Nr. 68, Bd. I, S. 240)

$$\frac{n(n+1)}{2}(\sigma+\tau) - \frac{n(n-1)}{2} - \sigma - \tau$$

Coefficienten der ganzen Functionen

$$F_{2(\sigma+\tau-1)}, \ldots F_{n(\sigma+\tau-1)},$$

d. h. also im Ganzen von

$$(n, \sigma+\tau) = \frac{n(n+1)}{2}(\sigma+\tau) - \frac{n(n-1)}{2}$$

Parametern. Zwischen diesen bestehen noch die algebraisch ausdrückbaren Beziehungen, welche bewirken, dass die Punkte $b_1, b_2, \ldots b_\tau$ scheinbar singuläre Stellen sind. Diese sind für $b_\varkappa$ zunächst $n-1$ Bedingungen für die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung und ferner (vergl. Nr. 55, Bd. I, S. 197) die $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungen, die das Auftreten von Logarithmen verhindern. Also entsprechen jedem scheinbar singulären Punkte $b_\varkappa$

$$\frac{(n+2)(n-1)}{2}$$

Bedingungen, so dass die Differentialgleichung (A) von

$$(n, \sigma+\tau) - \tau\,\frac{(n+2)(n-1)}{2},$$

d. h. von

$$\frac{n(n+1)}{2}\sigma + \tau - \frac{n(n-1)}{2}$$

Parametern abhängt. Durch eine lineare Transformation der unabhängigen Variabeln x kann man bewirken, dass

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{\sigma+1} = \infty$$

wird ($a_{\sigma+1} = \infty$ hatten wir schon von vornherein vorausgesetzt), es sind also noch zwei von der gefundenen Anzahl abzuziehen. Die endgültige Zahl der Parameter ist demnach

$$\frac{n(n+1)}{2}\sigma + \tau - 2 - \frac{n(n-1)}{2}.$$

Wäre die Anzahl τ der scheinbar singulären Stellen gleich Null, so hingen die Coefficienten der Differentialgleichung (A) von

(4) $$\frac{n(n+1)}{2}\sigma - \frac{n(n-1)}{2} - 2$$

Parametern ab; die Anzahl N der Parameter der Gruppe ϑ ist im Allgemeinen grösser, nur für $n = 2$ stimmt die Zahl (4) mit N überein. Wir erschliessen hieraus den folgenden Satz:

Die Parameter der projectiven Monodromiegruppe ϑ der Integralquotienten einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung ohne scheinbar singuläre Stellen brauchen keinerlei durch Gleichungen darstellbare Bedingungen zu erfüllen; dagegen müssen zwischen diesen N Parametern für eine von scheinbar singulären Stellen freie Differentialgleichung von der Ordnung $n > 2$

$$\mathsf{N} - \sigma\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + 2 = \sigma\left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} - 1\right) - \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - 3\right)$$

Relationen bestehen, wenn σ die Anzahl der wirklichen singulären im Endlichen gelegenen Stellen bedeutet.

Die linearen Differentialgleichungen ohne scheinbar singuläre Stellen sind in gewissem Sinne das Analogon der Integrale erster Gattung eines algebraischen Gebildes; man könnte darum die zwischen den Parametern der Gruppe ϑ für $n > 2$, $\sigma > 1$ bestehenden Beziehungen den im vorigen Abschnitte erwähnten Beziehungen zwischen den Periodicitätsmoduln der Integrale erster Gattung, die zu Gebilden vom Range $p > 1$ gehören, an die Seite stellen, und weiter den Fall $n = 2$ als das Analogon des Falles $p = 1$, d. h. der elliptischen Integrale betrachten. Dass diese Analogie nicht nur eine äusserliche ist, sondern auch bei tiefer gehenden Fragen erhalten bleibt, wird aus den folgenden Ueberlegungen hervorgehen.

Denkt man sich eine projective Gruppe ϑ in $(n-1)$ Variabeln, die aus den $\sigma + 1$ Substitutionen

$$A_1, A_2, \cdot\cdot A_\sigma, A_{\sigma+1},$$

zwischen denen die Beziehung (1) besteht, als Basis gebildet ist, durch ihre N wesentlichen Parameter (3) gegeben, so wird man im Allgemeinen keine lineare Differentialgleichung (A) n^{ter} Ordnung der Fuchs'schen Classe mit σ im Endlichen gelegenen wirklichen und ohne scheinbare singuläre Punkte herstellen können, für welche ϑ die Monodromiegruppe der Integralquotienten darstellt, sondern man wird dieser Differentialgleichung noch

$$\sigma\left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} - 1\right) - \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - 3\right)$$

scheinbar singuläre Stellen beilegen müssen, damit die Anzahl der in

den Coefficienten verfügbaren Parameter mit der Anzahl N der Parameter der Gruppe ϑ übereinstimmt. Die Parameter der Coefficienten sind dann im Allgemeinen transcendente und mehrdeutige Functionen der $\alpha_1, \alpha_2, \cdot \alpha_N$, die auch nicht für alle Werthesysteme dieser Grössen zu existiren brauchen, es kann vielmehr der Existenzbereich jener Functionen durch gewisse Ungleichheitsbedingungen, denen die $\alpha_1, \alpha_2, \cdot \alpha_N$ genügen müssen, beschränkt sein

Wir wollen das Studium dieser Art von Functionen nur in dem einfachsten Falle in Angriff nehmen, wo $n = 2$ ist und also die Differentialgleichung

$$(A_2) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + p_2 y = 0$$

als frei von scheinbar singulären Stellen vorausgesetzt werden kann.

208. Differentialgleichung zweiter Ordnung ohne scheinbar singuläre Stellen. Abbildung der Ebene der unabhängigen Variabeln durch den Integralquotienten.

Wenn man allgemein eine lineare Differentialgleichung von der Form (A_2) betrachtet, um dieselbe in Bezug auf die Eigenschaften der Monodromiegruppe ϑ ihres Integralquotienten zu untersuchen, so kann man, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, die Voraussetzung machen, dass ihre nicht scheinbar singulären Stellen $a_1, a_2, \cdot\cdot a_\sigma$ einfache sind (vergl. Nr 197, S. 256), d h. dass die Differenz $r_1 - r_2$ der Wurzeln der zu einer solchen Stelle $x = a$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung in ihrem realen Theile nicht negativ und kleiner als wie Eins, und dass die scheinbar singulären Stellen $b_1, b_2, \cdot \cdot b_\tau$ sämmtlich von einander getrennt liegen, d. h. auch einfache sind, so dass also für eine dieser Stellen $x = b$ die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen die Werthe

$$r_1 = \frac{3}{2}, \quad r_2 = -\frac{1}{2}$$

besitzen Die Richtigkeit dieser Behauptung wird sich aus den Untersuchungen des siebenten Kapitels ergeben, wir werden daselbst zeigen, dass man von einer beliebigen Differentialgleichung zweiter Ordnung zu einer anderen mit derselben unabhängigen Variabeln und denselben wirklich singulären Punkten übergehen kann, für welche die Monodromiegruppe der Integralquotienten auch dieselbe ist, wie für die gegebene Differentialgleichung und die „nur einfache singuläre Stellen besitzt“. Hier bemerken wir nur noch, dass die Voraussetzung, die gegebene Differentialgleichung habe nur einfache singuläre

Stellen, in der Theorie der algebraischen Functionen ihr Analogon hat; man kann auch hier wie dort den allgemeinen Fall einer beliebigen singulären Stelle durch Grenzübergang aus dem von nur einfachen singulären Stellen erhalten, indem man eine oder mehrere einfache scheinbar singuläre Stellen mit einer einfachen wirklichen singulären Stelle oder mit einander zusammenfallen lässt; es ist dies auch schon in der in Nr. 197 (S. 256) eingeführten Terminologie zum Ausdrucke gebracht.

Wenn wir dann von der Differentialgleichung (A_2) sagen, sie besitze keine scheinbar singuläre Stelle, so heisst dies, ihre sämmtlichen singulären Stellen sind wirkliche, und für jede derselben ist der reale Theil der Differenz der Wurzeln der zugehörigen determinirenden Fundamentalgleichung absolut genommen kleiner wie Eins (vergl. Nr. 197, S. 256).

Wir denken uns überdies durch eine lineare Transformation der unabhängigen Variabeln die singulären Stellen $a_1, a_2, a_{\sigma+1}$ schon in die Punkte

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{\sigma+1} = \infty$$

verlegt, dann ist also die Anzahl der Parameter in den Coefficienten der Differentialgleichung gleich $3\sigma - 3$, und ebenso gross ist die Anzahl der Parameter, von denen die Gruppe ϑ abhängt

Betrachten wir dann den Integralquotienten $\eta(x)$ in der durch die Querschnitte $l_1, l_2, \cdots l_\sigma$ zerschnittenen Fläche $\overline{T}$ (Fig. 2), so ist jeder Zweig desselben innerhalb $\overline{T}$ eindeutig definirt, und $\eta(x)$ erleidet, wenn x den Querschnitt $l_\varkappa$ in positivem Sinne (d. h von der positiven zur negativen Seite von $l_\varkappa$ gehend) überschreitet, die Substitution $A_\varkappa$, die wir uns in der canonischen Form

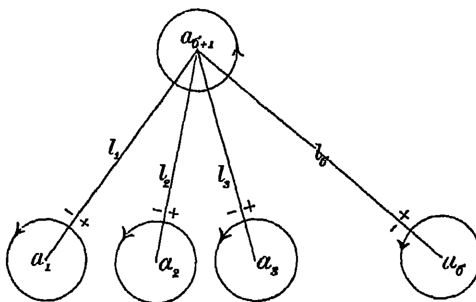


Fig 2

$$(5) \qquad \frac{A_\varkappa \eta - \lambda_\varkappa}{A_\varkappa \eta - \mu_\varkappa} = e^{2\pi i \delta_\varkappa} \frac{\eta - \lambda_\varkappa}{\eta - \mu_\varkappa},$$

beziehungsweise

$$(6) \qquad \frac{1}{A_\varkappa \eta - \lambda_\varkappa} = \frac{1}{\eta - \lambda_\varkappa} + \gamma_\varkappa$$

geschrieben denken. Im Falle (5) ist

$$\delta_\varkappa = r_{\varkappa 1} - r_{\varkappa 2}$$

die Differenz der Wurzeln der zu $a_\varkappa$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, im Falle (6) ist

$$r_{\varkappa 1} - r_{\varkappa 2} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \quad \sigma)$$

In ähnlicher Weise bezeichnen wir auch die dem Umlaufe um $a_{\sigma+1} = \infty$ entsprechende Substitution mit $A_{\sigma+1}$, so dass also

$$\delta_{\sigma+1} = r_1 - r_2$$

die Differenz der Wurzeln der zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung bedeutet, wenn die Substitution $A_{\sigma+1}$ nicht parabolisch ist

Denken wir uns das durch den Integralquotienten $\eta(x)$ gegebene analytische Gebilde (η, x) in der realen vierfach ausgedehnten ebenen Mannigfaltigkeit R_4 und projiciren dasselbe auf die η-Ebene, so wird diese Projection einen zweifach ausgedehnten Theil der η-Ebene einfach oder mehrfach überdecken. Wir werden jeden Punkt dieser Projection besonders betrachten und erhalten auf diese Weise eine über einen zweifach ausgedehnten Theil der η-Ebene ausgebreitete, im Allgemeinen mehrblättrige Fläche F, auf welcher x eine eindeutige Function des Ortes ist. Fixiren wir einen bestimmten Zweig $\eta(x)$ des Integralquotienten, so ist dieser innerhalb $\overline{T}$ eindeutig; lassen wir nun x die Begrenzung von $\overline{T}$ durchlaufen, indem wir also z. B. x von a_1 ausgehend auf dem positiven Ufer des Querschnittes l_1 bis nach $a_{\sigma+1}$, dann auf dem negativen Ufer von l_2 nach a_2, dann auf dem positiven Ufer von l_2 nach $a_{\sigma+1}$ und in dieser Weise fortfahrend endlich von $a_{\sigma+1}$ auf dem negativen Ufer von l_1 nach a_1 zurück führen, so beschreibt $\eta(x)$ eine in sich selbst zurückkehrende Linie, die einen gewissen Bereich F_0 der Fläche F begrenzt Dieser Bereich ist die eindeutig conforme Abbildung der Fläche $\overline{T}$, er ist also ebenso wie diese einfach zusammenhängend.

Die Punkte der Begrenzung von F_0 gehören entweder der Fläche F an oder sind Grenzstellen der durch die Punkte von F gebildeten Punktmenge. Bezeichnen wir mit $s_\varkappa'$ die Gesammtheit der $\eta(x)$-Werthe, die den x Punkten des positiven, mit $s_\varkappa$ die Gesammtheit der $\eta(x)$-Werthe, die den x Punkten des negativen Ufers von $l_\varkappa$ entsprechen, so liegen die Stücke $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$ der Begrenzung von F_0 für $\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma$ ganz auf der Fläche F, wenn wir die Punkte $a_\varkappa$, $a_{\sigma+1}$, die den Querschnitt $l_\varkappa$ begrenzen, den Ufern desselben nicht hinzufügen.

Wenn dann der reale Theil von $\delta_\varkappa$ nicht verschwindet, also positiv ist, wie wir voraussetzen können, oder wenn die Substitution $A_\varkappa$ eine parabolische ist, so schliessen sich die Stücke $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$ in dem Doppel-

punkte $\lambda_\varkappa$ der Substitution $A_\varkappa$ zusammen; dieser Doppelpunkt gehört aber nur dann der Fläche F wirklich an, wenn $\delta_\varkappa$ eine reale rationale Zahl ist. Wenn $\delta_\varkappa$ complex, also

$$\delta_\varkappa = \delta_\nu' + i\delta_\varkappa'', \quad \delta_\varkappa' > 0$$

ist, so ist in der Umgebung von $x = a_\nu$ (vergl. Nr. 203, S. 282)

$$\frac{\eta - \lambda_\varkappa}{\eta - \mu_\varkappa} = (t - a_\varkappa)^{\delta_\varkappa}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1(t - a_\varkappa) + \cdot \quad),$$

also wenn wir

$$t - a_\nu = re^{\varphi i}$$

setzen,

$$\frac{\eta - \lambda_\varkappa}{\eta - \mu_\varkappa} = r^{\delta_\varkappa} e^{-\delta_\varkappa'' \varphi} e^{(\delta_\varkappa' \varphi + \delta_\varkappa'' \log r) i}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1(t - a_\varkappa) + \quad \cdot \cdot).$$

Wenn also t längs $l_\varkappa$, d. h mit einem bestimmten Argumente in $a_\varkappa$ einrückt, so wird der absolute Betrag der Grösse

$$\frac{\eta - \lambda_\varkappa}{\eta - \mu_\varkappa}$$

gleich Null, aber das Argument derselben beliebig gross; in diesem Falle sind also $s_\varkappa$ und $s_\varkappa'$ in der Nähe von $\lambda_\varkappa$ spiralförmig gewunden. Man kann bewirken, dass $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$ sich mit bestimmtem Argumente dem Punkte $\lambda_\varkappa$ annähern, indem man den Querschnitt $l_\varkappa$ von $a_\varkappa$ nicht mit bestimmtem Argumente ausgehen, sondern ihn sich um diesen Punkt spiralförmig winden lässt.

Wenn der reale Theil $\delta_\varkappa'$ von $\delta_\varkappa$ verschwindet, d. h. wenn $A_\varkappa$ eine hyperbolische Substitution ist, so ist der Bereich F_0 an der Stelle $\lambda_\varkappa$ nicht geschlossen, sondern windet sich (vergl. Nr. 203, S 283) bandförmig um die Punkte $\lambda_\varkappa$, $\mu_\varkappa$ herum.

Aehnliche Betrachtungen gelten für den Doppelpunkt $\lambda_{\sigma+1}$ der Substitution $A_{\sigma+1}$, in welchem sich, wenn die Substitution $A_{\sigma+1}$ keine hyperbolische ist, die Begrenzungsstücke s_σ' und s_1 zusammenschliessen, und ebenso für die entsprechenden Doppelpunkte

$$\lambda_{\sigma+1}', \ \lambda_{\sigma+1}'', \ \cdots \ \lambda_{\sigma+1}^{(\sigma)}$$

der Substitutionen

$$A_1 A_{\sigma+1} A_1^{-1}, \quad (A_2 A_1) A_{\sigma+1} (A_2 A_1)^{-1}, \quad \cdot \quad (A_\sigma \quad \cdot A_1) A_{\sigma+1} (A_\sigma \ \cdot \ A_1)^{-1},$$

die beziehungsweise die gemeinsame Grenze der Stücke s_1' und s_2, s_2' und s_3, $\cdot \quad \cdot$ s_σ' und s_1 bilden, und von denen vermöge der Beziehung (1) der letzte

$$\lambda_{\sigma+1}^{(\sigma)} = \lambda_{\sigma+1}$$

ist.

Wir nennen im Folgenden die Punkte

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdot \lambda_\sigma, \lambda_{\sigma+1}, \lambda'_{\sigma+1}, \cdots \lambda^{(\sigma-1)}_{\sigma+1}$$

die Ecken, die Stücke

$$s_1, s_1', s_2, s_2', \cdot s_\sigma, s_\sigma'$$

die Seiten des Bereiches F_0 und sagen von der Ecke $\lambda_\varkappa$, wie entspräche dem Punkte $x = a_\nu$, von den Ecken

$$\lambda_{\sigma+1}, \lambda'_{\sigma+1}, \cdot\cdot \lambda^{(\sigma-1)}_{\sigma+1},$$

sie entsprächen dem Punkte $x = a_{\sigma+1} = \infty$.

Da die Function $\eta(x)$, wenn x den Querschnitt $l_\varkappa$ im positiven Sinne überschreitet, die Substitution $A_\varkappa$ erfährt, so gehen die η-Werthe, die x-Punkten des positiven Ufers von $l_\varkappa$ entsprechen, aus den η-Werthen, die den correspondirenden x-Punkten des negativen Ufers entsprechen, durch Anwendung der Substitution $A_\varkappa$ hervor; wir erhalten demnach die Punkte der Seite $s_\varkappa'$, indem wir auf die Punkte von $s_\varkappa$ die Substitution $A_\varkappa$ anwenden; wir schreiben dies kurz

$$s_\varkappa' = A_\varkappa s_\varkappa$$

und sagen, s_ν' gehe durch die Substitution $A_\varkappa$ aus $s_\varkappa$ hervor.

I Es sind also die 2σ Seiten des Bereiches F_0 einander durch die projectiven Substitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_\sigma,$$

die man als die projectiven Fundamentalsubstitutionen der Differentialgleichung (A_2) bezeichnen kann, zugeordnet.

209 Die Winkelsumme bei einem Cyklus von Ecken. Andere Zerschneidung der Ebene der unabhängigen Variabeln.

Seien nun $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$ zwei Seiten, die im Punkte $\lambda_\varkappa$ zusammenstossen. Wenn wir uns den Querschnitt $l_\varkappa$ als stetig verlaufende Curve denken, die in jedem Punkte eine bestimmte Tangente hat, so wird das Gleiche auch von den Curvenzügen $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$ gelten, da diese ja die conformen Abbildungen von $l_\varkappa$ durch eine monogene Function $\eta(x)$, beziehungsweise $A_\varkappa\eta(x)$ und alle Punkte von $l_\varkappa$ reguläre Stellen dieser monogenen Functionen sind. Betrachten wir dagegen die beiden dem Punkte $\lambda_\varkappa$ unendlich benachbarten Elemente der Curven $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$, wir bezeichnen dieselben als geometrische Quantitäten aufgefasst durch

$$\varepsilon_\varkappa, \varepsilon_\varkappa',$$

so ist der Winkel, unter welchem sich $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$ im Punkte $\lambda_\varkappa$ treffen, durch die Differenz

$$\sphericalangle (s_\varkappa', s_\gamma) = \operatorname{Arg} \varepsilon_\varkappa' - \operatorname{Arg} \varepsilon_\varkappa$$

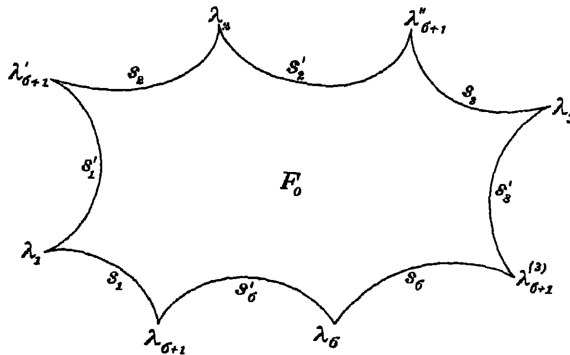


Fig 8

gegeben. Nun ist aber

$$\frac{\varepsilon_\varkappa'}{\varepsilon_\varkappa} = \left(\frac{dA_\varkappa \eta}{d\eta}\right)_{\eta=\lambda_\gamma},$$

also nach den Gleichungen (4) und (7) der Nr. 199 (S. 268, 269)

$$\frac{\varepsilon_\varkappa'}{\varepsilon_\varkappa} = e^{2\pi i \delta_\varkappa},$$

oder

$$\frac{\varepsilon_\varkappa'}{\varepsilon_\varkappa} = 1,$$

je nachdem die Substitution $A_\varkappa$ von der Form (5) oder (6) ist. Zerlegen wir also $\delta_\varkappa$ in seinen realen und imaginären Theil

$$\delta_\varkappa = \delta_\varkappa' + i\delta_\varkappa'',$$

so ist für den Fall einer nicht parabolischen Substitution $A_\varkappa$

$$\sphericalangle (s_\varkappa', s_\varkappa) = 2\pi\delta_\varkappa',$$

für den Fall einer parabolischen Substitution

$$\sphericalangle (s_\varkappa', s_\varkappa) = 0.$$

Betrachten wir ferner die in den Punkten

$$\lambda_{\sigma+1}', \ \lambda_{\sigma+1}'', \ \cdots \ \lambda_{\sigma+1}$$

zusammenstossenden Bogenelemente der Seiten von F_0 und bezeichnen mit $\varepsilon_{\varkappa+1}$ das dem Punkte $\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa)}$ unendlich benachbarte Element von $s_{\varkappa+1}$, mit $\varepsilon_\varkappa'$ das dem Punkte $\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa)}$ unendlich benachbarte Element von $s_\varkappa'$, so ist

$$\sphericalangle(s_2, s_1') = \text{Arg}\,\varepsilon_2 - \text{Arg}\,\varepsilon_1',$$
$$\sphericalangle(s_3, s_2') = \text{Arg}\,\varepsilon_3 - \text{Arg}\,\varepsilon_2',$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\qquad\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$\sphericalangle(s_1, s_\sigma') = \text{Arg}\,\varepsilon_1 - \text{Arg}\,\varepsilon_\sigma',$$

also ist die Summe dieser Winkel

$$\sum_{\varkappa=1}^{\sigma}(s_{\nu+1}, s_\varkappa') = \sum_{\varkappa=1}^{\sigma}(\text{Arg}\,\varepsilon_\varkappa - \text{Arg}\,\varepsilon_\varkappa'),$$

wo $s_{\sigma+1} = s_1$ zu nehmen ist

Nun haben wir aber

$$\frac{\varepsilon_\varkappa}{\varepsilon_\varkappa'} = \left(\frac{d\eta}{dA_\varkappa\eta}\right)_{\eta=\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa-1)}} = \left(\frac{dA_\varkappa^{-1}\eta}{d\eta}\right)_{\eta=\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa)}},$$

und da

$$\lambda_{\sigma+1}^{(\nu)} = A_\varkappa \cdots A_2 A_1 \lambda_{\sigma+1}$$

ist, so können wir setzen

$$\frac{\varepsilon_\varkappa}{\varepsilon_\varkappa'} = \left[\frac{d(A_{\varkappa-1} \quad A_1\eta)}{d(A_\varkappa A_{\varkappa-1} \quad A_1\eta)}\right]_{\eta=\lambda_{\sigma+1}};$$

hieraus folgt aber, mit Rücksicht auf die Gleichung (1),

$$\prod_{\varkappa=1}^{\sigma}\frac{\varepsilon_\varkappa}{\varepsilon_\varkappa'} = \left[\frac{d\eta}{d(A_\sigma \quad A_1\eta)}\right]_{\eta=\lambda_{\sigma+1}} = \left[\frac{dA_{\sigma+1}\eta}{d\eta}\right]_{\eta=\lambda_{\sigma+1}}$$

Setzen wir also

$$\delta_{\sigma+1} = \delta_{\sigma+1}' + i\delta_{\sigma+1}'',$$

so ist, wenn $A_{\sigma+1}$ von der Form (5) ist,

$$\sum_{\varkappa=1}^{\sigma}(s_{\varkappa+1}, s_\varkappa') = 2\pi\delta_{\sigma+1}',$$

und wenn $A_{\sigma+1}$ eine parabolische Substitution ist,

$$\sum_{\varkappa=1}^{\sigma}(s_{\varkappa+1}, s_\varkappa') = 0.$$

Um das erlangte Resultat in eleganter Form aussprechen zu können führen wir eine von Herrn Poincaré herrührende Bezeichnung ein, die später noch vielfach verwerthet werden wird.

Wir sagen nämlich von den Ecken des Bereiches F_0, die einem und demselben der Punkte

$$a_1,\; a_2,\; \cdot\cdot\; a_\sigma,\; a_{\sigma+1}$$

entsprechen, sie bildeten einen Cyklus Es bilden also dann die Ecken

$$\lambda_{\sigma+1}, \lambda'_{\sigma+1}, \ldots \lambda^{(\sigma-1)}_{\sigma+1}$$

zusammengenommen und jede der übrigen Ecken

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\sigma$$

für sich je einen Cyklus Aus den vorhergehenden Erörterungen ergiebt sich dann der Satz:

II. Die Summe der Winkel, unter denen sich die Seiten des Bereiches F_0 in den einen Cyklus bildenden Ecken schneiden, ist gleich 2π multiplicirt mit dem realen Theile der Differenz der Wurzeln der zu demjenigen singulären Punkte von (A_2) gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, dem die Ecken jenes Cyklus entsprechen.

Durch die beiden Sätze I, II ist die Natur des Bereiches F_0, soweit dieselbe durch die Differentialgleichung, beziehungsweise durch die Gruppe ϑ bestimmt ist, vollkommen charakterisirt. Die sonstige gestaltliche Beschaffenheit von F_0 hängt wesentlich von der Art der Zerschneidung der x-Ebene, beziehungsweise der durch Aussonderung der Punkte $a_1, a_2, \ldots a_\sigma, a_{\sigma+1}$ entstehenden Fläche T ab.

Zunächst ist klar, dass wir die Gestalt der Seiten von F_0 stetig variiren können, indem wir die Gestalt der Querschnitte $l_1, l_2, \cdots l_\sigma$ stetig sich ändern lassen Wir können aber auch die Fläche T durch ein anderes Schnittsystem in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandeln und dadurch eine ganz verschiedene Vertheilung der Ecken und Seiten von F_0 erhalten.

Für viele Untersuchungen sehr zweckmässig ist die folgende Zerschneidung der Fläche T. Wir legen durch die sämmtlichen singulären Punkte

$$a_1, a_2, \ldots a_\sigma, a_{\sigma+1}$$

einen in sich zurücklaufenden Schnitt l und bezeichnen z B. dasjenige Ufer desselben, welches zur Linken liegt, wenn die Punkte a_i in der angegebenen Reihenfolge passirt werden, als das positive, ebenso den durch das positive Ufer des Schnittes begrenzten Theil der Fläche T als das positive oder positiverseits gelegene Gebiet T_1, den anderen Theil von T als das negative Gebiet T_2 Dann ist der Zweig $\eta(x)$ des Integralquotienten innerhalb T_1 eindeutig und kann nach T_2 hin fortgesetzt werden, wenn wir den Schnitt l in irgend einem Punkte überschreiten Je nachdem die Ueberschreitung in Punkten erfolgt, die den verschiedenen durch die Punkte $a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$ begrenzten Abtheilungen von l angehören, wird natürlich der Werth von $\eta(x)$, den wir den Punkten von T_2 zuzuordnen haben, ein anderer sein.

Denken wir uns z. B das Gebiet T_2 mit T_1 längs des Theiles $(a_{\sigma+1}, a_1)$ von l vereinigt, d. h betrachten wir nur den von a_1 bis $a_{\sigma+1}$ reichenden Theil $\bar{l}$ des Schnittes l als bestehend, so können wir die so entstehende Fläche $T_1 + T_2 = \bar{T}'$ wieder auf die Fläche F abbilden.

Bei der durch die Fig. 4 angedeuteten Lage wird dann ein Punkt auf der negativen Seite des Querschnittstückes $(a_\varkappa, a_{\varkappa+1})$ aus dem correspondirenden Punkte η auf der positiven Seite durch die Substitution

$$A_\varkappa A_{\varkappa-1} \cdots A_1$$

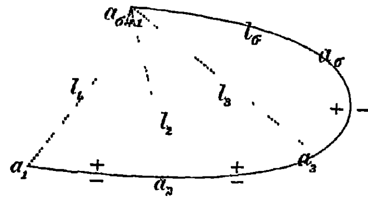


Fig 4

hervorgehen. Durchlaufen wir die Begrenzung von $\bar{T}'$, indem wir z. B. von a_1 mit dem Werthe $\eta = \lambda_1$ ausgehend auf der positiven Seite von $\bar{l}$ über $a_2, \cdots a_\sigma$ nach $a_{\sigma+1}$, und dann auf der negativen Seite von $\bar{l}$ nach a_1 zurückgehen, so beschreibt η einen Curvenzug, der einen einfach zusammenhängenden Bereich F_0' der Fläche F begrenzt (Fig. 5). Bezeichnen wir durch $\bar{s}_\varkappa$ den dem positiven, mit $\bar{s}_\varkappa'$ den dem negativen Ufer des Stückes $(a_\varkappa, a_{\varkappa+1})$ von $\bar{l}$ entsprechenden Theil jenes Curvenzuges, so ist

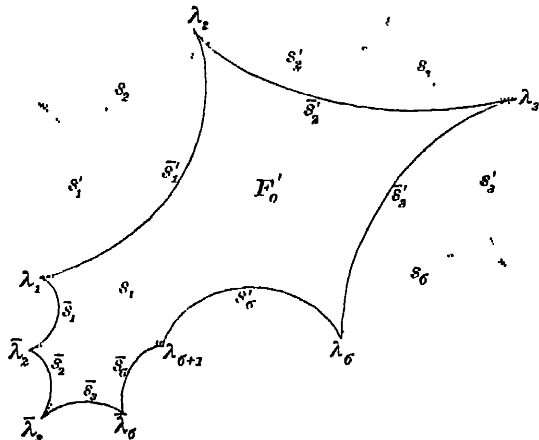


Fig 5

$$\bar{s}_\varkappa' = A_\varkappa A_{\varkappa-1} \cdots A_1 \bar{s}_\varkappa,$$

und der Punkt $\bar{\lambda}_\varkappa$, in welchem die Seiten $\bar{s}_{\varkappa-1}, \bar{s}_\varkappa$ von F_0' zusammenstossen, entspricht dem Punkte $a_\varkappa$. Man hat dann

$$\bar{\lambda}_\varkappa = A_1^{-1} A_2^{-1} \cdots A_{\varkappa-1}^{-1} \lambda_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots \sigma)$$

und

$$\bar{\lambda}_{\sigma+1} = A_1^{-1} \cdots A_\sigma^{-1} \lambda_{\sigma+1} = \lambda_{\sigma+1};$$

die Seiten $\bar{s}_{\varkappa+1}'$ und $\bar{s}_\varkappa'$ besitzen demnach den Punkt $\lambda_{\varkappa+1}$ zur gemeinschaftlichen Grenze, und $\bar{\lambda}_\varkappa$ ist ein Doppelpunkt der mit $A_\varkappa$ ähnlichen Substitution

$$A_1^{-1} \cdots A_{\varkappa-1}^{-1} A_\varkappa A_{\varkappa-1} \cdots A_1 .$$

Es bilden also die Ecken λ_1 und $\lambda_{\sigma+1}$ für sich und die Eckenpaare

$$\bar{\lambda}_2, \lambda_2; \; \bar{\lambda}_3, \lambda_3; \cdots \bar{\lambda}_\sigma, \lambda_\sigma$$

je einen Cyklus, und es besteht auch für diese Cyklen der Satz, dass die Summe der Winkel, die in den zu einem Cyklus gehörigen Ecken stattfinden, gleich ist 2π multiplicirt mit dem realen Theile der Wurzeldifferenz der zu dem, dem Cyklus entsprechenden, singulären Punkte von (A_2) gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung.

Wenn wir dem Querschnitte $\bar{l}$ den Querschnitt l_1 hinzufügen, so können wir $\bar{l} + l_1$ als den Schnitt l auffassen; es ist folglich der von den Curvenzügen

$$\bar{s}_1, \bar{s}_2, \cdots \bar{s}_\sigma, s_1$$

begrenzte Bereich der Fläche F die conforme Abbildung des Gebietes T_1 der x-Ebene.

210 Reguläre Theilung entsprechend der Gruppeneigenschaft. Erlaubte Abänderungen. Die Parameter in den Coefficienten sind eindeutige Functionen der Parameter der Monodromiegruppe.

Gehen wir wieder zu der durch die Querschnitte $l_1, l_2, \cdots l_\varrho$ begrenzten Fläche $\bar{T}$ zurück. Wenn wir den Querschnitt $l_\varkappa$ in positiver Richtung überschreiten, so verwandelt sich $\eta(x)$ in den Zweig

$$A_\varkappa \eta(x);$$

dieser ist in einer Fläche $\bar{T}_\varkappa$, die genau ebenso beschaffen ist wie $\bar{T}$ selbst, eindeutig; wir denken uns diese Fläche $\bar{T}_\varkappa$ als ein mit $\bar{T}$ congruentes Blatt, welches mit $\bar{T}$ längs des Querschnittes $l_\varkappa$ so zusammenhängt, dass das positive Ufer von $l_\varkappa$ in $\bar{T}$ an das negative Ufer von $l_\varkappa$ in $\bar{T}_\varkappa$ geheftet ist. Dieses Blatt $\bar{T}_\varkappa$ bilden wir nun wieder auf die Fläche F ab; die Abbildung $F_\varkappa$ ist ein Bereich, der aus F_0 durch Anwendung der Substitution $A_\varkappa \eta$ hervorgeht, d. h. $F_\varkappa$ ist die Abbildung von F_0 durch Vermittelung der Function $A_\varkappa \eta$. Also wird sich $F_\varkappa$ an F_0 längs der Seite $s_\varkappa'$ anschliessen und wird im übrigen mit F_0 keinen Punkt (der Fläche F) gemein haben.

Genau ebenso werden wir eine mit $\bar{T}$ congruente Fläche $\bar{T}_{-\varkappa}$ mit $\bar{T}$ so zusammenheften, dass das negative Ufer von $l_\varkappa$ in $\bar{T}$ mit dem positiven Ufer von $l_\varkappa$ in $\bar{T}_{-\varkappa}$ zusammenhängt; in diesem Blatte $\bar{T}_{-\varkappa}$ ist dann der Zweig

$$A_\varkappa^{-1}\eta$$

eindeutig, und die Abbildung von $\overline{T}_{-\varkappa}$ auf die Fläche F liefert einen Bereich $F_{-\varkappa}$, der aus F_0 durch die Substitution $A_\varkappa^{-1}\eta$ hervorgeht und sich an F_0 längs der Seite $s_\varkappa$ anschliesst

Nun kann jedes der Blätter $\overline{T}_{\pm\nu}$ in genau derselben Weise weiter benutzt werden; man überschreitet immer wieder die Querschnitte und heftet entsprechend den neu entstehenden Zweigen von $\eta(x)$ neue Blätter

$$\overline{T}_{\pm\varkappa,\pm\iota}$$

an die alten, bildet dieselben auf die Fläche F ab, erhält dadurch Bereiche

$$F_{\pm\varkappa,\pm\iota}$$

und fährt so fort, bis man entsprechend allen Zweigen von $\eta(x)$, d. h. also entsprechend allen Substitutionen der Gruppe ϑ, Blätter

$$T_{\pm\varkappa_1,\pm\varkappa_2,\ \ \pm\varkappa_\lambda}$$

erhalten hat, wo $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdot\ \cdot \varkappa_\lambda$ irgend welche der Zahlen $1, 2, \cdot\cdot\sigma$ bedeuten. Die Abbildungen dieser Blätter auf die Fläche F liefern dann Bereiche

$$F_{\pm\varkappa_1,\pm\varkappa_2,\ \ \pm\varkappa_\lambda},$$

die aus F_0 durch Anwendung der Substitution

$$A_{\varkappa_1}^{\pm 1} A_{\varkappa_2}^{\pm 1} \cdots A_{\varkappa_\lambda}^{\pm 1}\eta$$

hervorgehen, und die Gesammtheit der so entstandenen Bereiche erfüllt die Fläche F schlicht und lückenlos Analog bildet die Gesammtheit der Blätter $\overline{T}_{\pm\varkappa_1,\ \ \pm\varkappa_\lambda}$ eine zusammenhängende über der x-Ebene ausgebreitete Riemann'sche Fläche R, in welcher der Integralquotient der Differentialgleichung (A_2) eine eindeutige Function des Ortes ist, und die offenbar nichts anderes ist, als die Projection des analytischen Gebildes (x, η) auf die x-Ebene.

Die Eintheilung der Fläche F in die Bereiche

(7) $$F_{\pm\varkappa_1,\pm\varkappa_2,\ \ \pm\varkappa_\lambda}$$

besitzt die folgende Eigenschaft. Zunächst gelten für jeden dieser Bereiche die Sätze I, II, da die Abbildung durch eine projective Substitution, durch welche ja jeder dieser Bereiche aus F_0 hervorgeht, eine winkeltreue ist. Es kann also jeder solcher Bereich ebenso gut wie F_0 selbst als Ausgangsbereich gewählt werden, und wenn wir dann die Abbildungen desselben mittelst aller Substitutionen der Gruppe ϑ construiren, so erhalten wir zufolge der Gruppeneigenschaft genau die-

selbe Gebietstheilung der Fläche F wie vorher. Man drückt diese Eigenschaft der Eintheilung von F dadurch aus, dass man sagt, die Theilung sei eine reguläre.

Die Gebiete (7) sind in denjenigen Ecken, die Doppelpunkte nicht hyperbolischer Substitutionen sind, wirklich geschlossen, um Doppelpunkte hyperbolischer Substitutionen dagegen winden sich dieselben im Allgemeinen bandförmig herum, ohne dieselben jemals wirklich zu erreichen.

Wir können jetzt auch leicht die Beziehung übersehen, die zwischen den verschiedenen Zerschneidungen der Fläche T entsprechenden Bereichen F_0 besteht; nehmen wir z. B. die beiden Bereiche F_0 und F_0', die wir im Vorhergehenden untersucht hatten (vergl. Fig. 5).

Der Bereich F_0' geht aus F_0 hervor, indem man von F_0 die Theile

$$(s_1' \bar{s}_1' s_2), \quad (s_2' \bar{s}_2' s_3), \quad \cdots (s_{\sigma-1}' \bar{s}_{\sigma-1}' s_\sigma)$$

abzieht und dagegen den Bereich

(8) $$(s_1 \bar{s}_1 \bar{s}_2 \cdots \bar{s}_\sigma)$$

hinzufügt Dieser letztere Bereich kann nun in folgender Weise eingetheilt werden. Ziehen wir die Linie

$$\bar{s}_2 = A_1^{-1} s_2,$$

die die Punkte $\bar{\lambda}_2$, $\lambda_{\sigma+1}$ verbindet, ferner die Linie

$$\bar{\bar{s}}_3 = A_1^{-1} A_2^{-1} s_3,$$

die die Punkte $\bar{\lambda}_3$, $\lambda_{\sigma+1}$ verbindet, u. s. w Dann geht der Bereich

$$(s_1 \bar{s}_1 \bar{s}_2) \quad \text{aus} \quad (s_1' \bar{s}_1' s_2)$$

hervor durch die Substitution A_1^{-1}; der Bereich

$$(\bar{s}_2 \bar{s}_2 \bar{\bar{s}}_3) \quad \text{aus} \quad (s_2' \bar{s}_2' s_3)$$

durch die Substitution $A_1^{-1} A_2^{-1}$, u. s. w.; endlich der Bereich

$$(\bar{\bar{s}}_{\sigma-1} \bar{s}_{\sigma-1} \bar{s}_\sigma) \quad \text{aus} \quad (s_{\sigma-1}' \bar{s}_{\sigma-1}' s_\sigma)$$

durch die Substitution

$$A_1^{-1} A_2^{-1} \cdots A_{\sigma-1}^{-1}.$$

Die Bereiche

$$(s_1 \bar{s}_1 \bar{\bar{s}}_2), \ (\bar{\bar{s}}_2 \bar{s}_2 \bar{\bar{s}}_3), \ \cdots \ (\bar{\bar{s}}_{\sigma-1} \bar{s}_{\sigma-1} \bar{s}_\sigma)$$

zusammengenommen bilden aber den Bereich (8).

Der Bereich F_0' geht also aus F_0 dadurch hervor, dass man von F_0 gewisse Theile wegschneidet und dafür Ebenenstücke, die aus diesen weggeschnittenen Theilen durch Substitutionen der Gruppe ϑ hervorgehen, hinzufügt.

Denken wir uns allgemein einen Theil φ_0 des Bereiches F_0; sei S eine beliebige Substitution der Gruppe ϑ und F_S der aus F_0 durch Anwendung von S hervorgehende Bereich; ebenso sei

$$\varphi_S = S\varphi_0.$$

Bedeute ferner Σ eine bestimmte Substitution von ϑ, und sei

$$\Sigma S = S_1.$$

Wir wollen dann von jedem Bereiche F_S das Stück φ_S abziehen und statt dessen das Stück φ_{S_1} hinzufügen; sei dann

$$F_S' = F_S - \varphi_S + \varphi_{S_1}.$$

Die Gesammtheit der Bereiche F_S' wird dann auch wieder die ganze Fläche F schlicht und lückenlos bedecken, d. h. auch die so entstehende Eintheilung der Fläche kann die Theilung durch die Bereiche F_S vollständig ersetzen. Wenn der Bereich φ_0 an eine (oder mehrere) der Seiten von F_0 stösst, und wenn der Bereich φ_Σ an eine (oder mehrere) der Seiten von $F_0 - \varphi_0$ von aussen angrenzt, so ist offenbar jeder der Bereiche F_S' ebenso wie F_0 selbst ein einfach zusammenhängender; diese Eigenschaft der Bereiche F_S' ist aber keine unumgänglich erforderliche, wenn wir auch im Folgenden in der Regel nur so beschaffene Theilungen der Fläche F in's Auge fassen werden.

Mit den Bereichen F_S' kann man nun wieder genau ebenso verfahren und kann auf diese Weise von der ursprünglichen Theilung in die Bereiche F_S zu jeder anderen Theilung der Fläche F, die der Differentialgleichung oder der Gruppe ϑ entspricht, übergehen.

Wir sagen von einer auf die angegebene Art vorgenommenen Abänderung des Bereiches F_0, es sei eine erlaubte Abänderung, und sprechen den Satz aus:

Jedem Bereiche, der aus F_0 durch erlaubte Abänderungen hervorgeht, entspricht eine reguläre Theilung der Fläche F in Bereiche, die aus dem abgeänderten Bereiche durch die Substitutionen der Gruppe ϑ hervorgehen, und jede solche Theilung leistet für das Studium der Gruppe ϑ und der Differentialgleichung (A_2) dasselbe, wie die aus dem Bereiche F_0 entspringende.

Der Bereich F_0' geht aus F_0 durch erlaubte Abänderungen hervor.

Es ist nun von der grössten Wichtigkeit, dass wir uns darüber klar werden, dass der Bereich F_0 und die aus demselben entspringende Theilung der Fläche F, ja dass die Natur dieser Fläche selbst ganz allein von der projectiven Gruppe ϑ abhängt.

Was zunächst die Fläche F betrifft, so wissen wir nach den Ergebnissen des zweiten und dritten Kapitels, dass sowohl die Begrenzung von F als auch ihre Windungspunkte durch die Gruppe ϑ bestimmt werden. Denn da wir das Auftreten scheinbar singulärer Stellen für die Differentialgleichung (A_2) ausgeschlossen haben, so kann sich die Function x von η nur an solchen Stellen verzweigen, die den singulären Punkten $a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$ entsprechen, d. h. nur in Doppelpunkten von Substitutionen der Gruppe, und in diesen ist auch die Art der Verzweigung durch die betreffende Substitution vollkommen bestimmt. Für den Bereich F_0 sind die Ecken als Doppelpunkte gewisser Substitutionen von ϑ, die Winkelsummen der Cyklen, die diese Ecken bilden, durch die Multiplicatoren jener Substitutionen bestimmt, endlich ist die Zuordnung der Seitenpaare von F_0 auch durch jene Substitutionen gegeben.

Wenn wir also eine zweite von (A_2) verschiedene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(A_2') \qquad \frac{d^2 z}{d\xi^2} + \pi_2 z = 0$$

haben, die der Fuchs'schen Classe angehört, keine scheinbar singulären Stellen besitzt, und für welche ein Integralquotient ζ existirt, dessen Monodromiegruppe auch durch die Gruppe ϑ dargestellt wird, so würde für diese Differentialgleichung die Fläche F, der Bereich F_0 und die aus demselben entspringende Theilung dieser Fläche genau dieselbe Bedeutung haben wie für die Differentialgleichung (A_2)

Fassen wir nun die Eigenschaften von F und F_0 zusammen, so können wir sagen:

Auf F ist die unabhängige Variable der Differentialgleichung (A_2) oder (A_2') eine eindeutige Function des Ortes. Innerhalb des Bereiches F_0, der die eindeutig conforme Abbildung der durch die Querschnitte $l_1, l_2, \cdots l_\sigma$ zerschnittenen x-Ebene darstellt, nimmt die Function x von η und ebenso die Function ξ von ζ jeden Werth einmal und nur einmal an und verhält sich wie eine rationale Function; auf der Begrenzung von F_0 hat sowohl die Function x von η als auch die Function ξ von ζ in correspondirenden Punkten der Seiten $s_\varkappa$ und $s_\varkappa'$ gleiche Werthe.

Etwas einfacher lässt sich dies noch aussprechen, wenn wir eine von den Herren Klein und Poincaré eingeführte Vorstellungsweise benutzen.

Denken wir uns nämlich den Bereich F_0 aus der Fläche F ausgeschnitten und nehmen wir an, dass sich die Seiten $s_\varkappa, s_\varkappa'$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots \sigma)$

von F_0 durch Biegung und Dehnung so deformiren lassen, dass sie einander völlig congruente Curvenstücke werden, und dass, wenn man nach der Deformation $s_\varkappa$ auf s_ν' legt, jeder Punkt von $s_\varkappa$ gerade auf den aus diesem Punkte durch die Substitution $A_\varkappa$ hervorgehenden Punkt von $s_\varkappa'$ fällt. Biegen wir dann den so deformirten Bereich F_0 derart zusammen, dass die Seiten $s_\varkappa$, s_ν' für $\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma$ zur Deckung kommen, so vereinigen sich diejenigen Ecken, die zu einem Cyklus gehören, zu einem Punkte, und F_0 wird eine geschlossene Fläche $\overline{F}_0$, die wir uns von denjenigen $(\sigma + 1)$ Punkten, die früher Ecken waren, begrenzt denken. Diese geschlossene Fläche ist im Sinne der Analysis situs (wie sich Riemann ausdrückt) der Fläche T, die aus der z-Ebene durch Aussonderung der Punkte $a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$ hervorgeht, völlig aequivalent.

Es ist dann x eine eindeutige Function des Ortes auf ieser geschlossenen Fläche $\overline{F}_0$ (darin liegt auch schon der Ausdruck dessen, dass x in correspondirenden Punkten der früheren Seiten $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$ dieselben Werthe annimmt), die sich für jeden Punkt, der nnerhalb $\overline{F}_0$ liegt, verhält wie eine rationale Function, und ie auf dieser Fläche auch jeden Werth nur ein einziges Mal nnimmt Genau dasselbe gilt auch von $\mathfrak{x}$.

Sei nun allgemein $\mathfrak{X}$ eine Function von η, die auf der geschlossenen läche $\overline{F}_0$ eindeutig ist und sich innerhalb von $\overline{F}_0$ wie eine rationale unction verhält. Dann ist $\mathfrak{X}$ eine eindeutige Function von x, die sich ir jeden Werth von x wie eine rationale Function verhält, also ist $\mathfrak{X}$ ne rationale Function von x (vergl für eine genauere Ausführung es Beweises die analoge Betrachtung in der Nr 215)

Nehmen wir also in den beiden Differentialgleichungen (A_2), (A_2')

$$\eta = \zeta,$$

ist $\mathfrak{x}$ rational in x und x rational in $\mathfrak{x}$; es besteht demnach zwischen und $\mathfrak{x}$ eine Gleichung von der Form

$$\mathfrak{a}x\mathfrak{x} + \mathfrak{b}x + \mathfrak{c}\mathfrak{x} + \mathfrak{d} = 0, \qquad)$$

o die $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ Constanten bedeuten.

Wenn die Differentialgleichung (A_2') überdies so gewählt ist, dass r $\eta = \lambda_1$ $\mathfrak{x} = 0$, für $\eta = \lambda_2$ $\mathfrak{x} = 1$ und für $\eta = \lambda_{\sigma+1}$ $\mathfrak{x} = \infty$ ist, folgt aus (9)

$$x = \mathfrak{x},$$

h. die Differentialgleichungen (A_2) und (A_2') sind identisch.

Wir haben also das Ergebniss:

Die Differentialgleichung zweiter Ordnung (A_2), die der ichs'schen Classe angehört, keine scheinbar singulären

Stellen hat, und für welche drei der (wirklich) singulären Stellen in die Punkte 0, 1, ∞ fallen, ist durch Angabe der projectiven Monodromiegrupppe ϑ ihrer Integralquotienten vollkommen und eindeutig bestimmt Es sind also die in den Coefficienten von (A_2) auftretenden constanten Parameter eindeutige Functionen der Parameter

(10) $$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_N, \quad N = 3\sigma - 3,$$

von denen die Gruppe ϑ wesentlich abhängt.

211. **Fall realer Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen. Geometrische Darstellung der Parameter der Gruppe. Bestimmung der Differentialgleichung, wenn die Gruppe gegeben ist. Fundamentalbereich. Eigenschaften der die Gruppe zulassenden Functionen. Fortsetzung.**

Der Bereich F_0 ist, wenn wir von erlaubten Abänderungen absehen, durch die Gruppe ϑ und diese auch umgekehrt durch den Bereich F_0 vollkommen bestimmt, da ja die Substitutionen, welche die Seitenpaare $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$ von F_0 in einander überführen, eine Basis der Gruppe ϑ ausmachen. Der Bereich F_0 hängt also wesentlich von genau ebenso vielen Parametern ab wie die Gruppe ϑ, d. h von den $3\sigma - 3$ Parametern (10). Diese Parameter treten in dem allgemeinen Falle, den wir bisher betrachtet haben, nicht deutlich in Evidenz, und es bietet bis jetzt noch nicht völlig überwundene Schwierigkeiten dar, die Abhängigkeit des Bereiches F_0 von den Parametern der Gruppe ϑ ganz allgemein festzustellen. In einem besonders wichtigen Specialfalle lässt sich jedoch diese Abhängigkeit in völlig befriedigender Weise darlegen, in dem Falle nämlich:

wo die Grössen $\delta_\varkappa$ reale Zahlen sind.

Wir wollen diesen Fall jetzt genauer untersuchen, setzen also voraus, dass in der Differentialgleichung (A_2) die Differenzen der Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen reale (nicht negative) Zahlen sind, oder, was dasselbe heisst, dass sich unter den Substitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_\sigma, A_{\sigma+1}$$

nur elliptische und parabolische, dagegen keine hyperbolischen und loxodromischen befinden.

Wir behaupten dann: Durch Angabe der 2σ Ecken

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_\sigma; \lambda_{\sigma+1}, \lambda_{\sigma+1}', \cdots \lambda_{\sigma+1}^{(\sigma-1)}$$

und der zu den $(\sigma+1)$ Cyklen gehörigen Winkelsummen ist

der Bereich F_0 und damit die Gruppe ϑ vollkommen und eindeutig bestimmt.

In der That kennen wir durch die $\sigma + 1$ Winkelsummen für jede der Substitutionen $A_1, A_2, \quad A_\sigma, A_{\sigma+1}$ den Multiplicator

(11) $$K_\varkappa = e^{2\pi i \delta_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \quad \sigma+1),$$

falls dieselbe elliptisch ist, oder wir wissen, falls die betreffende Winkelsumme Null beträgt, dass die zugehörige Substitution parabolisch ist Ferner kennen wir von jeder jener $\sigma + 1$ Substitutionen einen Doppelpunkt, und endlich wissen wir, dass

(12) $$\lambda'_{\sigma+1} = A_1 \lambda_{\sigma+1}, \quad \lambda''_{\sigma+1} = A_2 \lambda'_{\sigma+1}, \cdots, \lambda_{\sigma+1} = A_\sigma \lambda_{\sigma+1}^{(\sigma-1)}$$

ist. Wenn also z B. A_1 eine elliptische Substitution wäre, so hätten wir die Gleichungen

(13) $$\begin{cases} \dfrac{A_1\eta - \lambda_1}{A_1\eta - \mu_1} = K_1 \dfrac{\eta - \lambda_1}{\eta - \mu_1}, \\ \dfrac{A_1\eta - \lambda_1}{A_1\eta - \lambda'_{\sigma+1}} = L_1 \dfrac{\eta - \lambda_1}{\eta - \lambda_{\sigma+1}}, \end{cases}$$

in denen $\lambda_1, K_1, \lambda_{\sigma+1}, \lambda'_{\sigma+1}$ bekannt, dagegen μ_1, L_1 unbekannt sind. Berechnet man aus beiden Gleichungen $A_1\eta$, so müssen die beiden so gefundenen Ausdrücke für jeden Werth von η übereinstimmen; hieraus findet man durch einfache Rechnung

$$\mu_1 = \frac{\lambda'_{\sigma+1}(\lambda_1 - \lambda_{\sigma+1})K_1 - \lambda_{\sigma+1}(\lambda_1 - \lambda'_{\sigma+1})}{(\lambda_1 - \lambda_{\sigma+1})K_1 - (\lambda_1 - \lambda'_{\sigma+1})},$$

damit ist also A_1 bestimmt Wäre A_1 eine parabolische Substitution

$$\frac{1}{A_1\eta - \lambda_1} = \frac{1}{\eta - \lambda_1} + \gamma_1,$$

so ergäbe sich, indem man $\eta = \lambda_{\sigma+1}$, also $A_1\eta = \lambda'_{\sigma+1}$ setzt,

$$\gamma_1 = \frac{1}{\lambda'_{\sigma+1} - \lambda_1} - \frac{1}{\lambda_{\sigma+1} - \lambda_1}.$$

Aehnlich bestimmen sich die $A_2, A_3, \cdots A_{\sigma+1}$.

Zufolge der Gleichung (1) besteht zwischen den $3\sigma + 1$ Grössen

(14) $$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_\sigma; \lambda_{\sigma+1}, \lambda'_{\sigma+1}, \cdots \lambda_{\sigma+1}^{(\sigma-1)}; K_1, K_2, \cdots K_{\sigma+1}$$

noch eine Beziehung, so dass also nur 3σ derselben willkürlich sind. Diese 3σ Grössen können dann als die Parameter der Gruppe ϑ angesehen werden; durch die Willkürlichkeit des Integralquotienten η gehen dann noch drei dieser Grössen ab, man kann z B. drei der $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_\sigma$ in willkürlich gewählte feste Punkte legen, so dass in der That genau $3\sigma - 3$ wesentliche Parameter übrig bleiben.

Die in den Coefficienten der Differentialgleichung (A_2) auftretenden Constanten sind also eindeutige Functionen der Grössen (14); diese eindeutigen Functionen spielen für die Differentialgleichung (A_2) eine ähnliche Rolle, wie die in der Nr. 206 (S 298) erwähnte Modulfunction für ein elliptisches Integral erster Gattung

Es entsteht nun die umgekehrte Frage, ob man auch stets eine Differentialgleichung zweiter Ordnung von der für (A_2) vorausgesetzten Beschaffenheit finden kann, falls man den Grössen (14) mit den Bedingungen des Problems verträgliche, sonst aber willkürliche Werthe beilegt, d h. mit andern Worten, wenn man den Bereich F_0 oder die Gruppe ϑ irgendwie vorschreibt

Denken wir uns also, es sei ein Bereich F_0 gegeben, der von 2σ einen zusammenhängenden Curvenzug bildenden Seiten

$$s_1, s_1', s_2, s_2', \cdots s_\sigma, s_\sigma'$$

begrenzt wird Diese σ Seitenpaare mögen durch gewisse gegebene Substitutionen $A_1, A_2, \cdots A_\sigma$, die wir als elliptische oder parabolische voraussetzen, in einander transformirt werden, und der Schnittpunkt λ_ν der Seiten $s_\varkappa$ und

$$s_\varkappa' = A_\varkappa s_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

sei ein Doppelpunkt von $A_\varkappa$, und zwar wenn die Substitution $A_\varkappa$ eine elliptische ist, derjenige, der bei der canonischen Form (5) von $A_\varkappa$ im Zähler auftritt, falls

$$0 < \delta_\varkappa < 1$$

ist. Ebenso sei der Schnittpunkt $\lambda_{\sigma+1}$ von s_1 und s_σ' ein Doppelpunkt der Substitution

$$A_{\sigma+1} = A_1^{-1} A_2^{-1} \cdots A_\sigma^{-1},$$

dann sind die Schnittpunkte $\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa)}$ von $s_\varkappa'$ und s_ν aus $\lambda_{\sigma+1}$ durch die Substitutionen $A_1 A_2 \cdots A_\varkappa$ transformirt,

$$\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa)} = A_1 A_2 \cdots A_\varkappa \lambda_{\sigma+1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots (\sigma - 1)),$$

und die im Satze II (Nr. 210, S 310) vorgesehenen Bedingungen für die Winkelsummen der Cyklen

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_\sigma, \lambda_{\sigma+1}, \lambda_{\sigma+1}', \cdots \lambda_{\sigma+1}^{(\sigma+1)}$$

sind erfüllt Wir nennen einen solchen Bereich F_0 oder einen aus demselben durch erlaubte Abänderung hervorgehenden, (wobei wir die Abänderungen stets so einrichten wollen, dass der abgeänderte Bereich auch ein zusammenhängender ist), oder endlich einen aus diesem Bereiche durch Anwendung einer beliebigen Substitution der aus den

$$A_1, A_2, \cdots A_\sigma, A_{\sigma+1}$$

als Basis gebildeten Gruppe ϑ entstehenden, nach Herrn Klein einen **Fundamentalbereich**, wohl auch ein **Fundamentalpolygon** der Gruppe ϑ (Polygon générateur bei Herrn Poincaré).

Wir fragen nach Functionen $\mathfrak{X}$ von η, die sich innerhalb des Bereiches F_0 wie rationale Functionen verhalten, d. h. für welche eine rationale Function von η so angegeben werden kann, dass die Differenz von $\mathfrak{X}$ und dieser rationalen Function innerhalb F_0 sich wie eine ganze Function verhält, und die in correspondirenden Punkten der Seiten $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$ von F_0 für $\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma$ dieselben Werthe annehmen, oder, was dasselbe heisst, die auf der aus F_0 durch Zusammenbiegen gebildeten geschlossenen Fläche $\overline{F}_0$ eindeutig sind.[1]

Denken wir uns, die Existenz dieser Functionen sei bewiesen; sei $\mathfrak{X}$ eine solche Function. Dann kennen wir $\mathfrak{X}$ zunächst nur innerhalb des Bereiches F_0. Construiren wir die Abbildungen des Polygons F_0 mittelst aller Substitutionen der Gruppe ϑ, so werden dieselben eine gewisse, die η-Ebene oder einen Theil derselben einfach oder mehrfach überdeckende Fläche F schlicht und lückenlos erfüllen. Wir versuchen zunächst die innerhalb F_0 definirte Function $\mathfrak{X}$ in den mit F_0 längs der Seite $s_\varkappa'$ zusammenhängenden Bereich

$$F_\varkappa = A_\varkappa F_0$$

fortzusetzen.

Bedeutet η_0 eine Stelle der Seite $s_\varkappa'$, die keine Ecke ist, so entspricht derselben auf der geschlossenen Fläche $\overline{F}_0$ ein Punkt, der nicht zur Begrenzung von $\overline{F}_0$ gehört, in dessen Umgebung sich die Function $\mathfrak{X}$ folglich wie eine rationale Function verhält Wir können offenbar ohne die Allgemeinheit zu beschränken annehmen, η_0 sei auch keine Unendlichkeitsstelle für unsere Function, dann liegen auch in einer gewissen Umgebung von η_0 keine Unendlichkeitsstellen von $\mathfrak{X}$; wenn wir also einen innerhalb von F_0 gelegenen Punkt η_1 in hinreichender Nähe von η_0 betrachten, in dessen Umgebung sich die Function $\mathfrak{X}$ regulär verhält, und wir entwickeln $\mathfrak{X}$ in der Umgebung von η_1

$$\mathfrak{X}(\eta) = \mathfrak{P}(\eta \mid \eta_1), \tag{15}$$

so reicht der Convergenzkreis dieser Entwickelung jedenfalls über den Bereich F_0 hinaus, d. h es liegt ein durch ein endliches Stück $\overline{s}_\varkappa'$ der Seite $s_\varkappa'$ begrenzter Theil dieser Kreisfläche im Bereiche $F_\varkappa$. Construiren wir uns die Abbildung dieses Theiles des Convergenzbezirkes der Reihe (15) vermittelst der Substitution $A_\varkappa^{-1}\eta$, so liegt diese Abbildung φ innerhalb F_0 und hat mit der Seite $s_\varkappa$ das Stück

$$\overline{s}_\varkappa = A_\varkappa^{-1}\overline{s}_\varkappa'$$

gemein Für alle Punkte ζ von φ verhält sich die Function $\mathfrak{X}$ wie eine rationale Function, das Gleiche gilt von der durch die Gleichung (15) definirten Function

$$\mathfrak{X}(A_\varkappa \zeta) = \mathfrak{P}(A_\varkappa \zeta \mid \eta_1).$$

Für alle Punkte ζ des endlichen Stückes $\bar{s}_\varkappa$ der Seite $s_\varkappa$ haben aber zufolge der über die Function $\mathfrak{X}$ gemachten Voraussetzung die beiden Ausdrücke

$$\mathfrak{X}(\zeta) \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}(A_\varkappa \zeta \mid \eta_1)$$

denselben Werth, sie müssen folglich für alle Punkte von φ übereinstimmen. D h die durch die Gleichung (15) definirte analytische Fortsetzung der Function $\mathfrak{X}$ hat für Punkte η innerhalb des dem Bereiche $F_\varkappa$ angehörigen Theiles des Convergrenzbezirkes der Reihe (15) dieselben Werthe, wie die Function $\mathfrak{X}$ in den durch die Substitution $A_\varkappa^{-1}$ aus diesen Punkten hervorgehenden Punkten ζ des Bereiches φ

Durch weitere analytische Fortsetzung zeigt man ebenso, dass die Function $\mathfrak{X}$ für alle Punkte von $F_\varkappa$ dieselben Werthe annimmt, wie in den durch die Substitution $A_\varkappa^{-1}$ correspondirenden Punkten von F_0; allgemein kann man sagen:

Die Function $\mathfrak{X}$ lässt sich über die ganze Fläche F hin analytisch fortsetzen und sie nimmt in einem Punkte η von F, der dem Bereiche

$$F_S = SF_0,$$

wo S eine Substitution von ϑ bedeutet, angehört, denselben Werth an, wie in dem correspondirenden Punkte

$$S^{-1}\eta$$

des Bereiches F_0.

Die Function $\mathfrak{X}$ verhält sich also auf der ganzen Fläche F wie eine rationale Function und bleibt bei den Substitutionen der Gruppe ϑ ungeändert; dagegen wird sich dieselbe über die Begrenzung der Fläche F hinweg nicht analytisch fortsetzen lassen, so dass also, wenn F z. B. nicht die ganze η-Ebene überdeckt, der Existenzbereich der Function $\mathfrak{X}$ ein beschränkter ist.

Sechstes Kapitel.

212. Methode von Schwarz und Carl Neumann. Poisson'sches Integral und alternirendes Verfahren.

Die in der vorigen Nummer betrachtete Function $\mathfrak{X}$ kann im Allgemeinen innerhalb des Fundamentalbereiches F_0 jeden Werth öfter als einmal annehmen; wir wollen uns zunächst die Aufgabe stellen, die Existenz einer auf $\overline{F}_0$ eindeutigen Function z von η nachzuweisen, die innerhalb F_0 jeden Werth nur ein einziges Mal annimmt, also innerhalb F_0 auch nur einmal (von erster Ordnung) unendlich wird. Sei $\eta = \eta_\infty$ diese Unendlichkeitsstelle.

Nach dem Vorgange des Herrn Klein liefern wir diesen Existenzbeweis nach denselben Principien, mit Hülfe deren die Herren Carl Neumann und H. A. Schwarz den Beweis für die Riemann'schen Existenztheoreme, welche die Grundlage von Riemann's Theorie der Abel'schen Functionen bilden, geliefert haben.

Wir skizziren zunächst kurz das Wesen dieser Principien.

Wenn man in der Function

$$z = f(\eta)$$

ler complexen Variabeln

$$\eta = u + vi$$

len realen Theil und Coefficienten von i gesondert als Functionen der ·ealen Veränderlichen u, v betrachtet,

$$z = \varphi(u, v) + i\psi(u, v),$$

o genügen bekanntlich φ und ψ der partiellen Differentialgleichung

$$\text{I)} \qquad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0,$$

nd man hat

$$\text{II)} \qquad \psi(u, v) = \int \left(- \frac{\partial \varphi}{\partial v} du + \frac{\partial \varphi}{\partial u} dv\right),$$

ɔ dass also $\psi(u, v)$, abgesehen von einer Constanten, bestimmt ist, ʳenn man $\varphi(u, v)$ kennt. Man nennt φ und ψ complementäre ıösungen der Differentialgleichung (I).

Sei in der Ebene der complexen Variabeln η oder in einer über dieser Ebene ausgebreiteten Riemann'schen Fläche ein von einer Curve $\overline{\mathfrak{C}}$ begrenzter Bereich $\mathfrak{C}$ gegeben, so lautet das Riemann'sche Existenztheorem, soweit wir hier von demselben Gebrauch zu machen haben, wie folgt:

Man kann eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (I) finden, die auf der Begrenzung $\overline{\mathfrak{C}}$ eine vorgeschriebene stetige Folge von Werthen annimmt, innerhalb $\mathfrak{C}$ in vorgeschriebener Weise unstetig oder unendlich wird, sonst aber allenthalben im Innern von $\mathfrak{C}$ eindeutig, endlich und stetig ist.

An Stelle des von Riemann versuchten, auf das sogenannte Dirichlet'sche Princip gegründeten Beweises, haben die Herren Schwarz und Neumann einen Beweis dieses Theorems gegeben, der auf zwei Sätzen beruht

Der erste dieser Sätze rührt von Poisson her und lehrt, dass das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R, \Theta)\,\frac{R^2-\varrho^2}{R^2-2R\varrho\cos\gamma+\varrho^2}\,R\,d\Theta,$$

worin

$$\cos\gamma=\cos(\varphi-\Theta),\quad u=\varrho\cos\varphi,\quad v=\varrho\sin\varphi$$

zu nehmen ist, eine Function

$$F(u, v)=f(\varrho, \varphi)$$

der beiden realen Variabeln u, v darstellt, die innerhalb des Kreises

$$u^2+v^2=R^2$$

eindeutig, endlich und stetig ist, die partielle Differentialgleichung (I) befriedigt, und die auf der Peripherie dieses Kreises die vorgeschriebenen stetigen Werthe

$$f(R, \varphi), \qquad (0<\varphi<2\pi)$$

annimmt.

Der zweite Satz lehrt, dass, wenn die Aufgabe, eine Function zu bestimmen, die innerhalb eines gewissen Bereiches eindeutig, endlich und stetig ist, die Differentialgleichung (I) befriedigt und auf der Begrenzung stetig vorgeschriebene Werthe annimmt, für zwei Bereiche B_1, B_2 gelöst ist, welche ein gewisses Flächenstück b gemein haben, dieselbe Aufgabe auch stets gelöst werden kann für den Bereich

$$B=B_1+B_2-b,$$

der, wie sich Herr Neumann ausdrückt, durch Verschmelzung der beiden Bereiche B_1, B_2 entsteht.

Den Beweis dieses zweiten Satzes liefern die Herren **Schwarz** und **Neumann** durch das sogenannte **alternirende Verfahren**, welches im Folgenden besteht.

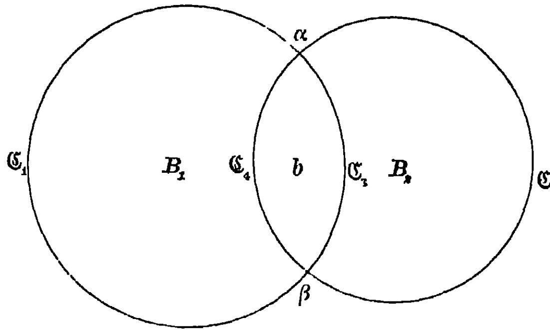


Fig 6.

Bezeichnen wir die Begrenzung des Bereiches B_1 durch $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_3$, die des Bereiches B_2 durch $\mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_4$, so dass die Begrenzung des B_1, B_2 gemeinsamen Stückes b durch $\mathfrak{C}_3 + \mathfrak{C}_4$ gegeben wird (vergl. Fig. 6), so handelt es sich darum, eine Function $F(u, v)$ zu finden, die der partiellen Differentialgleichung genügt, innerhalb des Bereiches

$$B_1 + B_2 - b = B$$

eindeutig, endlich, stetig ist und auf der Begrenzung von B, d. h. auf $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$, die vorgeschriebene stetige Werthenfolge

$$F(\mathfrak{C}_1), \text{ beziehungsweise } F(\mathfrak{C}_2)$$

annimmt. Wir sagen kurz von einer Function, die innerhalb eines Bereiches die Gleichung (I) befriedigt und eindeutig, endlich, stetig ist, sie sei eine **Potentialfunction** für diesen Bereich.

Wir denken uns dann zunächst für den Bereich B_1 eine Potentialfunction F_1 construirt, die längs $\mathfrak{C}_1$ die Werthe $F(\mathfrak{C}_1)$ und längs $\mathfrak{C}_3$ die sich in den Punkten α und β, wo $\mathfrak{C}_3$ mit $\mathfrak{C}_1$ zusammenstösst, an die Werthe $F(\mathfrak{C}_1)$ stetig anschliessende, aber sonst willkürlich vorgeschriebene stetige Werthenfolge

$$F_1(\mathfrak{C}_3)$$

annimmt. Es muss also nur

$$\lim_\alpha F_1(\mathfrak{C}_3) = \lim_\alpha F(\mathfrak{C}_1),$$
$$\lim_\beta F_1(\mathfrak{C}_3) = \lim_\beta F(\mathfrak{C}_1)$$

sein, im Uebrigen ist die stetige Werthenfolge $F_1(\mathfrak{C}_3)$ ganz beliebig Die Auffindung der Function F_1 ist zufolge der Voraussetzung, dass die Aufgabe für den Bereich B_1 lösbar sei, möglich. Die Werthe dieser Function F_1 längs $\mathfrak{C}_4$ seien $F_1(\mathfrak{C}_4)$, dann ist

$$\lim_\alpha F_1(\mathfrak{C}_4) = \lim_\alpha F_1(\mathfrak{C}_3) = \lim_\alpha F(\mathfrak{C}_1),$$

also, da die Randwerthe $F(\mathfrak{C}_1)$, $F(\mathfrak{C}_2)$ auch eine stetige Folge bilden sollen, d. h.

$$\lim_{\alpha} F(\mathfrak{C}_1) = \lim_{\alpha} F(\mathfrak{C}_2)$$

ist, auch

$$\lim_{\alpha} F_1(\mathfrak{C}_4) = \lim_{\alpha} F(\mathfrak{C}_2)$$

und ebenso

$$\lim_{\beta} F_1(\mathfrak{C}_4) = \lim_{\beta} F(\mathfrak{C}_2).$$

Wir können also für B_2 eine Potentialfunction F_2 construiren, die auf $\mathfrak{C}_2$ die Werthe $F(\mathfrak{C}_2)$, auf $\mathfrak{C}_4$ die Werthe $F_1(\mathfrak{C}_4)$ annimmt. Dann ist wieder

$$\lim_{\alpha} F_2(\mathfrak{C}_3) = \lim_{\alpha} F(\mathfrak{C}_1),$$

$$\lim_{\beta} F_2(\mathfrak{C}_3) = \lim_{\beta} F(\mathfrak{C}_1),$$

es lässt sich folglich für den Bereich B_1 eine Potentialfunction F_3 finden, die längs $\mathfrak{C}_1$ die Werthe $F(\mathfrak{C}_1)$ und längs $\mathfrak{C}_3$ die Werthe $F_2(\mathfrak{C}_3)$ annimmt. Wir bilden dann wieder eine Potentialfunction F_4 für B_2, die längs $\mathfrak{C}_2$ die Werthe $F(\mathfrak{C}_2)$ und längs $\mathfrak{C}_4$ die sich an dieselben stetig anschliessenden Werthe $F_3(\mathfrak{C}_4)$ annimmt, und fahren so fort

Es ergiebt sich auf diese Weise eine Folge von Potentialfunctionen

$$F_1, F_3, F_5, \ldots$$

für B_1 und eine Reihe ebensolcher Functionen

$$F_2, F_4, F_6, \ldots$$

für B_2, und man beweist nun, dass sich jede dieser beiden Folgen einer bestimmten Grenzfunction annähert; sei

$$\lim_{\varkappa=\infty} F_{2\varkappa+1} = F',$$

$$\lim_{\varkappa=\infty} F_{2\varkappa} = F''.$$

Dann ist F' innerhalb B_1, F'' innerhalb B_2 definirt, beide Functionen existiren folglich innerhalb b; man zeigt, dass dieselben für jeden Punkt von b übereinstimmen und dass sie innerhalb der Bereiche, wo sie definirt sind, Potentialfunctionen darstellen. Es ist folglich F' die Fortsetzung von F'' und diese beiden Functionen zusammen genommen stellen das gesuchte Potential F innerhalb B dar.

Dasselbe Verfahren führt auch zum Ziele, wenn die beiden Bereiche B_1, B_2 eine gürtelförmige Zone mit einander gemein haben; Herr Carl Neumann spricht dann von einer gürtelförmigen Verschmelzung.

Auf Grund dieser beiden Sätze lässt sich die Aufgabe, ein Potential zu finden, welches auf der Begrenzung vorgeschriebene Werthe annimmt, für jeden durch Verschmelzung einer endlichen Anzahl von Kreisflächen entstandenen Bereich lösen.

213. Construction kreisförmiger Bereiche um die Ecken des gegebenen Fundamentalbereiches.

Wir wenden uns nun zu unserem Bereiche F_0.

Wenn wir uns denselben durch Zusammenbiegen in die geschlossene Fläche $\bar{F}_0$ verwandelt denken, die durch die $\sigma + 1$ Punkte

$$\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots \bar{\lambda}_\sigma, \bar{\lambda}_{\sigma+1}$$

begrenzt wird, die den Punkten

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_\sigma \text{ und } \lambda_{\sigma+1}, \lambda'_{\sigma+1}, \dots \lambda^{(\sigma-1)}_{\sigma+1}$$

entsprechen, so muss eine Function

$$\varphi(u, v)$$

gefunden werden, die auf dieser Fläche allenthalben eindeutig ist, der partiellen Differentialgleichung (I) genügt und nur an einer Stelle in bestimmter Weise unendlich wird. Setzen wir nämlich

$$\eta - \eta_\infty = r e^{\Theta i},$$

so soll die Function

$$z = \varphi + i\psi$$

für $\eta = \eta_\infty$ z. B. so unendlich werden, wie

$$\frac{1}{\eta - \eta_\infty} = \frac{1}{r}(\cos\Theta - i\sin\Theta),$$

also $\varphi(u, v)$ so, wie

(16) $$\frac{\cos\Theta}{r}$$

Für den Bereich F_0 selbst handelt es sich also darum, eine Lösung $\varphi(u,v)$ der partiellen Differentialgleichung (I) zu finden, die in correspondirenden Punkten der Seitenpaare $s_\varkappa$, $s'_\varkappa$ denselben Werth annimmt, an der vorgeschriebenen Stelle η_∞ wie der Ausdruck (16) unendlich wird, sonst innerhalb F_0 allenthalben eindeutig, endlich, stetig ist, und für welche die complementäre Function

$$\psi(u, v) = \int\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial v}du + \frac{\partial\varphi}{\partial u}dv\right)$$

ebenfalls in correspondirenden Punkten von $s_\varkappa$ und $s'_\varkappa$ gleiche Werthe besitzt.

Sei zunächst $\lambda_\varkappa$ der Doppelpunkt einer elliptischen Substitution $A_\varkappa$, d. h.

$$\frac{A_\varkappa \eta - \lambda_\varkappa}{A_\varkappa \eta - \mu_\varkappa} = e^{2\pi i \delta_\varkappa} \frac{\eta - \lambda_\varkappa}{\eta - \mu_\varkappa},$$

dann wissen wir, dass die Bahncurven, d. h. die Kreise

$$\left|\frac{\eta - \lambda_\varkappa}{\eta - \mu_\varkappa}\right| = \text{const},$$

durch die Substitution $A_\varkappa$ in sich selbst transformirt werden (Nr. 200, S 271) Ist λ_ι der Doppelpunkt einer parabolischen Substitution A_ι, also

$$\frac{1}{A_\iota \eta - \lambda_\iota} = \frac{1}{\eta - \lambda_\iota} + \gamma_\iota,$$

und setzen wir

$$\frac{1}{\eta - \lambda_\iota} = \zeta = u' + v' i,$$

so werden die geraden Linien der ζ-Ebene

$$v' - v_0' = (u' - u_0') \operatorname{tang} \operatorname{Arg} \gamma_\iota,$$

wo v_0, u_0' irgend ein reales Werthepaar bedeutet, durch die Substitution A_ι in sich selbst transformirt. Diesen geraden Linien entsprechen in der η-Ebene Kreise, die einander im Punkte $\eta = \lambda_\iota$ berühren; diese Kreise stellen die Bahncurven der parabolischen Substitution A_ι dar, d h. jeder Punkt eines solchen Kreises wird durch die Substitution A_ι in einen Punkt eben desselben Kreises transformirt

Wir denken uns nun um jeden der Punkte

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\sigma$$

eine Bahncurve der entsprechenden Substitution gelegt; für diejenigen Punkte, die Doppelpunkte parabolischer Substitutionen sind, geht die betreffende Bahncurve durch den Punkt selbst hindurch. Diese Bahncurven richten wir so ein, dass sie einander nicht schneiden und bezeichnen sie durch $k_1, k_2, \ldots k_\sigma$.

Nehmen wir den Sector des Kreises $k_\varkappa$, der ganz innerhalb F_0' liegt, also von $k_\varkappa$, $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$ begrenzt wird, und bilden denselben durch die Function

$$\zeta = \left(\frac{\eta - \lambda_\varkappa}{\eta - \mu_\varkappa}\right)^{\frac{1}{\delta_\varkappa}},$$

beziehungsweise

$$\zeta = e^{\frac{2\pi i}{\gamma_\varkappa} \frac{1}{\eta - \lambda_\varkappa}},$$

je nachdem $A_\varkappa$ eine elliptische oder parabolische Substitution ist, auf

eine ζ-Ebene ab, so erhalten wir in der ζ-Ebene einen Kreis K mit dem Mittelpunkte $\zeta = 0$, dessen ganze Peripherie dem zwischen $s_\varkappa$ und $s'_\varkappa$ innerhalb F_0 gelegenen Bogen des Kreises $k_\varkappa$ entspricht; ferner entspricht den Schnittpunkten $(k_\varkappa, s_\varkappa)$ und $(k_\varkappa, s'_\varkappa)$ ein und derselbe Punkt s der Peripherie von K, und endlich den beiden innerhalb $k_\varkappa$ gelegenen Stücken von $s_\varkappa$ und $s'_\varkappa$ (die ja, weil $k_\varkappa$ Bahncurve von $A_\varkappa$ ist, durch die Substitution $A_\varkappa$ aus einander hervorgehen) eine vom Punkte $\zeta = 0$ nach $\zeta = s$ hin gelegte, ganz innerhalb $k_\varkappa$ verlaufende Curve. Wir können also eine Potentialfunction finden, die auf der Peripherie von k_ν vorgeschriebene Werthe annimmt und innerhalb $k_\varkappa$ eindeutig, endlich und stetig ist (stetig auch bei Ueberschreitung der Curve $(0, s)$). Diese Potentialfunction hat dann als Function von u, v die Eigenschaft, eine innerhalb des Sectors $(k_\varkappa, s_\varkappa, s'_\varkappa)$ definirte Potentialfunction zu sein, die in correspondirenden Punkten der beiden den Seiten $s_\varkappa$, $s'_\varkappa$ an-

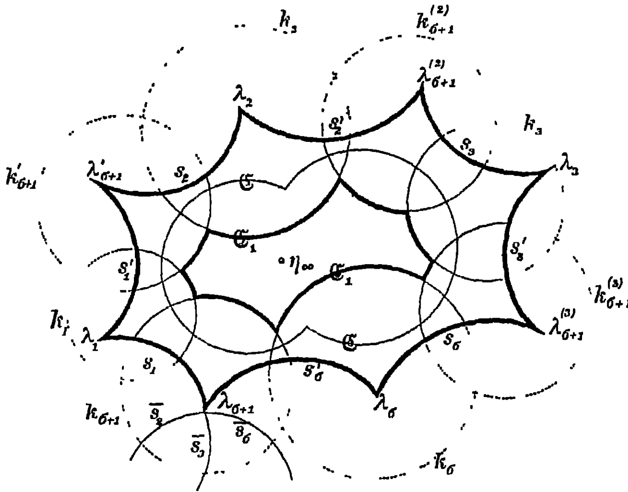


Fig 7

gehörigen Begrenzungsstücke gleiche Werthe annimmt, und deren Werthe auf dem $k_\varkappa$ angehörigen Begrenzungsstücke willkürlich vorgeschrieben werden können (in den Punkten $(k_\varkappa, s_\varkappa)$ und $(k_\varkappa, s'_\varkappa)$ müssen diese vorgeschriebenen Werthe jedoch übereinstimmen). Die zu dieser Potentialfunction complementäre (durch eine Gleichung von der Form (II) definirte) Function kann dann so eingerichtet werden, dass auch sie in correspondirenden Punkten der den Seiten $s_\varkappa$, $s'_\varkappa$ angehörigen Begrenzungsstücke gleiche Werthe annimmt.

Wir beschreiben nun um $\lambda_{\sigma+1}$ herum (beziehungsweise durch $\lambda_{\sigma+1}$, wenn $A_{\sigma+1}$ eine parabolische Substitution ist) eine Bahncurve $k_{\sigma+1}$ von $A_{\sigma+1}$ und construiren deren Abbildungen

$$k_{\sigma+1}^{(\nu)} = A_\nu \cdots A_2 A_1 k_{\sigma+1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots (\sigma-1)),$$

die dann Bahncurven der Substitutionen

$$A_\nu \cdots A_1 A_{\sigma+1} A_1^{-1} \cdots A_\nu^{-1}$$

sind, also die Punkte $\lambda_{\sigma+1}^{(\nu)}$ in derselben Weise umgeben, wie $k_{\sigma+1}$ den Punkt $\lambda_{\sigma+1}$. Sei dann

$$\bar{s}_2 = A_1^{-1} s_2 = A_1^{-1} A_2^{-1} s_2',$$

$$\bar{s}_3 = A_1^{-1} A_2^{-1} s_3 = A_1^{-1} A_2^{-1} A_3^{-1} s_3',$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\bar{s}_\sigma = A_1^{-1} A_2^{-1} \cdots A_{\sigma-1}^{-1} s_\sigma = A_{\sigma+1} s_\sigma',$$

so gehen die Curvenstücke $\bar{s}_2, \bar{s}_3, \cdots \bar{s}_\sigma$ von $\lambda_{\sigma+1}$ aus und verlaufen ausserhalb des Bereiches F_0. Der Kreis $k_{\sigma+1}$ zerfällt dann in $(\sigma + 1)$ Sectoren, die wir durch ihre in Parenthesen geschriebenen Begrenzungsstücke bezeichnen; von diesen Sectoren liegt $(k_{\sigma+1}, s_1, s_\sigma')$ innerhalb F_0; ferner ist

$$(k_{\sigma+1}, s_1, \bar{s}_2) = A_1^{-1}(k_{\sigma+1}', s_1', s_2),$$

$$(k_{\sigma+1}, \bar{s}_2, \bar{s}_3) = A_1^{-1} A_2^{-1}(k_{\sigma+1}'', s_2', s_3),$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$(k_{\sigma+1}, \bar{s}_{\sigma-1}, \bar{s}_\sigma) = A_1^{-1} A_2^{-1} \cdots A_{\sigma-1}^{-1}(k_{\sigma+1}^{(\sigma-1)}, s_{\sigma-1}', s_\sigma),$$

und die Winkelsumme

$$\sphericalangle(s_\sigma', s_1) + \sphericalangle(s_1, \bar{s}_2) + \sphericalangle(\bar{s}_2, \bar{s}_3) + \cdots + \sphericalangle(\bar{s}_{\sigma-1}, \bar{s}_\sigma) = \sphericalangle(s_\sigma', \bar{s}_\sigma)$$

beträgt (vergl Nr. 209, S 309) absolut genommen $2\pi\delta_{\sigma+1}$ oder Null, je nachdem $A_{\sigma+1}$ eine elliptische oder parabolische Substitution ist. Im ersteren Falle bilden wir den Sector

$$(k_{\sigma+1}, \bar{s}_\sigma, s_\sigma')$$

durch die Function

$$\zeta = \left(\frac{\eta - \lambda_{\sigma+1}}{\eta - \mu_{\sigma+1}}\right)^{-\frac{1}{\delta_{\sigma+1}}},$$

im letzteren Falle durch die Function

$$\zeta = e^{-\frac{2\pi i}{\gamma_{\sigma+1}} \frac{1}{\eta - \lambda_{\sigma+1}}}$$

auf eine ζ-Ebene ab; dann entspricht diesem Sector ein um $\zeta = 0$ als Mittelpunkt beschriebener Vollkreis K, und zwar dem zur Begrenzung gehörigen Bogen von $k_{\sigma+1}$, die Peripherie von K, den zur Begrenzung gehörigen Stücken von $\bar{s}_\sigma$, s_σ' ein von $\zeta = 0$ nach einem bestimmten

Punkte der Kreisperipherie K hin gezogener Schnitt Construiren wir eine Potentialfunction für K, die auf der Peripherie dieses Kreises eine vorgeschriebene stetige Werthenfolge besitzt, so ist diese Function, als Function der Coordinaten u, v eines innerhalb F_0 gelegenen Punktes aufgefasst, eine Potentialfunction, die innerhalb der σ Sectoren

$$(17) \qquad (k_{\sigma+1}, s_1, s'_\sigma), \quad (k'_{\sigma+1}, s_2, s'_1), \cdots (k^{(\sigma-1)}_{\sigma+1}, s_\sigma, s'_{\sigma-1})$$

eindeutig, endlich und stetig ist, in correspondirenden Punkten der den Seitenpaaren

$$(18) \qquad s_1, s'_1; \; s_2, s'_2; \; \cdots s_\sigma, s'_\sigma$$

angehörigen Begrenzungsstücke gleiche Werthe annimmt und auf den den Kreisen

$$k_{\sigma+1}, k'_{\sigma+1}, \cdots k^{(\sigma-1)}_{\sigma+1}$$

angehörigen Begrenzungsstücken in eine willkürlich vorgeschriebene stetige Werthenfolge übergeht. Diese Stetigkeit ist dann auch wieder so zu verstehen, dass in den Punkten $(k_{\sigma+1}, s_1)$ und $(k'_{\sigma+1}, s'_1)$, $(k'_{\sigma+1}, s_2)$ und $(k''_{\sigma+1}, s'_2)$, $\cdots (k^{(\sigma-1)}_{\sigma+1}, s_\sigma)$ und $(k_{\sigma+1}, s'_\sigma)$ die vorgeschriebenen Werthe übereinstimmen Die complementäre Potentialfunction kann dann auch so eingerichtet werden, dass ihre Werthe in correspondirenden Punkten der Seitenpaare (18) übereinstimmen

Wir können uns die Kreise

$$(19) \qquad k_1, k_2, \cdots k_\sigma, \; k_{\sigma+1}, k'_{\sigma+1}, \cdots k^{(\sigma-1)}_{\sigma+1}$$

so eingerichtet denken, dass nicht nur die $k_1, k_2, \cdots k_\sigma$, sondern auch die $k_{\sigma+1}, k'_{\sigma+1}, \cdots k^{(\sigma-1)}_{\sigma+1}$ einander nicht schneiden; die letztere Voraussetzung hat der Betrachtung, die auf die Herstellung einer Potentialfunction für die Sectoren (17) hinzielte, schon stillschweigend zu Grunde gelegen. Dagegen können die Kreise

$$k^{(\varkappa-1)}_{\sigma+1}, \; k_\varkappa, \; k^{(\varkappa)}_{\sigma+1}$$

einander durchsetzen, wir wollen sogar geradezu annehmen, dass dies für $\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma$ der Fall sei, so dass also (vergl die Figur 7) die ausserhalb aller übrigen Kreise, aber innerhalb F_0 gelegenen Stücke der Kreisperipherien (19) einen ununterbrochenen Linienzug $\mathfrak{C}_1$ bilden, der mit der Begrenzung von F_0 zusammengenommen einen gürtelförmigen Theil Φ von F_0 vollständig begrenzt. Sollten die Kreise (19) allein das noch nicht leisten, so müssen wir einen Cyklus von scheinbaren Ecken des Bereiches einführen, d. h. einen ausserhalb aller Kreise (19) gelegenen Punkt einer Seite von F_0 als Ecke auffassen, demselben die identische Substitution 1 zuordnen und z. B.

einen durch diesen Punkt hindurch gehenden, ganz im Innern von F_0 verlaufenden Kreis den Kreisen (19) hinzufügen. Sollte die Einführung einer solchen scheinbaren Ecke nicht ausreichen, so wären deren mehrere einzuführen.

Wir halten der Einfachheit wegen die erwähnte Annahme fest und stellen uns zunächst die Aufgabe, für den gürtelförmigen Bereich Φ eine Potentialfunction zu finden, die zugleich mit ihrer complementären in correspondirenden Punkten der Seitenpaare (18) gleiche Werthe annimmt und auf $\mathfrak{C}_1$ eine stetige, aber willkürlich vorgeschriebene Werthenfolge besitzt.

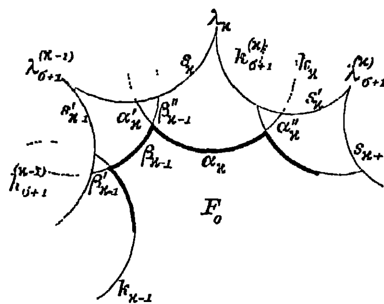


Fig 8

Wir bezeichnen die innerhalb F_0 befindlichen Theile der Kreise (19) wie in der nebenstehenden Figur angedeutet ist, so dass also der innerhalb F_0 gelegene Theil von $k_\varkappa$ sich aus $\alpha_\varkappa'$, $\alpha_\varkappa$, $\alpha_\varkappa''$, der von $k_{\sigma+1}^{(\varkappa-1)}$ aus $\beta_{\varkappa-1}'$, $\beta_{\varkappa-1}$, $\beta_{\varkappa-1}''$ zusammensetzt; die Stücke

$$\alpha_\varkappa, \ \beta_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots \sigma)$$

bilden zusammengenommen den Linienzug $\mathfrak{C}_1$.

Wir betrachten nun die Gesammtheit der Sectoren

$$(20) \qquad (k_\varkappa, \ s_\varkappa, \ s_\varkappa') \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots \sigma)$$

einerseits, die Gesammtheit der Sectoren (17) andererseits als je einen Bereich und wenden auf diese Bereiche das in der Nr. 212 (S. 325) beschriebene alternirende Verfahren an.

214. **Existenzbeweis durch zweimalige Anwendung des alternirenden Verfahrens.**

Zunächst construiren wir für jeden der Sectoren $(k_\varkappa, s_\nu, s_\varkappa')$ eine Potentialfunction, die zugleich mit ihrer complementären in correspondirenden Punkten der zur Begrenzung gehörigen Stücke von $s_\varkappa$, s_ν' gleiche Werthe annimmt und die auf $\alpha_\varkappa$ die Werthe der für $\mathfrak{C}_1$ vorgeschriebenen stetigen Folge besitzt; die Werthe auf $\alpha_\varkappa'$ und $\alpha_\varkappa''$ mögen beliebig vorgeschrieben sein, sie müssen sich nur in den Punkten, wo $\alpha_\varkappa'$ und $\alpha_\varkappa''$ an $\alpha_\varkappa$ stossen, den daselbst vorgeschriebenen Werthen stetig anschliessen. Wir können z. B. fordern, dass die zu bestimmende

Potentialfunction längs $\alpha_\varkappa'$ constant gleich dem in dem Grenzpunkte von $\alpha_\varkappa$ und $\alpha_\varkappa'$ vorgeschriebenen Werthe, und längs $\alpha_\varkappa''$ ebenfalls constant, gleich dem im Grenzpunkte von $\alpha_\varkappa''$ und $\alpha_\varkappa$ vorgeschriebenen Werthe sei

Die Gesammtheit der so construirten Potentialfunctionen bezeichnen wir durch $\chi_0(u, v)$, d. h. wir verstehen unter $\chi_0(u, v)$ etwa einen analytischen Ausdruck, der innerhalb jedes einzelnen der Sectoren (20) die daselbst construirte Potentialfunction darstellt

Dieses $\chi_0(u, v)$ nimmt dann längs der Stücke $\beta_\varkappa'$, $\beta_\varkappa''$ gewisse wohl bestimmte Werthe an, die sich an die für die Stücke $\beta_\varkappa$ stattfindenden Werthe der für $\mathfrak{C}_1$ vorgeschriebenen Folge stetig anschliessen. Wir construiren nun eine Potentialfunction $\chi_1(u, v)$ für die Sectoren (17), die längs der Stücke

$$\beta_1', \beta_1'', \beta_2', \beta_2'', \cdots \beta_\sigma', \beta_\sigma''$$

die daselbst stattfindenden Werthe von $\chi_0(u, v)$, längs der Stücke

$$\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_\sigma$$

die für $\mathfrak{C}_1$ vorgeschriebenen Werthe annimmt und überdies zugleich mit ihrer complementären in correspondirenden Punkten der Seiten $s_\varkappa, s_\varkappa'$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots \sigma)$ die gleichen Werthe besitzt

Dann construiren wir wieder ein System $\chi_2(u, v)$ von Potentialfunctionen für die Sectoren (20), die auf den Stücken

$$\alpha_1', \alpha_1'', \alpha_2', \alpha_2'', \cdot \quad \alpha_\sigma', \alpha_\sigma''$$

die daselbst stattfindenden Werthe von $\chi_1(u, v)$, auf den Stücken

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdot \cdot \alpha_\sigma$$

die für $\mathfrak{C}_1$ vorgeschriebenen Werthe annehmen und zugleich mit ihren complementären in correspondirenden Punkten der Seiten

$$s_\varkappa, s_\varkappa' \qquad (\varkappa = 1, 2, \quad \sigma)$$

gleiche Werthe erhalten. Darauf wieder eine Potentialfunction $\chi_3(u, v)$ für die Sectoren (17), die längs der Stücke

$$\beta_\varkappa, \beta_\varkappa' \qquad (\nu = 1, 2, \quad \sigma)$$

die Werthe von $\chi_2(u, v)$, längs der $\beta_\varkappa$ die für $\mathfrak{C}_1$ vorgeschriebenen Werthe annimmt u. s w —

Nach den Principien der Herren Neumann und Schwarz ist dann

$$\lim_\nu \chi_{2\nu}(u, v) = \lim_\nu \chi_{2\nu+1}(u, v) = \chi(u, v)$$

die gesuchte Potentialfunction für Φ.

Sei nun η_∞ eine Stelle des nicht zu Φ gehörigen Theiles von F_0; wir können dann stets einen Bereich Ψ abgrenzen, der ganz innerhalb F_0 liegt, η_∞ in sich schliesst, innerhalb dessen die ganze innere Begrenzung $\mathfrak{C}_1$ von Φ gelegen ist und der durch Verschmelzung einer endlichen Anzahl von Kreisflächen entstanden gedacht werden kann (vergl die Figur 7, wo Ψ durch Verschmelzung zweier Kreisflächen gebildet wird) Dann lässt sich für diesen Bereich Ψ eine Potentialfunction $\overline{\psi}(u, v)$ herstellen, die auf der (durch Kreisbogen gebildeten) Begrenzung $\mathfrak{C}$ eine willkürlich vorgeschriebene stetige Werthenfolge $\overline{\psi}(\mathfrak{C})$ annimmt

Man kann dann aber auch leicht eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (I) finden, die im Punkte η_∞ wie (16)

$$\frac{\cos\Theta}{r}$$

unendlich wird, sonst innerhalb Φ allenthalben eindeutig, endlich, stetig ist und auf $\mathfrak{C}$ mit $\overline{\psi}(\mathfrak{C})$ übereinstimmt. Zu dem Ende bilden wir die Differenz

$$\overline{\psi}(\mathfrak{C}) - \left(\frac{\cos\Theta}{r}\right)_{\mathfrak{C}} = \overline{\overline{\psi}}(\mathfrak{C})$$

der vorgeschriebenen Begrenzungswerthe und der Werthe von $\frac{\cos\Theta}{r}$ auf $\mathfrak{C}$, construiren eine Potentialfunction $\overline{\overline{\psi}}(u, v)$ für Φ, die auf $\mathfrak{C}$ die Werthe $\overline{\overline{\psi}}(\mathfrak{C})$ annimmt, dann ist offenbar

$$\frac{\cos\Theta}{r} + \overline{\overline{\psi}}(u, v)$$

die zu findende Lösung von (I). Wir wollen auch eine solche Lösung als Potentialfunction für Φ bezeichnen, fügen aber zum Unterschiede von einer allenthalben endlichen Potentialfunction hinzu, dass dieselbe für $\eta = \eta_\infty$ unendlich wird wie (16).

Um nun an das Ziel der gegenwärtigen Untersuchung zu gelangen, haben wir jetzt nur noch auf die beiden Bereiche Φ und Ψ das alternirende Verfahren (gürtelförmige Verschmelzung) anzuwenden.

Wir bilden für Φ eine wie $\chi(u, v)$ beschaffene Potentialfunction (d. h. eine Potentialfunction, die sowohl wie ihre complementäre in correspondirenden Punkten der Seiten $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$ gleiche Werthe annimmt) $\varphi_0(u, v)$, welche längs $\mathfrak{C}_1$ dieselben Werthe annimmt wie $\frac{\cos\Theta}{r}$; dann für Ψ eine Potentialfunction $\varphi_1(u, v)$, die in $\eta = \eta_\infty$ wie (16) unendlich wird und auf der Begrenzung $\mathfrak{C}$ dieselben Werthe hat, wie φ_0. Dann wieder für Φ eine wie $\chi(u, v)$ beschaffene Potentialfunction $\varphi_2(u, v)$, die längs $\mathfrak{C}_1$ die Werthe von $\varphi_1(u, v)$ annimmt, darauf für Ψ eine Potentialfunction $\varphi_3(u, v)$, die in $\eta = \eta_\infty$ wie (16) unendlich wird und auf $\mathfrak{C}$ mit $\varphi_2(u, v)$ übereinstimmt, u s w. —

Dann ist innerhalb des Φ und Ψ gemeinsamen Bereiches

$$\lim_{\nu} \varphi_{2\nu}(u, v) = \lim_{\nu} \varphi_{2\nu+1}(u, v),$$

und die beiden Grenzwerthe stellen innerhalb des aus Φ und Ψ durch Verschmelzung hervorgehenden Bereiches F_0 eine Potentialfunction $\varphi(u, v)$ dar, welche die in der Nr. 213 (S. 327) geforderten Eigenschaften besitzt. Diese Function ist, wie man leicht einsieht, durch ihre Eigenschaften auch eindeutig determinirt.

Fügen wir dieses $\varphi(u, v)$ mit dem durch die Gleichung (II) bestimmten $\psi(u, v)$ zu der Function

$$z = \varphi(u, v) + i\psi(u, v) = f(\eta)$$

der complexen Variabeln η zusammen, so haben wir eine Function, die sich innerhalb F_0 wie eine rationale Function verhält, nur an der Stelle $\eta = \eta_\infty$ wie der Ausdruck

$$\frac{1}{\eta - \eta_\infty}$$

unendlich wird und in correspondirenden Punkten der Seitenpaare $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$ gleiche Werthe annimmt Diese Function ist, abgesehen von einer additiven Constanten, auch eindeutig bestimmt.

215. **Allgemeine Sätze über Functionen, die bei den Substitutionen der Gruppe ungeändert bleiben. Aufstellung der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung.**

Bedeute $g(\eta)$ eine rationale Function von η, deren sämmtliche Unendlichkeitsstellen innerhalb des Bereiches F_0 gelegen sind, dann könnten wir nach genau derselben Methode, nach welcher wir die Existenz der Function $\varphi(u, v)$ beziehungsweise z nachgewiesen haben, zeigen, dass es eine Function $\mathfrak{X}$ der complexen Variabeln η giebt, die sich innerhalb F_0 verhält wie die rationale Function $g(\eta)$, d. h. also so, dass die Differenz

$$\mathfrak{X} - g(\eta)$$

innerhalb F_0 allenthalben eindeutig endlich und stetig ist, und die in correspondirenden Punkten der Seitenpaare $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$ gleiche Werthe annimmt. Diese Function wäre dann ebenfalls, abgesehen von einer additiven Constanten, eindeutig determinirt. Nimmt man für $g(\eta)$ die allgemeinste rationale Function, die nur innerhalb von F_0 unendlich wird, so ist die entsprechende Function $\mathfrak{X}$ die allgemeinste Function, die sich innerhalb F_0 wie eine rationale Function verhält und in correspondirenden Punkten der Seitenpaare $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$ gleiche Werthe annimmt Von dieser Function kann man nun nach einem von Herrn Schottky

angewandten Verfahren zeigen, dass sie sich rational durch die Function z darstellen lässt.

Dieses Verfahren besteht in Folgendem. Bezeichnen wir durch

$$z_\alpha = f(\eta\,|\,\alpha)$$

diejenige z-Function, die der Wahl $\eta_\infty = \alpha$ entspricht, die also an der Stelle $\eta = \alpha$ unendlich wird wie

$$\frac{1}{\eta - \alpha},$$

und allgemeiner durch

$$\overset{\nu}{z}_\alpha$$

eine Function vom Charakter der $\mathfrak{X}$-Functionen, die der Wahl

$$g(\eta) = \frac{1}{(\eta - \alpha)^\nu}, \tag{21}$$

ν eine positive ganze Zahl, entspricht, d. h. innerhalb F_0 nur an der Stelle $\eta = \alpha$ und daselbst so wie der Ausdruck (21) unendlich wird Sei ferner $\mathfrak{X}_\alpha$ eine Function vom Charakter der $\mathfrak{X}$, die zu der rationalen Function

$$g(\eta) = c_0 + \frac{c_1}{\eta - \alpha} + \frac{c_2}{(\eta - \alpha)^2} + \cdots + \frac{c_m}{(\eta - \alpha)^m} \tag{22}$$

gehört, wo $c_0, c_1, \cdots c_m$ Constanten bedeuten, dann ist zunächst leicht einzusehen, dass der Ausdruck

$$c_0 + c_1 z_\alpha + c_2 \overset{2}{z}_\alpha + \cdots + c_m \overset{m}{z}_\alpha \qquad (c = \text{const})$$

auch eine $\mathfrak{X}$-Function darstellt, die sich innerhalb F_0 verhält, wie die rationale Function (22), so dass sich also dieser Ausdruck von $\mathfrak{X}_\alpha$ nur durch eine additive Constante unterscheiden kann. Also ist:

$$\mathfrak{X}_\alpha = c' + c_1 z_\alpha + c_2 \overset{2}{z}_\alpha + \cdots + c_m \overset{m}{z}_\alpha,$$

wo c' eine Constante bedeutet.

Man beweist dann sofort den Satz:

Das Product zweier Functionen vom Charakter der $\mathfrak{X}$ ist wieder eine Function von demselben Charakter

Daraus folgt, dass das Product:

$$\overset{\varkappa}{z}_\alpha \overset{l}{z}_\alpha = C_0 + C_1 z_\alpha + C_2 \overset{2}{z}_\alpha + \cdots + C_{\varkappa + l} \overset{\nu + l}{z}_\alpha$$

sein muss, wo die $C_0, C_1, \cdots C_{\varkappa + l}$ Constanten bedeuten.

Hieraus schliessen wir aber, dass sich $\mathfrak{X}_\alpha$ als ganze rationale Function m-ten Grades mit constanten Coefficienten von z_α darstellen lässt.

Bedeuten endlich α, β zwei von einander verschiedene Stellen

innerhalb F_0, so ist die Function z_α in der Umgebung von $\eta = \beta$ regulär, also

$$z_\alpha = b + b_1(\eta - \beta) + \cdot \quad ,$$

wir haben demnach

$$\frac{b_1}{z_\alpha - b} = \frac{1}{\eta - \beta}\{1 + b_1'(\eta - \beta) + \cdots\}, \tag{23}$$

d. h die Function z_β kann sich von dem Ausdrucke (23) nur durch eine additive Constante unterscheiden.

Die Functionen z_α, z_β sind demnach linear gebrochene Functionen von einander.

Aus diesen Sätzen folgt aber unmittelbar die Richtigkeit der Behauptung, dass jede Function vom Charakter $\mathfrak{X}$ rational durch z ausgedrückt werden kann

Betrachten wir eine Function $\mathfrak{X}$, die zu einer rationalen Function $g(\eta)$ gehört, die innerhalb F_0 an genau m Stellen von der ersten Ordnung unendlich wird (wie gewöhnlich in der Functionentheorie zählen wir eine $\varkappa$-fache Unendlichkeitsstelle als $\varkappa$ einfache). Bilden wir dann

$$\mathfrak{X} - a = \mathfrak{X}',$$

wo a irgend eine complexe Grösse bedeutet, so wird die Function $\mathfrak{X}'$ innerhalb F_0 auch an genau m Stellen von erster Ordnung unendlich werden.

Wir integriren $d \log \mathfrak{X}'$ über den innern Rand der Begrenzungscurve von F_0 im positiven Sinne, dann ist bekanntlich

$$\int_{(F_0)} d \log \mathfrak{X}' = m' - m,$$

wo m' die Anzahl der Stellen bedeutet, an denen die Function $\mathfrak{X}'$ von der ersten Ordnung verschwindet. Nun ist aber

$$\int_{(F_0)} d \log \mathfrak{X}' = \sum_{\varkappa=1}^{\sigma} \left\{ \int_{(\sigma_\varkappa)} \frac{d \log \mathfrak{X}'}{d\eta}\, d\eta - \int_{(\sigma_\varkappa')} \frac{d \log \mathfrak{X}'}{d\eta}\, d\eta \right\};$$

ferner hat man, wenn

$$\eta = A_\varkappa \zeta$$

gesetzt wird,

$$\int_{(s_\varkappa')} \frac{d \log \mathfrak{X}'(\eta)}{d\eta}\, d\eta = \int_{(s_\varkappa)} \frac{d \log \mathfrak{X}'(A_\varkappa \zeta)}{dA_\varkappa \zeta} \frac{dA_\varkappa \zeta}{d\zeta}\, d\zeta,$$

also, da die Function $\mathfrak{X}'(\eta)$ in correspondirenden Punkten von $s_\varkappa$ und $s_\varkappa'$ gleiche Werthe annimmt,

$$\int_{(s_\varkappa')} \frac{d \log \mathfrak{X}'(\eta)}{d\eta}\, d\eta = \int_{(s_\varkappa)} \frac{d \log \mathfrak{X}'(\zeta)}{d\zeta}\, d\zeta;$$

d. h. es ist

$$\int_{(F_0)} d \log \mathfrak{X}' = 0,$$

also $m' = m$. Wir haben somit den Satz:

Eine Function $\mathfrak{X}$, die sich innerhalb des Bereiches F_0 wie eine rationale Function verhält und in correspondirenden Punkten der Seitenpaare $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots \sigma)$ gleiche Werthe besitzt, nimmt innerhalb F_0 jeden complexen Werth ebenso oft an, als sie von erster Ordnung unendlich wird.

Die Function z, die nur an einer Stelle von erster Ordnung unendlich wird, nimmt folglich innerhalb F_0 jeden Werth nur ein einziges Mal an

Wir denken uns nun diese Function z von η nach allen Punkten der Fläche F hin fortgesetzt, so wie wir dies in der Nr. 211 (S. 321 ff) erörtert haben, und wollen uns nun umgekehrt die Aufgabe stellen, die Natur der functionalen Abhängigkeit des η von z zu ergründen. Dies geschieht nach einem in einem besonderen Falle bereits von Riemann angewandten Verfahren, welches wir jetzt darlegen wollen

Die Function η von z ist im Allgemeinen eine unendlich vielwerthige. Bedeutet η einen Werth innerhalb F_0, so ist die Gesammtheit der η-Werthe, die zu demselben z gehören, durch die Formel

$$S\eta$$

dargestellt, wo S eine Substitution der Gruppe ϑ bedeutet Bilden wir also die Differentialinvariante der allgemeinen projectiven Gruppe, die Schwarz'sche Ableitung (Nr. 180, S 184)

$$\varDelta\binom{\eta}{z} = \frac{\frac{3}{4}\left(\frac{d^2\eta}{dz^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{d\eta}{dz}\frac{d^3\eta}{dz^3}}{\left(\frac{d\eta}{dz}\right)^3},$$

so ist (a a. O. S. 185)

$$\varDelta\binom{S\eta}{z} = \varDelta\binom{\eta}{z},$$

d. h. dieser Differentialausdruck ist eine eindeutige Function von z Betrachten wir denselben aber als Function von η, so erkennen wir, dass er sich innerhalb F_0 wie eine rationale Function verhält und in correspondirenden Punkten der Seitenpaare s_ν, $s_\varkappa'$ gleiche Werthe annimmt. Es ist folglich

$$\varDelta\binom{\eta}{z}$$

eine Function vom Charakter der $\mathfrak{X}$, also eine rationale Function von z,

$$\Delta\binom{\eta}{z} = q(z). \tag{24}$$

Setzen wir nun noch

$$y_1 = \sqrt{\frac{dz}{d\eta}}, \quad y_2 = \eta\sqrt{\frac{dz}{d\eta}}, \tag{25}$$

so genügen diese beiden Ausdrücke nach den Ergebnissen der Nr. 180 (S 184) der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dz^2} = q(z)y. \tag{26}$$

Bedeutet $\eta = \eta_0$ einen Werth, der innerhalb F_0 liegt, $z = z_0$ den entsprechenden Werth von z, so ist in der Umgebung von η_0

$$z - z_0 = \alpha_1(\eta - \eta_0) + \alpha_2(\eta - \eta_0)^2 + \cdot\ \cdot,$$

und es muss α_1 von Null verschieden sein, da z den Werth z_0 innerhalb F_0 nur einmal annehmen, d. h. $z - z_0$ innerhalb F_0 nur einmal und zwar von erster Ordnung verschwinden kann. Also ist in der Umgebung von $z = z_0$

$$\eta - \eta_0 = \mathfrak{P}(z|z_0),$$

wo $\mathfrak{P}$ eine gewöhnliche Potenzreihe bedeutet. Diejenigen z-Werthe, die Punkten innerhalb F_0, oder genauer Punkten innerhalb der geschlossenen Fläche $\bar{F}_0$ entsprechen, sind demnach reguläre Stellen der Differentialgleichung (26).

Die singulären Stellen der Differentialgleichung (26) können also nur den Grenzpunkten der Fläche $\bar{F}_0$, d. h. den Ecken des Fundamentalbereiches F_0 entsprechen. Machen wir uns darum zunächst klar, wie sich z in diesen Eckpunkten verhält

Wenn wir η etwa im positiven Sinne die Begrenzung von F_0 durchlaufen lassen, so entsprechen denjenigen Punkten der Seiten $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$, die keine Ecken sind, reguläre z-Werthe; wenn η längs einer Seite in eine Ecke einrückt, so nähert sich z einem bestimmten Werthe Sei

$$\lim_{\eta=\lambda_\varkappa} f(\eta) = a_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ \ \sigma),$$

$$\lim_{\eta=\lambda_{\sigma+1}} f(\eta) = \lim_{\eta=\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa)}} f(\eta) = a_{\sigma+1} \qquad (\nu = 1, 2, \ \ \sigma - 1),$$

dann sind also die Punkte

$$a_1, a_2, \ \ \cdot\ a_\sigma, a_{\sigma+1}$$

die singulären Stellen der Differentialgleichung (26) Wenn η die Be-

grenzung von F_0 durchläuft, so beschreibt folglich z ein Liniensystem, welches den Punkt $a_{\sigma+1}$ mit den Punkten $a_1, a_2, \cdot a_\sigma$ verbindet (vergl. Fig 9), und zwar, wenn η z. B. von λ_1 längs s_1 nach $\lambda_{\sigma+1}$, dann über s_σ' weiter nach λ_σ und so fort bis nach λ_1 zurück wandert, so geht z auf dem negativen Ufer der Linie $(a_1, a_{\sigma+1})$ von a_1 nach $a_{\sigma+1}$, dann auf dem positiven Ufer von $(a_{\sigma+1}, a_\sigma)$ nach a_σ u. s. f., endlich auf dem positiven Ufer von $(a_{\sigma+1}, a_1)$ nach a_1 zurück. Allemal entsprechen den beiden Seiten $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$ die beiden Ufer der Linie

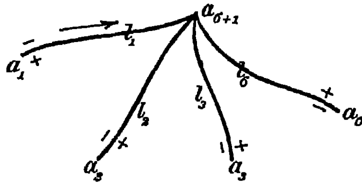


Fig 9.

$$(a_\varkappa, a_{\sigma+1}) = l_\varkappa,$$

und die durch das Liniensystem

$$l_1, l_2, \cdots l_\sigma$$

zerschnittene z-Ebene $\overline{T}$ ist die eindeutig conforme Abbildung des Bereiches F_0.

Geht η längs der Seite $s_\varkappa'$ in den Bereich $F_\varkappa$, so überschreitet z den Schnitt $l_\varkappa$, indem es vom positiven Ufer nach dem negativen geht, oder wenn wir uns dem Bereiche F_ν entsprechend ein neues Blatt über der z-Ebene ausgebreitet denken, so gelangt z in dieses neue Blatt, welches längs des negativen Ufers des in ihm gezogenen Schnittes l_ν mit dem positiven Ufer des Schnittes $l_\varkappa$ im Ausgangsblatte zusammenhängt. Kurz, wir haben hier dieselben Verhältnisse, wie sie in der Nr. 210 (S 312) für die daselbst untersuchte Differentialgleichung (A_2) erörtert worden sind

Nun können wir auch das Verhalten von η, beziehungsweise y_1, y_2, in der Umgebung der Punkte $a_\varkappa$ vollständig beschreiben.

Wenn z einen Umlauf im positiven Sinne um $a_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \quad \sigma$) vollzieht, d. h. von dem negativen Ufer von $l_\varkappa$ innerhalb $\overline{T}$ nach dem gegenüberliegenden Punkte des positiven Ufers geht, so hat η die Substitution

$$A_\varkappa \eta$$

erfahren Sei

$$A_\varkappa \eta = \frac{\alpha_{22}\eta + \alpha_{21}}{\alpha_{12}\eta + \alpha_{11}}, \qquad \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12} = 1,$$

dann erleidet also das Fundamentalsystem y_1, y_2 von (26) bei einem positiven Umlaufe von z um a_ν die Substitution

$$\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2,$$
$$\alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2,$$

oder aber

$$\begin{gathered} -\alpha_{11} y_1 - \alpha_{12} y_2, \\ -\alpha_{21} y_1 - \alpha_{22} y_2, \end{gathered}$$

da, wenn η ungeändert bleibt, nach den Ergebnissen der Nr 180 (S. 179), die y_1, y_2 entweder selbst ungeändert bleiben oder sich mit -1 multipliciren müssen

Die Wurzeln der zum Punkte $a_\varkappa$ gehörigen Fundamentalgleichung sind demnach

$$\omega_1 = e^{2\pi i \frac{\delta_\varkappa + 1}{2}}, \quad \omega_2 = e^{2\pi i \frac{1-\delta_\varkappa}{2}},$$

wenn $A_\varkappa$ eine elliptische, und

$$\omega_1 = \omega_2 = e^{\frac{2\pi i}{2}},$$

wenn $\delta_\varkappa = 0$, d. h $A_\varkappa$ eine parabolische Substitution ist. Im ersteren Falle haben wir also für das zu $z = a_\varkappa$ gehörige canonische Fundamentalsystem $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2$ die Entwickelungen

$$\begin{gathered} \mathfrak{y}_1 = (z - a_\varkappa)^{r_{\varkappa 1}} \mathfrak{P}_1(z|a_\varkappa), \\ \mathfrak{y}_2 = (z - a_\varkappa)^{r_{\varkappa 2}} \mathfrak{P}_2(z|a_\varkappa), \end{gathered}$$

im letzteren die Entwickelungen

$$\begin{aligned} &\mathfrak{y}_1 = (z - a_\varkappa)^{r_{\varkappa 1}} \mathfrak{P}_1(z|a_\varkappa), \\ &\mathfrak{y}_2 = (z - a_\varkappa)^{r_{\varkappa 2}} (\mathfrak{P}_2(z|a_\varkappa) + c(z - a_\varkappa)^{r_{\varkappa 1} - r_{\varkappa 2}} \mathfrak{P}_1(z|a_\varkappa) \log (z - a_\varkappa)), \end{aligned}$$

wo $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ nach ganzen Potenzen von $z - a_\varkappa$ fortschreitende Reihen sind, c eine Constante bedeutet und

$$r_{\varkappa 1} = \frac{\log \omega_1}{2\pi i}, \quad r_{\varkappa 2} = \frac{\log \omega_2}{2\pi i}$$

gesetzt wurde.

Nun haben aber η sowohl wie $\frac{d\eta}{dz}$ im Punkte $z = a_\varkappa$ bestimmte Werthe, es ist nämlich

$$\eta = \lambda_\varkappa,$$

also können die Reihen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ nicht unendlich viele negative Potenzen enthalten; d h die Stelle $a_\varkappa$ ist keine Unbestimmtheitsstelle. Nehmen wir also gleich an, dass $r_{\varkappa 1}, r_{\varkappa 2}$ die Wurzeln der zu $z = a_\varkappa$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung sind, so ist, da in der Differentialgleichung (26) der Coefficient der ersten Ableitung verschwindet,

$$\begin{gathered} r_{\varkappa 1} + r_{\varkappa 2} = 1, \\ r_{\varkappa 1} - r_{\varkappa 2} = \delta_\varkappa + g, \end{gathered}$$

wo g eine ganze Zahl bedeutet Wir hätten also, wenn $A_\varkappa$ eine elliptische Substitution, d. h. $\delta_\varkappa$ von Null verschieden ist,

$$\frac{\mathfrak{y}_1}{\mathfrak{y}_2} = \frac{\eta - \lambda_\varkappa}{\eta - \mu_\varkappa} = (z - a_\varkappa)^{\delta_\varkappa + g}\,\mathfrak{P}(z|a_\varkappa),$$

und wenn $A_\varkappa$ eine parabolische Substitution wäre,

$$\frac{\mathfrak{y}_2}{\mathfrak{y}_1} = \frac{1}{\eta - \lambda_\varkappa} = (z - a_\varkappa)^{-g}\,\mathfrak{P}(z|a_\varkappa) + c\log(z - a_\varkappa),$$

wo c eine Constante, $\mathfrak{P}$ beide Mal eine gewöhnliche Potenzreihe bedeutet, die für $z = a_\varkappa$ nicht verschwindet.

Es ist aber z eine eindeutige Function des Ortes in der Fläche F; die Umgebung der Stelle $\eta = \lambda_\varkappa$ wird im Falle einer elliptischen Substitution durch

$$\zeta = \left(\frac{\eta - \lambda_\varkappa}{\eta - \mu_\varkappa}\right)^{\frac{1}{\delta_\varkappa}},$$

im Falle einer parabolischen Substitution durch

$$\zeta = e^{\frac{2\pi i}{\delta_\varkappa}\frac{1}{\eta - \lambda_\varkappa}}$$

auf eine schlichte Fläche der ζ-Ebene abgebildet (vergl Nr. 213, S 329); es muss also z in der Umgebung von $z = a_\varkappa$ eindeutig durch ζ darstellbar sein. Daraus folgt aber (vergl. Nr 197, S. 254), dass

$$g = 0$$

sein muss

Also haben wir

(27) $$r_{\varkappa 1} = \frac{1 + \delta_\varkappa}{2}, \quad r_{\varkappa 2} = \frac{1 - \delta_\varkappa}{2} \qquad (\varkappa = 1, 2, \quad \sigma),$$

und ebenso ergiebt sich für $z = a_{\sigma+1}$, dass die zu diesem Punkte gehörige determinirende Fundamentalgleichung, wenn $a_{\sigma+1}$ ein endlicher Werth ist, die Wurzeln

(28a) $$r_{\sigma+1,1} = \frac{1 + \delta_{\sigma+1}}{2}, \quad r_{\sigma+1,2} = \frac{1 - \delta_{\sigma+1}}{2},$$

dagegen, wenn $a_{\sigma+1} = \infty$ ist, die Wurzeln

(28b) $$r_{\sigma+1,1} = \frac{-1 + \delta_{\sigma+1}}{2}, \quad r_{\sigma+1,2} = \frac{-1 - \delta_{\sigma+1}}{2}$$

besitzt.

216 Form der Differentialgleichung. Fall zweier singulärer Punkte im Endlichen. Discontinuirliche Gruppen. Weitere Probleme.

Wir wissen nach den Ergebnissen der vorigen Nummer, dass die Differentialgleichung (26) zur Fuchs'schen Classe gehört, dass ihre singulären Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1}$ sind und dass die Wurzeln der zugehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen durch die Gleichungen (27), (28) gegeben werden. Auf Grund der in der Nr. 68 (Bd. I, S. 242) entwickelten Formeln können wir dadurch die Gestalt der Differentialgleichung (26) bestimmen. Wir finden, wenn alle Werthe $a_1, a_2, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1}$ endliche, also $z = \infty$ kein singulärer Punkt ist,

$$(29a)\; q = \frac{1}{\prod\limits_{\lambda=1}^{\sigma+1}(z-a_\lambda)}\left\{E_{\sigma-3}(z) - \sum_{\lambda=1}^{\sigma+1}\frac{(a_\lambda - a_1)\cdots(a_\lambda - a_{\sigma+1})}{z-a_\lambda}\,\frac{1}{4}(1-\delta_\lambda^2)\right\},$$

und wenn $a_{\sigma+1} = \infty$ ist,

$$(29b)\qquad q = \frac{1}{\prod\limits_{\lambda=1}^{\sigma}(z-a_\lambda)}\left\{-\frac{1}{4}(1-\delta_{\sigma+1}^2)E_{\sigma-2}(z)\right.$$
$$\left. - \sum_{\lambda=1}^{\sigma}\frac{(a_\lambda - a_1)\cdots(a_\lambda - a_\sigma)}{z-a_\lambda}\,\frac{1}{4}(1-\delta_\lambda^2)\right\},$$

wo im ersteren Falle $E_{\sigma-3}(z)$ eine ganze rationale Function $(\sigma-3)^{\text{ten}}$ Grades, im letzteren Falle $E_{\sigma-2}(z)$ eine ganze rationale Function $(\sigma-2)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet; in $E_{\sigma-2}(z)$ ist der Coefficient von $z^{\sigma-2}$ gleich Eins.

Die Function z war dadurch charakterisirt, dass sie eine $\mathfrak{X}$-Function ist, die innerhalb F_0' jeden Werth nur ein einziges Mal annimmt; dadurch ist z nicht vollkommen bestimmt, sondern auch

$$\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

besitzt dieselbe Eigenschaft. Es ist folglich noch über drei Constanten zu disponiren, wir können z. B.

$$(30)\qquad a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{\sigma+1} = \infty$$

wählen. Es ist dann η ein **bestimmter** Integralquotient der Differentialgleichung (26); einem beliebigen anderen Integralquotienten entspricht eine der Gruppe ϑ ähnliche Gruppe und ein Fundamentalbereich, der aus F_0 durch Anwendung einer willkürlichen projectiven Substitution hervorgeht.

Wenn die Anzahl der singulären Punkte σ grösser als zwei ist, so ist die gefundene Form von q zur vollständigen Bestimmung der Differentialgleichung (26) selbst bei Festhaltung der Convention (30) nicht ausreichend; nur für $\sigma = 2$ haben wir

$$(31) \qquad q = \frac{1}{4}\left\{\frac{\delta_1^2 - \delta_3^2 + \delta_2^2 - 1}{z(1-z)} - \frac{1-\delta_1^2}{z^2} - \frac{1-\delta_1^2}{(1-z)^2}\right\},$$

d. h in diesem Falle ist der Coefficient der Differentialgleichung (26) in expliciter Form gefunden

Für $\sigma = 2$ ist die Differentialgleichung (26) im Wesentlichen die Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe, und wir sehen durch diese Bemerkung, woher es kommt, dass sich in diesem Falle die Differentialgleichung in expliciter Form bestimmt; es rührt dies nämlich daher, dass (vergl. Nr. 69, Bd I, S. 243) die Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe durch Angabe der Wurzeln ihrer determinirenden Fundamentalgleichungen vollkommen bestimmt ist.

Die Annahme, dass die Substitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_\sigma, A_{\sigma+1}$$

elliptische oder parabolische seien, war für den geführten Existenzbeweis wesentlich; der Fall, wo einige dieser Substitutionen hyperbolisch oder loxodromisch sind, bietet wesentlich grössere Schwierigkeiten dar, die bisher noch nicht ganz überwunden sind.

Die besondere Wichtigkeit des behandelten Falles, den wir kurz auch so charakterisiren können, dass die Differentialgleichung (26) reale Wurzeln für alle determinirenden Fundamentalgleichungen besitzt, erhellt daraus, dass, wenn

η eine eindeutige Function von z ist,

dieser Fall nothwendig eintreten muss.

In der That wissen wir nach den Erörterungen der Nummern 196, 197 (S 256), dass, wenn in der Differentialgleichung (26) die unabhängige Variable eine eindeutige Function des Integralquotienten η ist, die

$$\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_\sigma, \delta_{\sigma+1}$$

entweder reciproke ganze Zahlen oder Null sein müssen. Die Gruppe ϑ ist dann eine (in der complexen η-Ebene) discontinuirliche; sie besitzt überdies die folgenden Eigenschaften:

1) In dem Fundamentalbereiche F_0 ist die Winkelsumme für jeden Cyklus von Ecken entweder ein aliquoter Theil von 2π oder Null.
2) Der Bereich F_0 überdeckt keinen Theil der η-Ebene mehrfach.

3) Auch die Gesammtheit aller Bereiche F_S, d. h. die ganze Fläche F bedeckt die η-Ebene oder einen Theil derselben einfach und lückenlos.

Die Eigenschaften 2), 3) sind eine unmittelbare Folge der Thatsache, dass zu jedem Werthe von η nur ein Werth von z gehört.

Herr Poincaré hat nachgewiesen, dass diese drei Eigenschaften jeder discontinuirlichen projectiven Gruppe ϑ zukommen. Wir gehen auf diesen Nachweis nicht ein, sondern wollen die Eigenschaft 3), die offenbar die Eigenschaften 1) und 2) unmittelbar nach sich zieht, geradezu als Definition einer discontinuirlichen Gruppe ansehen. Diese neue Definition ist dann anscheinend enger als die in der Nr. 202 (S. 279) aufgestellte, sie reicht aber für die Zwecke, die wir im Auge haben, vollständig aus.

Wir wissen dann auf Grund der vorhergehenden Untersuchungen, dass, wenn irgend eine discontinuirliche projective Gruppe ϑ durch ihren Fundamentalbereich F_0 gegeben ist, stets Functionen $\mathfrak{X}$ gebildet werden können, die sich innerhalb F_0 wie rationale Functionen verhalten und bei den Substitutionen der Gruppe ϑ ungeändert bleiben. Diese Functionen sind aber dann eindeutige Functionen von η schlechthin, da die Fläche F jetzt die η-Ebene nirgends mehrfach überdeckt. Sie lassen sich durch eine Function z von η, die innerhalb F_0 jeden Werth nur einmal annimmt, rational ausdrücken, und η ist als Function dieser Grösse z betrachtet, der Integralquotient einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung der Fuchsschen Classe von der Form (26). Nach Festlegung der der Function z noch anhaftenden drei willkürlichen Constanten (z. B. durch die Gleichungen (30)) sind die in den Coefficienten der Differentialgleichung (26) auftretenden Parameter durch die Parameter der Gruppe ϑ eindeutig bestimmt (Nr. 210, S 318).

Wenn für die Gruppe ϑ insbesondere

$$\sigma = 2$$

ist, so ist dieselbe (wenn wir ähnliche Gruppen als nicht wesentlich von einander verschieden ansehen) durch Angabe der

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3$$

allein schon vollkommen bestimmt (vergl. Nr. 128, Bd. I, S. 472, 476); der Coefficient q der zugehörigen Differentialgleichung (26) ist durch die Gleichung (31) gegeben. Wenn es discontinuirliche Gruppen ϑ für $\sigma = 2$ giebt, oder was dasselbe besagt, wenn es Differentialgleichungen der Gauss'schen Reihe giebt, in denen der Integralquotient eindeutig

umkehrbar ist, so müssen dieselben unter den Fällen enthalten sein, die wir erhalten, wenn wir für

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3$$

irgend welche reciproke ganze Zahlen oder Null nehmen. Es wird sich zeigen, dass alle diese Fälle zu discontinuirlichen Gruppen und somit zu Gauss'schen Differentialgleichungen mit eindeutig umkehrbaren Integralquotienten führen.

Wenn $\sigma > 2$ ist, und wir wählen für die

$$\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_{\sigma+1}$$

in dem Ausdrucke (29b) reciproke ganze Zahlen oder Null, so wissen wir, dass jede lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit den singulären Punkten

$$a_1 = 0, \; a_2 = 1, \; a_3, \; a_4, \cdots a_\sigma, \; a_{\sigma+1} = \infty,$$

deren unabhängige Variable z eine eindeutige Function des Integralquotienten ist, unter der Form (26), wo q durch (29b) bestimmt wird, enthalten sein muss. Es entsteht also die Frage:

Lassen sich die Coefficienten der ganzen Function $E_{\sigma-2}(z)$ so bestimmen, dass die Differentialgleichung (26) einen eindeutig umkehrbaren Differentialquotienten besitzt?

Auf die Beantwortung dieser Frage wird ein wesentlicher Theil der nun folgenden Untersuchungen hinzielen; wir werden sehen, dass die Frage zu bejahen ist.

Siebentes Kapitel.

217. Formulirung eines neuen Problems. Differentialgleichungen, die zur selben Familie gehören.

Durch die am Schlusse der vorigen Nummer aufgeworfene Frage sind wir wieder in den Gedankenkreis zurückgekehrt, in welchem sich die Untersuchungen des ersten Kapitels des zehnten Abschnittes bewegen; wir wollen noch durch eine andere Problemstellung den Anschluss an die Betrachtungen, die sich auf Differentialgleichungen derselben Art beziehen, zu gewinnen suchen.

Es war gezeigt worden, dass eine Differentialgleichung zweiter Ordnung der Fuchs'schen Classe, die keinen scheinbar singulären Punkt besitzt, eindeutig bestimmt ist durch Angabe ihrer projectiven Monodromiegruppe ϑ. Wenn die Differentialgleichung

$$(A_2)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = py$$

aber nebst den wirklichen singulären Punkten

$$a_1,\ a_2,\ \cdot\ \cdot\ a_\sigma,\ a_{\sigma+1} = \infty$$

noch die scheinbar singulären Stellen

$$b_1,\ b_2,\ \cdot\cdot\cdot\ b_\varrho$$

besitzt, so enthält der Coefficient p mehr Parameter als die projective Monodromiegruppe ϑ. Dies ergiebt sich schon aus den allgemeinen Untersuchungen der Nr 207 (S 301 ff.), wir können aber die Form des Coefficienten p genau angeben und an derselben die in der genannten Nummer vorgenommene Constantenzählung controlliren.

Der Einfachheit wegen setzen wir voraus, dass die scheinbar singulären Stellen $b_1,\ \cdot\cdot\ b_\varrho$ einfache seien, d. h. dass für $b_\varkappa$ die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung die Werthe

$$\frac{3}{2},\quad -\frac{1}{2}\qquad (\varkappa = 1, 2,\ \ \varrho)$$

besitzen; die Wurzeln der zu $a_\varkappa$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung seien

$$r_{\varkappa 1},\ r_{\varkappa 2};\ r_{\varkappa 1} - r_{\varkappa 2} = \delta_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2,\ \cdot\ \ \sigma+1)$$

Dann hat p in der Differentialgleichung (A_2) die Gestalt

$$(1)\qquad p=\sum_{i=1}^{\sigma}\frac{\alpha_i}{(x-a_i)^2}+\sum_{i=1}^{\sigma}\frac{\beta_i}{(x-a_i)}+\sum_{i=1}^{\varrho}\frac{\bar{\alpha}_i}{(x-b_i)^2}+\sum_{i=1}^{\varrho}\frac{\bar{\beta}_i}{x-b_i}$$

und es ist

$$(2)\qquad \begin{cases}\sum_{i=1}^{\sigma}\beta_i+\sum_{i=1}^{\varrho}\bar{\beta}_i=0,\\ \alpha_i=-\frac{1}{4}\left(1-\delta_i^2\right),\quad \bar{\alpha}_i=\frac{3}{4},\\ \sum_{i=1}^{\sigma}\alpha_i+\sum_{i=1}^{\sigma}a_i\beta_i+\sum_{i=1}^{\varrho}b_i\bar{\beta}_i=-\frac{1}{4}\left(1-\delta_{\sigma+1}^2\right);\end{cases}$$

die Bedingung, dass b_i scheinbar singuläre Stelle sei, lautet

$$(3)\qquad \bar{\beta}_i^2=\varepsilon_i,$$

wo ε_i das Resultat der Substitution von b_i in den Ausdruck

$$p-\frac{\bar{\alpha}_i}{(x-b_i)^2}-\frac{\bar{\beta}_i}{x-b_i}\qquad (i=1,2,\quad \varrho)$$

bedeutet. Wenn wir also noch z. B.

$$a_1=0,\quad a_2=1$$

wählen, so hängt p in der That von

$$3\sigma-3+\varrho$$

Parametern ab.

Wenn also die $3\sigma-3$ Parameter, von denen die Gruppe ϑ abhängt, gegeben sind, so kann man noch über ϱ von den Parametern, die in p auftreten, willkürlich disponiren, z. B. könnte man die scheinbar singulären Stellen in ϱ beliebig vorgeschriebene Punkte der Ebene verlegen

Man kann aber auch die wirklich singulären Stellen

$$(4)\qquad a_1,\ a_2,\ \cdot\cdot\ a_\sigma,\ a_{\sigma+1}$$

festhalten und die übrigen Parameter von p so zu bestimmen suchen, dass die projective Monodromiegruppe ϑ eine vorgeschriebene ist; dann muss aber jedenfalls

$$\varrho\geqq\sigma-2$$

angenommen werden Wenn ϱ genau gleich $\sigma-2$ ist, so stimmt die Anzahl der noch verfügbaren Parameter von p mit der Anzahl der Parameter der Gruppe überein; es steht also zu erwarten, dass sich stets eine und im Allgemeinen auch nur eine Differentialgleichung (A_2) bestimmen lässt, welche die $\sigma+1$ vorgeschriebenen wirklichen singu-

lären Stellen (4) und genau $\sigma - 2$ scheinbar singuläre Stellen besitzt, und deren projective Monodromiegruppe mit ϑ übereinstimmt. Wir werden diese Frage in einer specielleren Fassung behandeln und führen zunächst einige neue Begriffe ein

Wir wollen Differentialgleichungen betrachten, die der Fuchsschen Classe angehören, dieselben wirklichen singulären Punkte haben, und für welche Systeme von Integralquotienten existiren, die bei jedem Umlaufe von x dieselbe projective Substitution erfahren Seien

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n y = 0,$$

$$\text{(B)} \qquad \frac{d^n z}{dx^n} + q_1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \cdots + q_n z = 0$$

zwei Differentialgleichungen von der angegebenen Beschaffenheit,

$$y_1, y_2, \cdots y_n,$$
$$z_1, z_2, \cdots z_n$$

Fundamentalsysteme derselben, deren Quotienten bei jedem Umlaufe von x dieselbe projective Substitution erfahren. Dann wissen wir nach den Ergebnissen der Nr 180 (S. 179), dass wir die Werthe der $z_1, z_2, \cdots z_n$ nach einem Umlaufe von x erhalten, indem wir auf $z_1, z_2, \cdots z_n$ die Substitution anwenden, welche die $y_1, y_2, \cdots y_n$ bei diesem Umlaufe erfahren haben, und dann die so entstandenen Ausdrücke noch mit einem und demselben constanten Factor multipliciren. Daraus folgt, dass die Gleichungen

$$z_\varkappa = r_0 y_\varkappa + r_1 y_\varkappa' + \cdots + r_{n-1} y_\varkappa^{(n-1)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

für die $r_0, r_1, \cdots r_{n-1}$ Ausdrücke ergeben müssen, die sich von rationalen Functionen von x nur durch einen allen gemeinsamen Factor

$$\Lambda$$

unterscheiden, der selbst so beschaffen ist, dass seine logarithmische Ableitung sich rational durch x ausdrücken lässt Wir haben also zwischen den abhängigen Variabeln y, z der Differentialgleichungen (A), (B) eine Beziehung von der Form

$$\text{(5)} \qquad z = \Lambda(\varphi_0 y + \varphi_1 y' + \cdots + \varphi_{n-1} y^{(n-1)}),$$

woselbst die

$$\text{(6)} \qquad \varphi_0, \varphi_1, \cdots \varphi_{n-1}, \quad \frac{d \log \Lambda}{dx}$$

rationale Functionen von x sind. Da überdies (A), (B) der Fuchsschen Classe angehören sollten, so darf der Nenner von

$$\frac{d \log \Delta}{dx}$$

nur einfache Factoren enthalten.

Wir sagen allgemein mit Herrn Poincaré von zwei linearen Differentialgleichungen (A), (B) mit rationalen Coefficienten, sie gehörten zur selben Familie, wenn zwischen ihren abhängigen Variabeln eine Beziehung von der Form (5) stattfindet, in welcher die Functionen (6) rational in x sind. Diese Beziehung zwischen zwei Differentialgleichungen ist offenbar eine gegenseitige; zwei Differentialgleichungen derselben Familie haben ferner, wie man sofort übersieht, bei geeigneter Wahl eines Fundamentalsystems von Integralquotienten sowohl dieselbe projective Monodromiegruppe ϑ, als auch dieselbe projective Transformationsgruppe Θ. Für Differentialgleichungen derselben Art (Nr. 165, S. 120) ist einfach Δ gleich Eins.

Untersuchen wir nun den Charakter der Differentialgleichungen (A) und (B) derselben Familie in der Umgebung der singulären Stellen.

Wenn eine Stelle $x = a$ Unbestimmtheitsstelle für die Integrale der einen Differentialgleichung ist, so ist sie es im Allgemeinen auch für alle Differentialgleichungen derselben Familie, ausgenommen den besonderen Fall, wo sich die Unbestimmtheit bei $x = a$ durch Multiplication von y mit einer Function von x beseitigen lässt. Wir beschränken uns im Folgenden auf die Betrachtung von Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe und bemerken nur, dass die in den Nummern 163—165 für die Differentialgleichungen derselben Art und für cogrediente Differentialgleichungen angestellten Untersuchungen sich in ähnlicher Weise auf den Begriff der Familie übertragen lassen, wenn man, statt wie bei der Art die Integrale und die zugehörigen homogenen Gruppen, hier die Integralquotienten und die entsprechenden projectiven Gruppen zu Grunde legt. Es folgt dies einfach daraus, dass der Uebergang von einer Differentialgleichung zu einer anderen von derselben Familie erfolgen kann, indem man zunächst zu einer Differentialgleichung derselben Art übergeht und dann die Transformation ausführt, welche die Integralquotienten conservirt.

Wenn die Differentialgleichung (A) zur Fuchs'schen Classe gehört, so wird die Differentialgleichung (B) derselben Familie dann und nur dann auch zur Fuchs'schen Classe gehören, wenn Δ keine Unbestimmtheitsstelle enthält, d. h. wenn der Nenner von

$$\frac{d \log \Delta}{dx}$$

nur einfache Factoren besitzt. Bedeutet dann $x = a$ eine singuläre Stelle von (A), in deren Umgebung die Entwickelungen der Integrale

Logarithmen enthalten, so hat $x = a$ auch für jede Differentialgleichung derselben Familie denselben Charakter.

Sei ferner $x = a$ ein Punkt, in dessen Umgebung die Entwickelungen der Integrale von (A) keine Logarithmen enthalten, und bedeuten

$$r_1, \; r_2, \cdots \; r_n$$

die Wurzeln der zu $x = a$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung von (A), so haben die Wurzeln der zu demselben Punkte gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung von (B) die Gestalt

$$\lambda + r_1 + g_1, \quad \lambda + r_2 + g_2, \cdot \quad \lambda + r_n + g_n,$$

wo λ irgend eine beliebige constante Grösse bedeutet und $g_1, g_2, \cdot \cdot g_n$ ganze positive oder negative Zahlen sind.

Hieraus folgt, dass Differentialgleichungen derselben Familie dieselben wirklichen singulären Punkte haben, während ihre scheinbar singulären Stellen verschieden sein können.

218. Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die zur selben Familie gehören. Satz von Poincaré.

Wir specialisiren nunmehr die oben an die Differentialgleichung (A_2) geknüpften Fragen, indem wir uns auf die Betrachtung der mit (A_2) zur selben Familie gehörigen Gleichungen beschränken. In der That sind ja unter den Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe, deren projective Monodromiegruppe ϑ dieselbe ist, wie für die Differentialgleichung (A_2), und deren wirkliche singuläre Stellen mit denen von (A_2) übereinstimmen, die mit (A_2) zur selben Familie und zur Fuchs'schen Classe gehörigen als specielle Fälle enthalten.

Sei die Differentialgleichung

$$(B_2) \qquad \frac{d^2 z}{dx^2} + q_1 \frac{dz}{dx} + q_2 z = 0$$

von dieser Beschaffenheit, dann ist also

$$z = A(fy + gy'),$$

oder, wie wir mit Rücksicht auf die Nr 19 (Bd I, S 52) auch schreiben können,

$$(7) \qquad z = A_1 \frac{d}{dx}(My),$$

wo

$$M = e^{\int \frac{f}{g} dx}, \quad A_1 = A g e^{-\int \frac{f}{g} dx}$$

gesetzt wurde

Ebenso können wir auch für beliebiges n die Relation (5), die zwischen den abhängigen Variabeln zweier Differentialgleichungen derselben Familie besteht, in die Form setzen

$$z = A\varphi_{n-1} v_1 v_2 \cdot \cdot v_{n-1} \frac{d}{dx} \frac{1}{v_{n-1}} \frac{d}{dx} \cdot \cdot \frac{1}{v_2} \frac{d}{dx} \frac{y}{v_1},$$

wir beschränken uns aber der Einfachheit wegen auf die Betrachtung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Wir sehen, dass der Uebergang von einer Differentialgleichung (A) zu einer andern derselben Familie ausgeführt werden kann, indem man die abhängige Variable y von (A) mit einer Function multiplicirt, dann das Product differentiirt, das Resultat abermals mit einer Function multiplicirt, wieder differentiirt u. s. w.

Durch Ausführung der Multiplicationen werden die Differenzen der Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen nicht geändert, dagegen können diese Differenzen durch Ausführung der Differentiationen geändert werden.

Es wird nämlich im Allgemeinen der Exponent, zu welchem eine Function gehört, die sich im Punkte $x = a$ wie ein Integral einer linearen Differentialgleichung verhält, durch Differentiation um eine Einheit erniedrigt, es kann aber, wenn dieser Exponent gleich Null ist, der im Satze 2. der Nr. 40 (Bd. I, S. 141) hervorgehobene Ausnahmefall eintreten. Sei z. B für $n = 2$ in der Umgebung von $x = a$

$$My = c_1(\alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \cdot \cdot) + c_2(\beta_1(x-a) + \beta_2(x-a)^2 + \cdot \cdot),$$

wo c_1, c_2 willkürliche Constanten bedeuten, dann ist, wenn

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0$$

ist, die Ableitung dieses Ausdruckes in der Form

$$c_1(3\alpha_3(x-a)^2 + \cdot \cdot) + \left(c_2 + \frac{\alpha_1}{\beta_1} c_1\right)(\beta_1 + 2\beta_2(x-a) + \cdot \cdot)$$

dargestellt. Während also in der Differentialgleichung für My die zu $x = a$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung die Wurzeln 0, 1 hatte, sind diese Wurzeln für die Differentialgleichung, der

$$\frac{d(My)}{dx}$$

genügt, 0, 2 geworden; der für die erste Differentialgleichung reguläre Punkt $x = a$ hat sich demnach in eine ausserwesentlich singuläre Stelle verwandelt, er ist also für (B_2) jedenfalls scheinbar singulärer Punkt geworden. So können also durch die Differentiationen neue scheinbar singuläre Punkte eingeführt werden; es können aber umgekehrt auch scheinbar singuläre Punkte verschwinden.

In der That, wenn wiederum für $n = 2$, z. B.

$$My = c_1(\alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \cdots) + c_2(\beta_2(x-a)^2 + \beta_3(x-a)^3 + \cdots)$$

ist, so folgt

$$\frac{d(My)}{dx} = c_1(\alpha_1 + 2\alpha_2(x-a) + \cdots) + c_2(2\beta_2(x-a) + \cdots);$$

während also der Punkt $x = a$ für (A_2) jedenfalls scheinbar singuläre Stelle war, kann derselbe (wenn nämlich A_1 für $x = a$ weder verschwindet noch unendlich wird) für (B_2) reguläre Stelle geworden sein. Wir können allgemein sagen:

Die Differentiation, die in dem Ausdrucke (7) vorkommt, kann die Differenz der Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung nur dann um eine Einheit vermehren oder vermindern, wenn eine dieser Wurzeln gleich Null ist. Im Sinne der in der Nr. 197 (S. 256) eingeführten Auffassung heisst dies, es kann nur in diesem Falle eine neue scheinbar singuläre Stelle eintreten oder eine solche Stelle wegfallen.

Sei

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \varphi_1\frac{dv}{dx} + \varphi_0 v = 0 \tag{8}$$

die Differentialgleichung, welcher My genügt, dann befriedigt die Ableitung dieses Productes die Differentialgleichung

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \left(\varphi_1 - \frac{\varphi_0'}{\varphi_0}\right)\frac{dw}{dx} + \left(\varphi_0 - \frac{\varphi_1\varphi_0'}{\varphi_0} + \varphi_1'\right)w = 0, \tag{9}$$

und es besitzt die Differentialgleichung (8) genau ebensoviele scheinbar singuläre Stellen wie (A_2) und (9) ebensoviele wie (B_2). In die Gleichung (9) werden zunächst durch die Nullstellen von φ_0 scheinbar singuläre Stellen eingeführt, die in (8) nicht vorhanden waren.

In der rationalen Function φ_0 ist, da (A_2) zur Fuchs'schen Classe gehören sollte, der Zähler von um Zwei niedrigerem Grade wie der Nenner. Möge φ_0 an δ Stellen von der zweiten Ordnung und an ε Stellen von der ersten Ordnung unendlich werden, dann ist die Anzahl ν der endlichen Nullstellen von φ_0

$$\nu = 2\delta + \varepsilon - 2,$$

also

$$\nu \equiv \varepsilon \pmod 2.$$

Die einfachen Unendlichkeitsstellen von φ_0 sind in dem in der Nr. 112 (Bd I, S. 401) eingeführten Sinne einfache singuläre Punkte von (8), es ist also eine Lösung von (8) in der Umgebung einer solchen Stelle regulär und gehört zum Exponenten Null. Durch die Differentiation wird also die Differenz der Wurzeln der zugehörigen determinirenden

Fundamentalgleichung um eine Einheit vermehrt oder vermindert, d. h. es tritt entweder ein neuer scheinbar singulärer Punkt hinzu, oder es geht ein solcher verloren. Die ε einfachen Unendlichkeitsstellen von φ_0 bewirken also, dass sich die Anzahl der scheinbaren singulären Stellen der Differentialgleichung (9) von der Anzahl dieser Stellen in (8) um eine Zahl τ unterscheidet, welche die Congruenz

$$\tau \equiv \varepsilon \pmod 2$$

befriedigt. Da durch die ν Nullstellen von φ_0 ebensoviele scheinbar singuläre Stellen von (9) erzeugt werden, beträgt also die Gesammtzahl der in (9) neu hinzugetretenen scheinbar singulären Stellen $\tau + \nu$, und es ist

$$\tau + \nu \equiv 2\varepsilon \equiv 0 \pmod 2.$$

Wir haben somit den von Herrn Poincaré herrührenden Satz:

Für alle Differentialgleichungen (zweiter Ordnung) der Fuchs'schen Classe, die zur selben Familie gehören, lässt die Anzahl der scheinbaren singulären Stellen (im Sinne der Nr. 197, S. 256) denselben Rest modulo Zwei.

219. **Bestimmung einer Differentialgleichung der Familie mit der Minimalzahl von scheinbar singulären Punkten.**

Wenn für die Differentialgleichung (A_2) die Zahlen ϱ und σ denselben Rest modulo Zwei lassen, so kann es eine Differentialgleichung derselben Familie geben, die $\sigma - 2$ scheinbar singuläre Punkte besitzt (vergl. Nr. 217, S. 348); dagegen ist dies nicht möglich, wenn von den Zahlen ϱ und σ die eine gerade und die andere ungerade ist. Im letzteren Falle kann es noch eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Differentialgleichungen derselben Familie geben, die $\sigma - 1$ scheinbar singuläre Stellen enthalten, denn für $\varrho = \sigma - 1$ enthält der Coefficient p von (A_2) einen Parameter mehr, als durch die Forderung der Zugehörigkeit zu einer bestimmten Familie fixirt werden.

Soll die Differentialgleichung (B_2), die mit (A_2) zur selben Familie gehört, auch die Form

$$(B_2) \qquad \frac{d^2 z}{dx^2} = q z$$

haben, so müssen in der Beziehung

$$(10) \qquad z = \psi(-\chi y + y'),$$

die zwischen den abhängigen Variabeln von (A_2) und (B_2) besteht, die Coefficienten ψ, χ der Gleichung

$$\chi^2 + \frac{d\chi}{dx} = p + \frac{\text{const}}{\psi^2} \tag{11}$$

Genüge leisten, wo χ eine rationale Function bedeutet. Es ist dann, wie eine einfache Rechnung zeigt,

$$q = p + \frac{1}{\psi}\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{2}{\psi}(\psi\chi' + \psi'\chi). \tag{12}$$

In diesem Falle muss also ψ die Quadratwurzel aus einer rationalen Function sein.

Nehmen wir zunächst an, dass die Zahlen ϱ und σ in der Differentialgleichung (A_2) denselben Rest modulo Zwei lassen; sei dann

$$2m = \varrho - \sigma.$$

Wäre diese Zahl negativ, so müsste

$$\varrho < \sigma,$$

also jedenfalls ϱ kleiner oder höchstens gleich $\sigma - 2$ sein; in diesem Falle wäre die Differentialgleichung (A_2) selbst schon so beschaffen, dass die Anzahl ihrer scheinbar singulären Stellen nicht grösser ist wie $\sigma - 2$. Wir wollen uns die Aufgabe stellen, wenn m nicht negativ ist, die Differentialgleichung (B_2) so zu bestimmen, dass in derselben höchstens $\sigma - 2$ scheinbar singuläre Stellen auftreten.

Setzen wir zu diesem Ende

$$\frac{1}{\psi^2} = \frac{(x-b_1)(x-b_2) \quad (x-b_\varrho)(x-\partial_1)(x-\partial_2)\cdot\;\cdot(x-\partial_{\sigma-2})}{(x-a_1)^2(x-a_2)^2 \quad (x-a_\sigma)^2(x-c_1)^2(x-c_2)^2 \quad \cdot(x-c_m)^2}, \tag{13}$$

wo die $\partial_1, \cdot\cdot\, \partial_{\sigma-2}, c_1, \cdot\cdot\, c_m$ vorläufig unbestimmt sind, und versuchen, diese $m + \sigma - 2$ Constanten und eine $(m + \sigma - 1)^{\text{te}}$ Constante c_0 so zu bestimmen, dass die rationale Function

$$p + \frac{c_0}{\psi^2} = P$$

sich in die Form der linken Seite der Gleichung (11)

$$\chi^2 + \frac{d\chi}{dx} \tag{14}$$

setzen lässt. P wird im Unendlichen von zweiter Ordnung Null, also muss die rationale Function χ im Unendlichen von der ersten Ordnung verschwinden.

Seien $\lambda_\varkappa$ für $\varkappa = 1, 2, \cdot\;\cdot\, \nu$ die Unendlichkeitsstellen von χ und $\mu_\varkappa$ die zugehörigen Cauchy'schen Résidus, dann ist offenbar

$$\chi = \sum_{\varkappa=1}^{\nu} \frac{\mu_\varkappa}{x - \lambda_\varkappa}.$$

Setzt man

$$\chi_\varkappa = \lim_{x=\lambda_\varkappa} \left(\chi - \frac{\mu_\varkappa}{x - \lambda_\varkappa}\right),$$

so ist

$$\chi^2 + \frac{d\chi}{dx} = \sum_{\varkappa=1}^{\nu} \frac{\mu_\varkappa^2 - \mu_\varkappa}{(x-\lambda_\varkappa)^2} + 2\sum_{\varkappa=1}^{\nu} \frac{\chi_\varkappa \mu_\varkappa}{x - \lambda_\varkappa};$$

wenn also

$$P = \sum_{\varkappa=1}^{\nu} \frac{M_\varkappa}{(x-\lambda_\varkappa)^2} + \sum_{\varkappa=1}^{\nu} \frac{N_\varkappa}{x-\lambda_\varkappa}$$

ist, so muss sein

(15) $$M_\varkappa = \mu_\varkappa^2 - \mu_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \nu)$$

Diese Gleichungen bestimmen, wenn P gegeben ist, die $\mu_\varkappa$ und folglich die Function χ. Wenn also die $\lambda_1, \cdots \lambda_\nu$ und die $M_1, \cdots M_\nu$ bekannt sind, so sind dadurch die $N_1, \cdots N_\nu$ bereits bestimmt, falls P in der Form

$$\chi^2 + \frac{d\chi}{dx}$$

darstellbar sein soll; es ist nämlich

(16) $$\begin{cases} N_\varkappa = 2\mu_\varkappa \chi_\varkappa & (\varkappa = 1, 2, \cdots \nu), \\ \sum_{\varkappa=1}^{\nu} N_\varkappa = 0. \end{cases}$$

Setzen wir

$$\lim_{x=\lambda_\varkappa} \left\{P - \frac{M_\varkappa}{(x-\lambda_\varkappa)^2} - \frac{N_\varkappa}{x-\lambda_\varkappa}\right\} = P_\varkappa,$$

$$\lim_{x=\lambda_\varkappa} \left\{\frac{d\chi}{dx} + \frac{\mu_\varkappa}{(x-\lambda_\varkappa)^2}\right\} = \chi_\varkappa',$$

so ist

(17) $$P_\varkappa = \chi_\varkappa^2 + (1 + 2\mu_\varkappa)\chi_\varkappa'.$$

Die Function P hat die $m + \sigma + \varrho = \nu$ Unendlichkeitsstellen zweiter Ordnung

$$a_1, \cdots a_\sigma, \;\; b_1, \cdots b_\varrho, \;\; c_1, \cdots c_m;$$

damit P in der Form (14) darstellbar sei, müssen für jede derselben die Bedingung (17) oder die Gleichungen (15), (16) erfüllt sein.

Betrachten wir zunächst die Unendlichkeitsstellen $b_\varkappa$, so ist, wenn wir $\lambda_\varkappa = b_\varkappa$ nehmen, zufolge der durch die Gleichungen (1), (2) (Nr. 217, S. 348) gegebenen Form von p,

$$M_\varkappa = \bar{\alpha}_\varkappa = \frac{3}{4},$$

also nach (15)

$$\mu_\varkappa^2 - \mu_\varkappa = \frac{3}{4}.$$

Nehmen wir z. B. die Wurzel

$$\mu_\varkappa = -\frac{1}{2}$$

dieser Gleichung, so lautet (17)

$$P_\varkappa = \chi_\varkappa^2.$$

Andererseits ist aber nach (16)

$$N_\varkappa = -\chi_\varkappa, \tag{18}$$

und nach (1), (2)

$$N_\varkappa = \bar{\beta}_\varkappa, \tag{19}$$

so dass also

$$P_\varkappa = \bar{\beta}_\varkappa^2$$

sein muss. Da aber für $x = b_\varkappa$ die Function $\frac{1}{\psi^2}$ verschwindet, so ist einfach

$$P_\varkappa = \varepsilon_\varkappa,$$

wo $\varepsilon_\varkappa$ die in der Nr. 217 (S. 348) festgelegte Bedeutung hat. D. h. die Bedingung (17) reducirt sich auf

$$\varepsilon_\varkappa = \bar{\beta}_\varkappa^2,$$

und dies ist nichts anderes wie die Gleichung (3), welche besagt, dass $b_\varkappa$ scheinbar singuläre Stelle der Differentialgleichung (A_2) ist.

Für die Unendlichkeitsstellen $b_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots \varrho)$ von P sind also die Bedingungen (17) schon von selbst erfüllt.

Wir können dann die in P noch vorhandenen $m + \sigma - 1$ Constanten so einrichten, dass die Bedingungen (17) auch für die übrigen $n + \sigma$ Unendlichkeitsstellen von P erfüllt sind, denn wegen der Gleichung

$$\sum_{\varkappa=1}^{\nu} N_\varkappa = 0$$

sind nur $m + \sigma - 1$ dieser Bedingungen von einander unabhängig. Dann hat also P die Form (14). Die Function χ lässt sich alsdann auf die folgende Weise bestimmen.

Es ist:

$$\chi = \sum_{\varkappa=1}^{\sigma} \frac{C_\varkappa}{x - a_\varkappa} - \frac{1}{2} \sum_{\varkappa=1}^{\varrho} \frac{1}{x - b_\varkappa} + \sum_{\varkappa=1}^{m} \frac{D_\varkappa}{x - c_\varkappa},$$

so dass also die $2m + \sigma = \varrho$ Grössen

$$C_1, \cdot \cdot C_\sigma; \ c_1, \cdot \cdot c_m; \ D_1, \cdot \cdot D_m$$

zu bestimmen sind. Dies geschieht mit Hülfe der aus (18), (19) folgenden ϱ Gleichungen

(20) $$-\chi_\varkappa = \bar{\beta}_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ \varrho)$$

Setzen wir

$$\chi = \frac{H(x)}{K(x) \prod_{\varkappa=1}^{\sigma} (x - a_\varkappa) \prod_{\varkappa=1}^{\varrho} (x - b_\varkappa)},$$

wo $H(x)$ eine ganze rationale Function $(m + \varrho + \sigma - 1)^{\text{ten}}$ Grades, $K(x)$ eine ebensolche Function m^{ten} Grades bedeutet, so erkennt man leicht, dass die Gleichungen (20) in den Coefficienten von $H(x)$ und $K(x)$ linear sind; das Gleiche gilt von den Gleichungen

$$\lim_{x=b_\varkappa} [(x - b_\varkappa)\chi] = -\frac{1}{2} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ \varrho),$$

welche besagen, dass das Résidu von χ in Bezug auf $b_\varkappa$ gleich $-\frac{1}{2}$ ist Diese Gleichungen reichen im Allgemeinen zur Bestimmung der Coefficienten von $H(x)$ und $K(x)$ gerade aus, so dass also im Allgemeinen die Bestimmung von χ auch nur auf eine einzige Weise möglich ist.

Hat man χ und dadurch auch P und ψ bestimmt, so genügt

$$z = \psi(-\chi y + y')$$

der Differentialgleichung (B_2), wo q durch (12) gegeben wird.

Von dieser Gleichung ist zunächst leicht einzusehen, dass sie die Punkte $b_1, b_2, \cdot \cdot b_\varrho$ nicht mehr zu scheinbar singulären Stellen hat sondern dass sich das allgemeine Integral von (B_2) in der Umgebung von $b_\varkappa$ regulär verhält. Es ist nämlich für das allgemeine Integral y von (A_2) in der Umgebung von $b_\varkappa$

$$y = (x - b_\varkappa)^{-\frac{1}{2}} (\alpha_0 + \alpha_1(x - b_\varkappa) + \alpha_2(x - b_\varkappa)^2 + \cdots),$$

$$\frac{dy}{dx} = (x - b_\varkappa)^{-\frac{3}{2}} \left(-\frac{1}{2}\alpha_0 + \frac{1}{2}\alpha_1(x - b_\varkappa) + \cdot \ \cdot\right),$$

also da

$$\chi = \frac{1}{x - b_\varkappa} \left\{-\frac{1}{2} + \beta_1(x - b_\varkappa) + \cdot\cdot \right\}$$

ist, erhält man

$$-\chi y + y' = (x - b_\varkappa)^{-\frac{1}{2}} (\gamma_0 + \gamma_1(x - b_\varkappa) + \ \cdot\cdot).$$

Endlich ist

$$\psi(x) = (x - b_\varkappa)^{\frac{1}{2}} (\delta_0 + \delta_1 (x - b_\varkappa) + \cdots),$$

also in der That

$$z = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 (x - b_\varkappa) + \varepsilon_2 (x - b_\varkappa)^2 + \cdots.$$

Dagegen hat die Differentialgleichung (B_2) die Stellen $\partial_1, \partial_2, \cdots \partial_{\sigma-2}$ zu scheinbar singulären Punkten, so dass also, wie verlangt worden war, (B_2) nicht mehr wie $\sigma - 2$ scheinbar singuläre Punkte besitzt, d. h. genauer gesagt, nicht mehr wie $\sigma - 2$ einfache, von den wirklich singulären Stellen $a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$ getrennt liegende scheinbar singuläre Punkte.

Für die wirklich singulären Stellen $a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$ stimmen, wie man sofort übersieht, die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen der Differentialgleichungen (A_2) und (B_2) überein, wenn, wie wir bisher stillschweigend vorausgesetzt haben, keine der Grössen $b_1, b_2, \cdots b_\varrho$ und $\partial_1, \partial_2, \cdots \partial_{\sigma-2}$ mit einer der Grössen $a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$ zusammenfällt.

220. Die Reducirte der Familie. Allgemeine Bemerkungen.

Die Reduction der Differentialgleichung (A_2) auf (B_2) ist aber in genau derselben Weise ausführbar, wenn einige der Punkte $b_1, b_2, \cdots b_\varrho$ mit Punkten der Reihe $a_1, a_2, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1}$ coincidiren, denn das zur Herstellung der Function ψ eingeschlagene Verfahren lässt sich auch in diesem Falle in ganz unveränderter Form anwenden.

Nehmen wir also an, es mögen für die Differentialgleichung (A_2) mit dem wirklich singulären Punkte $a_\varkappa$ etwa $g_\varkappa$ scheinbar singuläre Punkte vereinigt sein, d. h. im Sinne der in der Nr. 197 (S. 256) eingeführten Sprechweise, es sei der reale Theil von $\delta_\varkappa$ zwischen den positiven ganzen Zahlen $g_\varkappa$ und $g_\varkappa + 1$ gelegen, ferner mögen $b_1, b_2, \cdots b_\tau$ die von den wirklichen singulären Punkten getrennt liegenden scheinbar singulären Stellen bedeuten, die wir nach wie vor als einfache voraussetzen wollen. Wir können dann die Reduction von (A_2) auf (B_2) so vornehmen, dass wir nebst den τ Stellen $b_1, \cdots b_\tau$ noch jeden der Punkte $a_\varkappa$ $\bar{g}_\varkappa$-fach, wo

$$\bar{g}_\varkappa \leqq g_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma + 1)$$

ist, als scheinbar singulären Punkt aufzählen, es muss nur

$$\tau + \sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1} \bar{g}_\varkappa \equiv \sigma \pmod 2$$

sein. In (13) hat man dann

$$2m = \tau + \sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1} \bar{g}_\varkappa - \sigma, \quad \varrho = \tau + \sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1} \bar{g}_\varkappa$$

und ferner etwa

$$b_{\tau+1} = \cdots = b_{\tau+\bar{g}_1+1} = a_1, \quad b_{\tau+\bar{g}_1+2} = \cdots = b_{\tau+\bar{g}_1+\bar{g}_2+1} = a_2,$$

u. s. w.

zu nehmen. Wenn einige der b_i gleich Unendlich zu nehmen sind, so sind natürlich die entsprechenden Linearfactoren im Zähler von (13) einfach wegzulassen, indem ja bekanntlich dem Auftreten einer unendlichen Wurzel in einer Gleichung stets die Erniedrigung des Grades der Gleichung um eine Einheit entspricht. In der Differentialgleichung (B_2), die auf diese Weise entsteht, ist die Differenz der Wurzeln der zu $a_\varkappa$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung im Allgemeinen gleich

$$\delta_\varkappa - \bar{g}_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

geworden, und an die Stelle der $b_1, b_2, \cdots b_\varrho$ sind die $\sigma - 2$ einfachen (im Allgemeinen von den $a_\varkappa$ getrennt liegenden) scheinbar singulären Stellen $\partial_1, \partial_2, \cdots \partial_{\sigma-2}$ eingetreten.

Nehmen wir insbesondere

$$\bar{g}_\varkappa = g_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma + 1),$$

so dass also

$$\varrho = \tau + \sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1} g_\varkappa$$

die wirklich vorhandene Anzahl einfacher scheinbar singulärer Stellen (im Sinne der Nr. 197, S. 256) angiebt; wenn dann ϱ und σ modulo Zwei gleiche Reste lassen, und wir durch $b_1, \cdots b_\varrho$ die sämmtlichen scheinbar singulären Stellen (jede so oft gezählt, als ihre Vielfachheit erfordert) bezeichnen, so ergiebt das zur Bestimmung der Function (13) dargelegte Verfahren eine mit (A_2) zur selben Familie gehörige Differentialgleichung (B_2), die im strengen Sinne des Wortes nur $\sigma - 2$ einfache scheinbar singuläre Stellen besitzt. Von diesen Stellen können eventuell auch einige in die Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1}$ hineinfallen; im Allgemeinen liegen die $\partial_1, \partial_2, \cdots \partial_{\sigma-2}$ von einander und von den $a_\varkappa$ getrennt, und dann ist die Differenz der Wurzeln der zu $a_\varkappa$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung von (B_2) gleich $\delta_\varkappa - g_\varkappa$. Da die zur Bestimmung von ψ beziehungsweise χ dienenden Gleichungen eine eindeutige Bestimmung liefern, so giebt es auch stets nur eine Differentialgleichung von der für (B_2) angegebenen Beschaffenheit, die mit (A_2) zur selben Familie gehört. Wir haben also den Satz:

Wenn die Differentialgleichung (A_2) σ wirkliche im Endlichen gelegene und ϱ einfach zu zählende scheinbar singuläre Stellen besitzt, so giebt es, wenn ϱ und σ modulo Zwei gleiche Reste lassen, eine und nur eine mit (A_2) zur selben Familie gehörige Differentialgleichung (B_2), die nur $\sigma - 2$ einfach zu zählende scheinbar singuläre Stellen hat. Man nennt diese Differentialgleichung (B_2) nach Herrn Poincaré die Reducirte der Familie.

Wenn ϱ und σ modulo Zwei incongruent sind, so kann man auf analoge Weise zeigen, dass sich eine mit (A_2) zur selben Familie gehörige Differentialgleichung (B_2) bestimmen lässt, die $\sigma - 1$ scheinbar singuläre Punkte besitzt und deren Coefficient q noch einen willkürlich bleibenden Parameter enthält. Ueber diesen kann man z. B. so disponiren, dass einer der $\sigma - 2$ scheinbar singulären Punkte eine vorgeschriebene Lage erhält. Dabei liefern dann die Bestimmungsgleichungen von (B_2) diese Gleichung auch in eindeutiger Weise. Man kann dann ebenso wie vorhin die Reduction entweder so ausführen, dass man nur die von den wirklichen singulären Punkten getrennt liegenden scheinbaren singulären Stellen in's Spiel bringt, oder so, dass man auch noch einen Theil der mit wirklichen coincidirenden scheinbaren singulären Stellen, oder endlich so, dass man alle scheinbaren singulären Stellen (im strengen Sinne) mit heranzieht. Im letzteren Falle erhält man eine eindeutig determinirte Differentialgleichung (B_2), die genau $\sigma - 1$ einfach zu zählende scheinbar singuläre Stellen besitzt (über eine derselben ist willkürlich disponirt worden), und die in diesem Falle als die Reducirte der Familie anzusehen ist.

Es bedarf noch der Erörterung, dass die Reducirte innerhalb der Familie auch wirklich eindeutig determinirt ist, d. h. dass man stets zur selben Reducirten kommt, von welcher Differentialgleichung (A_2) der Familie man auch ausgegangen sein mag. Hat man aber zwei Differentialgleichungen, die zur selben Familie gehören, für welche die Wurzeln der zu den wirklichen singulären Punkten $a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen übereinstimmen, und die nicht mehr wie $\sigma - 2$ einfach zu zählende scheinbar singuläre Stellen besitzen, so muss in der zwischen den abhängigen Variabeln y, z bestehenden Beziehung

$$z = \varDelta(fy + gy')$$

g verschwinden und $\varDelta f$ sich auf eine Constante reduciren, d. h. die Differentialgleichungen sind identisch. Also kann es innerhalb einer Familie nicht zwei verschiedene Reducirte geben.

Die hier für Differentialgleichungen zweiter Ordnung entwickelten Resultate lassen sich im Wesentlichen auch auf Differentialgleichungen beliebiger Ordnung übertragen. Wir wollen dies hier des Näheren nicht ausführen, sondern ähnliche Betrachtungen, wie wir sie hier für die Integralquotienten einer linearen Differentialgleichung angestellt haben, nunmehr für die Integrale selbst anstellen und dabei die Ordnung der Differentialgleichung beliebig lassen. Wenn es nämlich auch bei Behandlung der Umkehrungsfragen geboten erscheint, die Integralquotienten in den Vordergrund der Untersuchung zu stellen, so darf man doch hierbei nicht stehen bleiben. Denn eine nicht geringe Anzahl von Eigenschaften tritt deutlicher hervor, wenn man statt der Quotienten die Integrale selbst studirt, andere Eigenschaften können überhaupt nur an den Integralen dargelegt werden.

Es ist dies eine ähnliche Erscheinung, wie sie auch in vielen anderen Gebieten der Mathematik zu Tage tritt, wo durch den Uebergang von nicht homogenen Ausdrücken zu homogenen Vieles vereinfacht, Vieles überhaupt erst zugänglich wird, so z. B. in der algebraischen und arithmetischen Theorie der algebraischen Formen, wo manche Fragen erst bei Betrachtung homogener Functionen formulirt werden können. Dass auch bei den Umkehrproblemen die Betrachtung der Integrale selbst zu wesentlich neuen Gesichtspunkten führt, wird sich an späterer Stelle zeigen, wo wir statt z. B. für Differentialgleichungen zweiter Ordnung Functionen des Integralquotienten

$$\eta = \frac{y_2}{y_1}$$

zu untersuchen, homogene Functionen der Integrale y_1, y_2 studiren werden. Von der Betrachtung homogener Functionen der y_1, y_2 können wir dann stets wieder zu den Functionen von η herabsteigen, indem wir den Grad jener homogenen Functionen gleich Null annehmen.

221. Differentialgleichung für die Integralquotienten einer linearen Differentialgleichung dritter Ordnung.

Ehe wir das Gebiet der Integralquotienten verlassen, wollen wir der Vollständigkeit wegen noch die algebraische Differentialgleichung aufstellen, der die Integralquotienten einer linearen Differentialgleichung dritter Ordnung Genüge leisten Wir wissen, dass diese Differentialgleichung von der fünften Ordnung sein muss (Nr. 180, S. 181); sie spielt für $n = 3$ dieselbe Rolle wie die Gleichung (4) der Nr. 180 (S. 184) für $n = 2$.

Möge die Differentialgleichung dritter Ordnung in der Form

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + 3p_2 \frac{dy}{dx} + p_3 y = 0, \quad p_1 = 0,$$

vorgelegt sein. Dann lässt sich durch Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} + \frac{3}{4} p_2 \xi = 0$$

oder, wenn

$$\frac{1}{\xi^2} = \frac{dz}{dx}$$

gesetzt wird, durch Integration von

$$\Delta \binom{z}{x} = 3p_2$$

die Differentialgleichung für y in die Form setzen

(1) $$\frac{d^3 u}{dz^3} + \vartheta u = 0,$$

wo (Nr. 183, S. 198)

$$u = \frac{dz}{dx} y,$$

$$\vartheta = \frac{1}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^3} \left(p_3 - \frac{3}{2} \frac{dp_2}{dx}\right)$$

zu nehmen ist.

Seien u_1, u_2 zwei linear unabhängige Lösungen von (1), dann ist

$$-\vartheta u_2 = \frac{d^3 u_2}{dz^3} = \frac{d^3}{dz^3} (u_1 s),$$

wenn wir

$$s = \frac{u_2}{u_1}$$

setzen. Wir erhalten folglich mit Rücksicht auf die Differentialgleichung (1)

$$-\vartheta u_2 = u_1 \frac{d^3 s}{dz^3} + 3 \frac{du_1}{dz} \frac{d^2 s}{dz^2} + 3 \frac{d^2 u_1}{dz^2} \frac{ds}{dz} - \vartheta u_1 s,$$

oder

(2) $$0 = u_1 s^{(3)}(z) + 3u_1'(z) s''(z) + 3u_1''(z) s'(z),$$

wo die oberen Accente Ableitungen nach z bedeuten.

Differentiiren wir diese Gleichung zweimal nach z und entfernen mit Hülfe von (1) die Ableitungen höherer als zweiter Ordnung von u_1, so kommt

$$0 = (s^{(4)}(z) - 3s'(z)\vartheta)u_1 + 4u_1'(z)s^{(3)}(z) + 6u_1''(z)s''(z),$$

$$0 = [s^{(5)}(z) - 9s''(z)\vartheta + 3s'(z)\vartheta'(z)]u_1 + [5s^{(4)}(z) - 3s'(z)\vartheta]u_1'(z) + 10u_1''(z)s^{(3)}(z).$$

Eliminiren wir aus diesen beiden Gleichungen und aus (2) die Grössen

$$u_1, \quad u_1'(z), \quad u_1''(z),$$

so erhalten wir die gesuchte Differentialgleichung fünfter Ordnung für die Integralquotienten s von (1) in der Form

$$\begin{vmatrix} \frac{d^5s}{dz^5} - 9\frac{d^2s}{dz^2}\vartheta - 3\frac{ds}{dz}\frac{d\vartheta}{dz} & 5\frac{d^4s}{dz^4} - 3\frac{ds}{dz}\vartheta & 10\frac{d^3s}{dz^3} \\ \frac{d^4s}{dz^4} - 3\frac{ds}{dz}\vartheta & 4\frac{d^3s}{dz^3} & 6\frac{d^2s}{dz^2} \\ \frac{d^3s}{dz^3} & 3\frac{d^2s}{dz^2} & 3\frac{ds}{dz} \end{vmatrix} = 0.$$

Bedeuten s_1, s_2 zwei Lösungen dieser Differentialgleichung, so ist die allgemeine Lösung s in der Form

$$s = \frac{A + Bs_1 + Cs_2}{A' + B's_1 + C's_2}$$

darstellbar, wo A, B, C, A', B', C' willkürliche Integrationsconstanten bedeuten, und ein Fundamentalsystem von (1) ist durch

$$(s_1''(z)s_2'(z) - s_1'(z)s_2''(z))^{-\frac{1}{3}},$$

$$s_1(s_1''(z)s_2'(z) - s_1'(z)s_2''(z))^{-\frac{1}{3}},$$

$$s_2(s_1''(z)s_2'(z) - s_1'(z)s_2''(z))^{-\frac{1}{3}}$$

gegeben (vergl Nr. 180, S. 181, Nr. 179, S. 175).

Achtes Kapitel.

222. **Differentialgleichungen und Functionssysteme, die zur selben Classe gehören. Sätze von Riemann.**

Die nun folgenden Untersuchungen schliessen sich enge an die bereits in der Nr 162 (S. 156) skizzirte Art und Weise an, wie Riemann die Theorie der durch die Gauss'sche Reihe definirten Function entwickelt und, wie aus den aus seinem Nachlasse zuerst im Jahre 1876 bekannt gemachten Fragmenten hervorgeht, auch in die Theorie der allgemeinen linearen Differentialgleichungen einzudringen versucht hat.

Wir haben zwei lineare Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe derselben Familie zugezählt, wenn sie dieselben wirklichen singulären Punkte besitzen und wenn sich zwei Systeme von Integralquotienten angeben lassen, die bei Umläufen der unabhängigen Variabeln um diese singulären Punkte auch dieselben projectiven Substitutionen erfahren. Die scheinbar singulären Stellen, die für Differentialgleichungen derselben Familie noch verschieden sein können, sind im Allgemeinen Unendlichkeitsstellen der Integralquotienten, in deren Umgebung sich die Integralquotienten verhalten wie rationale Functionen. Es würde also den Anschein haben, dass wir das Analogon dessen, was für die Integralquotienten die Familie ist, bei Betrachtung der Integrale selbst in der Zugehörigkeit zweier Differentialgleichungen zur selben Art zu suchen hätten.

In der That stimmen für die Integrale zweier Differentialgleichungen derselben Art (vergl. Nr. 165, S. 120) diejenigen singulären Punkte überein, in deren Umgebung sich die Integrale verzweigen oder, wenn die Differentialgleichung nicht zur Fuchs'schen Classe gehört, unbestimmt werden, und es können sich nur diejenigen singulären Punkte ändern, in deren Umgebung die Integrale das Verhalten von rationalen Functionen zeigen. Nun kann schon, wenn wir die Integralquotienten einer und derselben Differentialgleichung betrachten, eine Stelle, die für einen dieser Quotienten eine reguläre Stelle ist, für

einen anderen eine Unendlichkeitsstelle sein. Dagegen ist für die Integrale selbst das Auftreten einer Unendlichkeitsstelle für ein Integral insofern charakteristisch, als es dann in jedem Fundamentalsysteme mindestens ein Integral geben muss, welches an dieser Stelle ebenfalls unendlich wird. Es liegt dies eben daran, dass von zwei Fundamentalsystemen von Integralen das eine durch das andere ganz linear darstellbar ist, während Fundamentalsysteme von Integralquotienten als gebrochene lineare Functionen von einander erscheinen.

Suchen wir also das Analogon der Zugehörigkeit zweier linearer Differentialgleichungen, deren Integralquotienten wir betrachten, zur selben Familie, so werden wir den Integralen nicht nur dieselben Verzweigungs- und Unbestimmtheitsstellen, sondern überhaupt dieselben singulären Stellen zu erhalten haben, d. h. wir werden unter den Differentialgleichungen derselben Art noch diejenigen aussondern, für welche auch die singulären Stellen, in denen Integrale wie rationale Functionen unendlich werden (Kategorie 3. der in der Nr. 165, S. 119 aufgestellten Classification), dieselben sind.

Wir sagen mit Riemann, dass zwei Differentialgleichungen derselben Art insbesondere zur selben Classe gehören, wenn auch die Unendlichkeitsstellen ihrer Integrale, wo sich diese Integrale wie rationale Functionen verhalten, übereinstimmen, d. h. wenn die sämmtlichen wesentlichen singulären Punkte in beiden Differentialgleichungen dieselben sind.

Zwei Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe gehören also dann und nur dann zur selben Classe im Sinne von Riemann, wenn ihre sämmtlichen wesentlichen singulären Stellen übereinstimmen, und wenn überdies Fundamentalsysteme dieser Differentialgleichungen existiren, die cogredient sind, d. h. bei Umläufen um dieselben singulären Stellen auch dieselben Substitutionen erfahren*).

Wir beschränken uns im Folgenden auf die Betrachtung von Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe.

Sei

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y = 0$$

---

*) In seinen in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie vom Jahre 1888 und folg veröffentlichten Arbeiten bedient sich Herr Fuchs der Bezeichnung „Classe“ für die Gesammtheit derjenigen linearen Differentialgleichungen, die nach unserer im Anschlusse an Herrn Poincaré (Acta Mathematica Bd 5, 1884) gewählten Terminologie zur selben „Art“ gehören Wir haben den Classenbegriff in der ursprünglich von Riemann festgesetzten Form beibehalten.

eine solche Differentialgleichung, $a_1, a_2, \cdot\; a_\sigma$ die im Endlichen gelegenen, $a_{\sigma+1} = \infty$ der unendlich ferne wesentlich singuläre Punkt und $b_1, b_2, \cdot\;\cdot b_\varrho$ die ausserwesentlich singulären Punkte. Ferner seien

$$y_1, y_2, \cdots y_n$$

die Elemente irgend eines Fundamentalsystemes von (A),

$$\mathfrak{y}_{\varkappa 1}, \mathfrak{y}_{\varkappa 2}, \cdots \mathfrak{y}_{\varkappa n} \qquad (\varkappa = 1, 2, \quad \sigma + 1)$$

die Elemente des zu $x = a_\varkappa$ gehörigen canonischen Fundamentalsystemes,

$$r_{\varkappa 1}, r_{\varkappa 2}, \cdots r_{\varkappa n} \qquad (\varkappa = 1, 2, \quad \sigma + 1)$$

die Wurzeln der zu $x = a_\varkappa$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, endlich mögen

$$A_1, A_2, \cdots A_\sigma, A_{\sigma+1}$$

die dem Fundamentalsysteme $y_1, y_2, \cdots y_n$ entsprechenden Fundamentalsubstitutionen bedeuten, die bei der gewohnten durch die Fig. 2 (Nr. 208, S. 304) angedeuteten Zerschneidung der x-Ebene in eine einfach zusammenhängende Fläche $\overline{T}$ den Ueberschreitungen der Querschnitte

$$l_1, l_2, \cdots l_\sigma$$

entsprechen. Da unter den $a_1, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1}$ auch die Stellen enthalten sind, an denen einzelne Integrale unendlich werden, ohne sich zu verzweigen, so können einzelne der Substitutionen $A_\varkappa$ sich auch auf die identische Substitution 1 reduciren.

Bedeutet

$$\text{(B)} \qquad q_0 \frac{d^n z}{dx^n} + q_1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \cdots + q_n z = 0$$

eine Differentialgleichung, die mit (A) zur selben Classe gehört, so ist jedenfalls, da (A) und (B) zur selben Art gehören,

$$\text{(C)} \qquad z = r_0 y + r_1 y' + \cdots + r_{n-1} y^{(n-1)},$$

wo die $r_0, r_1, \cdots r_{n-1}$ rationale Functionen von x darstellen Diese rationalen Functionen müssen aber überdies so beschaffen sein, dass die durch die Gleichung (C) definirte Function z an keiner von den $a_1, a_2, \cdot\cdot a_\sigma$ verschiedenen endlichen Stelle unendlich wird. Dagegen kann die Differentialgleichung (B) im Allgemeinen ausserwesentlich singuläre Stellen besitzen, die von denen der Differentialgleichung (A) verschieden sind. Für eine wesentlich singuläre Stelle $x = a_\varkappa$ können sich die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung von (B) von den $r_{\varkappa 1}, r_{\varkappa 2}, \cdot\cdot\; r_{\varkappa n}$ nur um ganze Zahlen unterscheiden.

Wir sagen von dem mit $y_1, y_2, \cdots y_n$ cogredienten Fundamentalsysteme

$$(1) \qquad z_x = r_0 y_x + r_1 y_x' + \cdots + r_{n-1} y_x^{(n-1)},$$

es sei ein Functionssystem, welches mit dem Functionssysteme $y_1, y_2, \cdots y_n$ zur selben Classe gehört. Diese Definition stimmt dann offenbar mit der folgenden überein.

Ein System von n Functionen $z_1, z_2, \cdots z_n$, die in der einfach zusammenhängenden Fläche $\overline{T}$ allenthalben eindeutig und endlich sind, beim Ueberschreiten der Querschnitte $l_1, l_2, \cdots l_\sigma$ die Substitutionen $A_1, A_2, \cdots A_\sigma$ erfahren und keine Stelle der Unbestimmtheit besitzen, gehört mit $y_1, y_2, \cdots y_n$ zur selben Classe.

In der That befriedigt jedes so beschaffene Functionssystem eine lineare homogene Differentialgleichung von höchstens n^{ter} Ordnung der Fuchs'schen Classe, die mit (A) zur selben Classe gehört.

Seien

$$(2) \qquad s_{x1}, s_{x2}, \cdots s_{xn} \qquad (x = 1, 2, \cdots \sigma + 1)$$

die Wurzeln der zu $x = a_x$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (B), so sagen wir mit Riemann, diese Zahlen seien die Exponenten des Functionssystems $z_1, z_2, \cdots z_n$. Es wird uns wesentlich darauf ankommen, festzustellen, inwieweit ein mit $y_1, y_2, \cdots y_n$ zur selben Classe gehöriges Functionssystem durch Angabe seiner Exponenten (die sich natürlich von den entsprechenden r_{xi} nur durch additive ganze Zahlen unterscheiden können) bestimmt ist.

Hat man $(n+1)$ Systeme von je n Functionen, die zur selben Classe gehören,

$$y_{x1}, y_{x2}, \cdots y_{xn} \qquad (x = 1, 2, \cdots n+1),$$

so besteht zwischen diesen Systemen eine homogene lineare Beziehung, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von x sind.

Denn setzt man

$$\varphi_1 y_{1x} + \varphi_2 y_{2x} + \cdots + \varphi_{n+1} y_{n+1,x} = 0 \qquad (x = 1, 2, \cdots n),$$

so sind die $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_{n+1}$ proportional den aus dem Systeme

$$(y_{ix}) \qquad (i = 1, 2, \cdots n+1, \; x = 1, 2, \cdots n)$$

gebildeten Determinanten n^{ter} Ordnung. Diese Determinanten sind aber nach dem Appell'schen Satze (Nr. 15, Bd. I, S. 40) proportional mit gewissen ganzen rationalen Functionen von x.

Betrachten wir insbesondere die Beziehungen (1), die zwischen $z_1, z_2, \cdots z_n$ und den Ableitungen der $y_1, y_2, \cdots y_n$ bestehen, welch' letztere ja offenbar Functionssysteme sind, die mit $y_1, y_2, \cdot\; y_n$ zur selben Classe gehören. Diese Beziehungen lassen sich in die Form setzen

$$(3) \qquad g z_\varkappa = h_0 y_\varkappa + h_1 y_\varkappa' + \cdots + h_{n-1} y_\varkappa^{(n-1)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \quad n),$$

wo die $g, h_0, h_1, \quad h_{n-1}$ ganze rationale Functionen von x bedeuten.

Sei $x = c$ eine Wurzel der Gleichung

$$g(x) = 0.$$

Wenn $x = c$ mit keiner der wesentlichen singulären Stellen $a_1, a_2, \cdot\; a_\sigma$ zusammenfällt, so sind die $z_1, z_2, \cdot\; \cdot z_n$ für $x = c$ jedenfalls endlich, also müssen in diesem Punkte die Ausdrücke

$$h_0 y_\varkappa + h_1 y_\varkappa' + \cdots + h_{n-1} y_\varkappa^{(n-1)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \quad n)$$

verschwinden. Wenn nun, wie wir voraussetzen können, die ganzen Functionen

$$g, \; h_0, \; h_1, \cdots h_{n-1}$$

keinen gemeinsamen Theiler besitzen, so können für $x = c$ nicht alle

$$h_0, \; h_1, \cdot\cdot \; h_{n-1}$$

gleich Null sein; also muss die Determinante

$$D(y_1, y_2, \cdots y_n)$$

für $x = c$ verschwinden. Diese Determinante verschwindet aber nur für singuläre Punkte der Differentialgleichung (A), wir haben also den Satz:

Der Coefficient g der $z_\varkappa$ in den Gleichungen (3) kann nur für die singulären Stellen der Differentialgleichung (A) verschwinden.

223. Bestimmung einer Differentialgleichung der Classe, deren determinirende Gleichungen zwischen Null und Eins gelegene Wurzeln haben.

Wenn g nur in den wesentlichen singulären Stellen von (A) gleich Null wird, so definiren die Gleichungen (3) bei willkürlicher Wahl der ganzen rationalen Functionen $h_0, h_1, \cdot\; h_{n-1}$ ein Functionssystem $[z_\varkappa]$, welches mit $[y_\varkappa]$ zur selben Classe gehört Dies ist also insbesondere der Fall, wenn g gleich einer Constanten gewählt wird.

Diese einfache Bemerkung soll uns dazu dienen, um von der Differentialgleichung (A) zu einer Differentialgleichung derselben Classe

überzugehen, in welcher die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen gewisse vorgeschriebene Abweichungen von den entsprechenden Grössen der Gleichung (A) zeigen.

Denken wir uns die Differentialgleichung (A) in der Umgebung einer gewissen wesentlichen oder ausserwesentlichen singulären Stelle $x = a$ in der Normalform (Nr. 44, Bd. I, S. 154) geschrieben

$$(A) \qquad (x-a)^n P_n(x) y^{(n)} + (x-a)^{n-1} P_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + P_0(x) y = P(y) = 0$$

und setzen wir

$$z = R_0 y + (x-a) R_1 y' + \cdots + (x-a)^{n-1} R_{n-1} y^{(n-1)} = R(y),$$

wo also die $P_n, P_{n-1}, \cdots P_0$ bestimmte, die $R_{n-1}, \cdots R_0$ noch geeignet zu wählende ganze rationale Functionen von x bedeuten, von denen P_n und R_{n-1} für $x = a$ nicht verschwinden, so genügt z einer mit (A) zur selben Classe gehörigen Differentialgleichung, die wir uns bei $x = a$ ebenfalls in der Normalform geschrieben denken wollen:

$$(B) \quad (x-a)^n Q_n z^{(n)} + (x-a)^{n-1} Q_{n-1} z^{(n-1)} + \cdots + Q_0 z = Q(z) = 0,$$

$Q_n, Q_{n-1}, \cdots Q_0$ sind ganze Functionen, Q_n für $x = a$ von Null verschieden.

Bilden wir den zusammengesetzten Differentialausdruck

$$QR(y),$$

so besitzt derselbe (Nr. 17, Bd. I, S. 46) bei $x = a$ ebenfalls die Normalform und hat $x = a$ zur Stelle der Bestimmtheit. Es ist dann (Nr 164, S. 118)

$$QR = SP,$$

wo S einen Differentialausdruck $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit rationalen Coefficienten bedeutet, der für $x = a$ auch die Normalform und diese Stelle zur Stelle der Bestimmtheit hat.

Seien nun für unbestimmtes ϱ:

$$P((x-a)^\varrho) = (x-a)^\varrho \sum_{\varkappa=0}^{\infty} f_\varkappa(\varrho)(x-a)^\varkappa,$$

$$Q((x-a)^\varrho) = (x-a)^\varrho \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \varphi_\varkappa(\varrho)(x-a)^\varkappa,$$

$$R((x-a)^\varrho) = (x-a)^\varrho \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \psi_\varkappa(\varrho)(x-a)^\varkappa,$$

$$S((x-a)^\varrho) = (x-a)^\varrho \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \chi_\varkappa(\varrho)(x-a)^\varkappa$$

die charakteristischen Functionen der Differentialausdrücke $P, Q, R, S,$ so haben wir nach Nr. 86 (Bd I, S 309) die Gleichungen:

$$\sum_{\varkappa} \varphi_{\nu-\varkappa}(\varrho+\varkappa)\psi_{\varkappa-\mu}(\varrho+\mu) = \sum_{\varkappa} \chi_{\nu-\varkappa}(\varrho+\varkappa)f_{\varkappa-\mu}(\varrho+\mu)$$
$$(\nu, \mu = 0, 1, 2, \quad)$$

Die beiden ersten dieser Gleichungssysteme lauten

(4) $$\varphi_0(\varrho\ \psi_0(\varrho) = \chi_0(\varrho)f_0(\varrho),$$

(5) $$\varphi_0(\varrho+1)\psi_0(\varrho+1) = \chi_0(\varrho+1)f_0(\varrho+1),$$

(6) $$\varphi_1(\varrho)\psi_0(\varrho) + \varphi_0(\varrho+1)\psi_1(\varrho) = \chi_1(\varrho)f_0(\varrho) + \chi_0(\varrho+1)f_1(\varrho).$$

Aus der letzten Gleichung folgt dann mit Rücksicht auf die zweite

(7) $$\chi_1(\varrho)f_0(\varrho) - \varphi_1(\varrho)\psi_0(\varrho) = \chi_0(\varrho+1)\frac{f_0(\varrho+1)\psi_1(\varrho) - \psi_0(\varrho+1)f_1(\varrho)}{\psi_0(\varrho+1)}.$$

Sei nun r_1 eine λ-fache Wurzel der zu $x=a$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung

(8) $$f_0(\varrho) = 0$$

von (A), so kann man im Allgemeinen, wie Herr Heffter gezeigt hat, die Coefficienten des Differentialausdruckes $R(y)$ so einrichten, dass die zu $x=a$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung

(9) $$\varphi_0(\varrho) = 0$$

von (B) die λ-fache Wurzel r_1+1 besitzt und ihre sämmtlichen $n-\lambda$ übrigen Wurzeln mit (8) gemein hat.

Nehmen wir nämlich $R(y)$ von der λ^{ten} Ordnung so, dass

$$\psi_0(\varrho) = \text{const.}\,(\varrho - r_1)^\lambda$$

ist, dann verschwindet die linke Seite der Gleichung (7) für $\varrho = r_1$ von der λ^{ten} Ordnung. Wenn nun nicht gleichzeitig

(10) $$f_0(r_1+1) = 0 \quad \text{und} \quad f_1(r_1) = 0$$

sind, so kann, da

$$\psi_0(r_1+1) \neq 0$$

ist, und $R(y)$ auch noch so eingerichtet werden kann, dass

$$\psi_1(r_1) \neq 0$$

ist, die rechte Seite von (7) nur dadurch für $\varrho = r_1$ von λ^{ter} Ordnung verschwinden, dass

$$\chi_0(\varrho+1) = 0$$

die λ-fache Wurzel r_1, also

$$\chi_0(\varrho) = 0$$

die λ-fache Wurzel r_1+1 besitzt Dann hat aber zufolge der Gleichung (4) auch

$$\varphi_0(\varrho)=0$$

die λ-fache Wurzel r_1+1 Dass $R(y)$ überdies so eingerichtet werden kann, dass die $n-\lambda$ übrigen Wurzeln von (9) mit denen von (8), und überhaupt für jeden wesentlich singulären Punkt die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen von (A) und (B) übereinstimmen, ist evident.

Was die Bedingungen (10) anlangt, so ist Folgendes zu bemerken. Wenn z B. zur Wurzel r_1 ein in Reihenform darstellbares Integral

$$\mathfrak{y}=\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu (x-a)^{r_1+\nu}, \quad g_0 \neq 0,$$

gehört, so lauten die beiden ersten Gleichungen der für die g_ν bestehenden Recursionsformel (Nr 45, Bd. I, S 158)

$$g_0 f_0(r_1)=0,$$
$$g_0 f_1(r_1)+g_1 f_0(r_1+1)=0.$$

Wenn alsdann z B.

$$f_0(r_1+1)=0$$

wäre, so müsste nothwendig auch

$$f_1(r_1)=0$$

sein; in diesem Falle wäre also die angegebene Reduction nicht ausführbar

Wenn für alle wesentlich singulären Stellen von (A) die zugehörigen Fundamentalgleichungen lauter von einander verschiedene Wurzeln haben, so können die Gleichungen (10) für keine der Wurzeln der zu diesen Stellen gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen bestehen. Da wir ferner durch Multiplication von y mit einer rationalen Function von der Form

$$(x-a_1)^{-\alpha_1}(x-a_2)^{-\alpha_2}\cdot\ \cdot(x-a_\sigma)^{-\alpha_\sigma},$$

wo die $\alpha_1, \alpha_2, \cdot\ \ \alpha_\sigma$ positive ganze Zahlen oder Null bedeuten, stets erreichen können, dass die realen Theile der Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen für die im Endlichen gelegenen wesentlichen singulären Stellen $a_1, a_2, \quad a_\sigma$ nicht positiv sind, so können wir durch wiederholte Anwendung des für $x=a$ und die Wurzel r_1 beschriebenen Verfahrens stets von (A) zu einer Differentialgleichung (A′) derselben Classe übergehen, die so beschaffen ist, dass die realen Theile der Wurzeln der auf

$a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ bezüglichen determinirenden Fundamentalgleichungen zwischen Null und der negativen Einheit liegen.

Herr Fuchs, der diese Reduction zuerst angegeben hat, lehrt, wie man die Coefficienten der Beziehung, die zwischen den abhängigen Variabeln der Differentialgleichungen (A) und (A′) besteht, direct finden, also die Reduction mit einem Schlage ausführen kann. Die analoge Reduction in dem Falle, wo für die determinirenden Fundamentalgleichungen von (A) Wurzeln vorhanden sind, die sich um ganze Zahlen unterscheiden, beruht auf dem folgenden ebenfalls von Herrn Fuchs herrührenden Satze:

Man kann stets eine mit (A) zur selben Classe gehörige Differentialgleichung (A′) finden, die so beschaffen ist, dass, wenn $r_1, r_2, \cdots r_m$ die Wurzeln der zu einem singulären Punkte gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung von (A′) bedeuten, welche sich nicht um ganze Zahlen von einander unterscheiden, die Gesammtheit der von r_1 um ganze Zahlen (die Null mit eingeschlossen) verschiedenen Wurzeln in der Form

$$r_1, \ r_1 - 1, \ r_1 - 2, \ \cdots r_1 - \nu \qquad (\nu \leqq n - 1)$$

darstellbar ist.

Seien nämlich für die zu $x = a$ gehörige determinirende Gleichung von (A)

$$r_1, \ r_1 - g_1, \ r_1 - g_2, \cdots r_1 - g_\nu$$

die von r_1 um ganze Zahlen verschiedenen Wurzeln, und möge für $\varkappa = 0, 1, \cdots \nu$ die Wurzel $r_1 - g_\varkappa$ eine $\lambda_\varkappa$-fache sein, während $g_0, g_1, g_2, \cdots g_\nu$ ganze Zahlen bedeuten, für welche

$$g_0 = 0 < g_1 < g_2 < \cdots < g_\nu$$

ist; dann kann man zunächst zu einer Differentialgleichung übergehen, die mit (A) zur selben Classe gehört, und für welche die zu $x = a$ gehörige determinirende Gleichung die Wurzeln

$$r_1, \ r_1 - g_1 + 1, \ r_1 - g_2, \cdots r_1 - g_\nu$$

beziehungsweise $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_\nu$-fach besitzt, wenn $g_1 > 1$ ist. Durch Wiederholung dieses Processes gelangt man zu einer mit (A) zur selben Classe gehörigen Differentialgleichung, für welche

$$r_1, \ r_1 - 1, \ r_1 - g_2, \cdots r_1 - g_\nu$$

beziehungsweise $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_\nu$-fache Wurzeln der zu $x = a$ gehörigen determinirenden Gleichung sind. Wenn $g_2 > 2$, so fährt man

in derselben Weise fort, bis die gewünschte Form der Wurzelgruppe erreicht ist.

Diese Reduction ist, wie sich leicht übersehen lässt, für den Punkt $x = \infty$ genau in derselben Weise durchführbar wie für eine im Endlichen gelegene Stelle.

224. Sätze über Differentialgleichungen, die zu derselben Classe gehören.

Wir kehren zur allgemeinen Untersuchung der Coefficienten der Relation (3) (Nr. 223, S 369) zurück unter der Voraussetzung, dass die $[z_\varkappa]$ ein mit $[y_\varkappa]$ zur selben Classe gehöriges Functionssystem bedeuten.

Bezeichnen wir mit

$$D_\varkappa(z;\, y_1,\, y_2,\, \cdots y_n)$$

die Determinante, welche aus der Determinante

$$D(y_1,\, y_2,\, \cdots\, y_n) = \begin{vmatrix} y_1, & y_1', & \cdots & y_1^{(n-1)} \\ y_2, & y_2', & \cdots & y_2^{(n-1)} \\ & \cdot & & \\ y_n, & y_n', & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

dadurch hervorgeht, dass man die Elemente der k^{ten} Verticalreihe durch $z_1, z_2, \cdots z_n$ ersetzt, so ist

$$(11) \qquad \frac{h_{\varkappa-1}}{g} = \frac{D_\varkappa(z;\, y_1,\, y_2,\, \cdots\, y_n)}{D(y_1,\, y_2,\, \cdots\, y_n)}.$$

In der Umgebung des wesentlich singulären Punktes $a_\varkappa$ ist (Nr. 43, Bd. I, S. 152) die Determinante $D(y_1, y_2, \cdots y_n)$ in der Form

$$D(y_1,\, y_2,\, \cdots\, y_n) = (x - a_\varkappa)^{r_\varkappa}\, \mathfrak{P}_\varkappa(x \,|\, a)$$

darstellbar, wo $\mathfrak{P}_\varkappa$ eine gewöhnliche, für $x = a_\varkappa$ nicht verschwindende Potenzreihe von $x - a$ bedeutet und

$$r_\varkappa = \sum_{\iota=1}^{n} r_{\varkappa\iota} - \frac{n(n-1)}{2} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

gesetzt wurde; ebenso ist in der Umgebung von $x = \infty$

$$D(y_1,\, y_2,\, \cdots\, y_n) = \left(\frac{1}{x}\right)^{r_{\sigma+1}} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right),$$

wenn wir

$$r_{\sigma+1} = \sum_{\iota=1}^{n} r_{\sigma+1,\iota} + \frac{n(n-1)}{2}$$

setzen und $\mathfrak{P}$ eine gewöhnliche, für $x = \infty$ nicht verschwindende Potenzreihe von x^{-1} bedeuten lassen.

Zufolge der zwischen den Substitutionen $A_1, A_2, \cdots A_\sigma, A_{\sigma+1}$ bestehenden Beziehung

$$A_{\sigma+1} A_\sigma \cdots A_2 A_1 = 1$$

ist (vergl. Nr. 122, Bd. I, S. 445) die Summe

$$\sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1} \sum_{\iota=1}^{n} r_{\varkappa\iota} = r$$

eine ganze Zahl; es ist folglich

$$D(y_1, y_2, \cdots y_n) \prod_{\nu=1}^{\sigma} (x - a_\varkappa)^{-r_\varkappa} \tag{12}$$

eine für alle endlichen Werthe von x eindeutige und endliche Function, die sich für $x = \infty$ wie die ganzzahlige Potenz

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{r - (\sigma - 1)\frac{n(n-1)}{2}}$$

verhält. Wäre der Exponent dieser Potenz positiv, so müsste das Product (12) nach einem elementaren Satze der Functionentheorie eine Constante und zwar, da es für $x = \infty$ verschwindet, gleich Null sein Dies ist aber ausgeschlossen, weil $[y_\varkappa]$ ein Fundamentalsystem bedeutet; also ist

$$r - (\sigma - 1)\frac{n(n-1)}{2} \leqq 0,$$

und das Product (12) ist demnach eine ganze rationale Function vom Grade

$$(\sigma - 1)\frac{n(n-1)}{2} - r.$$

Wir können diese ganze Function auch sofort genau angeben, wenn wir bemerken, dass $D(y_1, y_2, \cdots y_n)$ und folglich auch das Product (12) für jeden ausserwesentlichen singulären Punkt $x = b_\varkappa$ verschwinden muss wie

$$(x - b_\varkappa)^{\mathfrak{r}_\varkappa},$$

wo (vergl. Nr 57, Bd I, S. 201)

$$\mathfrak{r}_\varkappa = \sum_{\iota=1}^{n} \mathfrak{r}_{\varkappa\iota} - \frac{n(n-1)}{2} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \varrho)$$

ist und $\mathfrak{r}_{\varkappa 1}, \mathfrak{r}_{\varkappa 2}, \cdots \mathfrak{r}_{\varkappa n}$ die Wurzeln der zu $x = b_\varkappa$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung bedeuten. Da nämlich zufolge der Fuchs'schen Beziehung (Nr. 68, Bd. I, S. 241)

(13) $$\sum_{\varkappa=1}^{\varrho}\sum_{\iota=1}^{n}\mathfrak{r}_{\varkappa\iota}+r=(\varrho+\sigma-1)\frac{n(n-1)}{2}$$

ist, so ist, abgesehen von einer Constanten, das Product (12) direct gleich der ganzen Function

$$\prod_{\varkappa=1}^{\sigma}(x-b_\varkappa)^{\mathfrak{r}_\varkappa}=G(x).$$

Wir haben also

(14) $$D(y_1, y_2, \cdots y_n)=G(x)\prod_{\varkappa=1}^{\sigma}(x-a_\varkappa)^{r_\varkappa}$$

Durch ganz analoge Schlüsse findet man, dass auch

$$D_\nu(z;\, y_1, y_2, \cdots y_n)=G_\varkappa(x)\prod_{\lambda=1}^{\sigma}(x-a_\lambda)^{r_\lambda^{(\varkappa)}}, \qquad (\varkappa=1, 2, \quad n)$$

ist, wo $G_\varkappa(x)$ eine ganze rationale Function bedeutet, die für keine der Stellen $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ verschwindet und wo die Differenzen

$$r_\lambda - r_\lambda^{(\varkappa)} \qquad (\lambda=1, 2, \quad \sigma, \ \varkappa=1, 2, \quad n)$$

ganze Zahlen sind.

Hieraus schliessen wir, dass wir den Factor g von $z_\varkappa$ in den Gleichungen (3) gleich einem Producte von der Form

$$g=G(x)\,H(x)$$

nehmen können, wo $H(x)$ eine ganze rationale Function bedeutet, die nur für die Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ verschwindet. Wir erhalten also den folgenden Satz, der eine wichtige Ergänzung des in der Nr. 222 (S. 369) gefundenen Ergebnisses bildet:

Der Coefficient g von $z_\varkappa$ in der Gleichung (3) kann in ausserwesentlichen singulären Punkten der Differentialgleichung (A) von keiner höheren Ordnung verschwinden wie die Determinante des Fundamentalsystems dieser Differentialgleichung.

Wir wollen sagen, der Punkt $b_\varkappa$ sei ein ausserwesentlich singulärer Punkt $\mathfrak{r}_\varkappa^{\text{ter}}$ Ordnung oder ein $\mathfrak{r}_\varkappa$-facher ausserwesentlich singulärer Punkt der Differentialgleichung (A), wenn wie oben

$$\mathfrak{r}_\nu=\sum_{\iota=1}^{n}\mathfrak{r}_{\varkappa\iota}-\frac{n(n-1)}{2}$$

ist. Für $\mathfrak{r}_\varkappa=1$ haben wir also einen einfachen ausserwesentlich singulären Punkt; es ist dann, da alle $\mathfrak{r}_{\varkappa 1}, \mathfrak{r}_{\varkappa 2}, \cdot\cdot \mathfrak{r}_{\varkappa n}$ von einander verschiedene ganze Zahlen bedeuten, nothwendig

$$\mathfrak{r}_{\varkappa 1} = n, \quad \mathfrak{r}_{\varkappa 2} = n - 2, \quad \mathfrak{r}_{\varkappa 3} = n - 3, \quad \cdots \mathfrak{r}_{\varkappa n} = 0,$$

die eingeführte Bezeichnung stimmt also in diesem Falle mit der in der Nr. 112 (Bd. I, S. 401) benutzten überein

Für einen solchen einfachen ausserwesentlich singulären Punkt $b_\varkappa$ wird also g im Allgemeinen von erster Ordnung verschwinden. Damit dann die $[z_\varkappa]$ mit den $[y_\varkappa]$ zur selben Classe gehören, müssen die ganzen Functionen $h_0, h_1, \cdots h_{n-1}$ so eingerichtet werden, dass die $[z_\varkappa]$ für $x = b_\varkappa$ endlich bleiben. Sei $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n$ das zu $x = b_\varkappa$ gehörige canonische Fundamentalsystem, also in der Umgebung von $x = b_\varkappa$

$$\mathfrak{y}_\lambda = (x - b_\varkappa)^{\lambda - 1} \mathfrak{P}_\lambda(x \mid b_\varkappa) \qquad (\lambda = 1, 2, \quad n-1),$$

$$\mathfrak{y}_n = (x - b_\varkappa)^n \mathfrak{P}_n(x \mid b_\varkappa),$$

wo $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdot \quad \cdot \mathfrak{P}_n$ gewöhnliche Potenzreihen sind, die für $x = b_\varkappa$ nicht verschwinden. Mögen ferner $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \quad \cdot\cdot \mathfrak{z}_n$ die den $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \quad \cdot \mathfrak{y}_n$ entsprechenden Lösungen der Differentialgleichung (B), und

$$g(x) = (x - b_\varkappa)\bar{g}(x), \quad \bar{g}(b_\varkappa) \neq 0$$

sein. Dann sind die Coefficienten der ganzen Functionen

$$h_0, \quad h_1, \cdot\cdot \quad h_{n-1}$$

so einzurichten, dass die rechten Seiten der Gleichungen

$$(x - b_\varkappa)\bar{g}(x)\mathfrak{z}_1 = h_0 \mathfrak{P}_1(x \mid b_\varkappa) + h_1 \mathfrak{P}_1'(x \mid b_\varkappa) + \quad \cdot + h_{n-1} \mathfrak{P}_1^{(n-1)}(x \mid b_\varkappa)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$(x - b_\varkappa)\bar{g}(x)\mathfrak{z}_{n-1} = h_0 (x - b_\varkappa)^{n-1} \mathfrak{P}_{n-1}(x \mid b_\varkappa) + \\ + h_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left\{ (x - b_\varkappa)^{n-1} \mathfrak{P}_{n-1}(x \mid b_\varkappa) \right\}$$

den Factor $x - b_\varkappa$ erhalten; die rechte Seite der n^{ten} Gleichung

$$(x - b_\varkappa)\bar{g}(x)\mathfrak{z}_n = h_0 \mathfrak{y}_n + h_1 \mathfrak{y}_n' + \cdots + h_{n-1} \mathfrak{y}_n^{(n-1)}$$

enthält den Factor $x - b_\varkappa$ schon von selbst. Also müssen entsprechend dem einfachen ausserwesentlich singulären Punkte $x = b_\varkappa$ die in den

$$h_0, \quad h_1, \cdots h_{n-1}$$

auftretenden Coefficienten genau $n - 1$ von einander unabhängige homogene lineare Gleichungen erfüllen. Ebenso folgt allgemein:

Entsprechend einem $\mathfrak{r}_\varkappa$-fachen ausserwesentlichen singulären Punkte müssen die Coefficienten der ganzen Functionen

$$h_0, \quad h_1, \cdots h_{n-1}$$

genau $(n - 1)\mathfrak{r}_\varkappa$ von einander unabhängige Bedingungen er-

füllen; zu diesen treten dann noch die $\mathfrak{r}_\varkappa$ Bedingungen, welche bewirken, dass g den Factor

$$(x - b_\varkappa)^{\mathfrak{r}_\varkappa}$$

enthält.

225. Differentialgleichungen mit nur einfachen ausserwesentlichen singulären Stellen. Constantenzählungen für die homogene Monodromiegruppe.

Wenn wir z gleich der n^{ten} Ableitung von y nehmen, so liefern uns die erlangten allgemeinen Resultate eine Bestätigung der bereits im fünften Abschnitte gefundenen Sätze über die Gestalt der Coefficienten einer Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe.

In diesem Falle ist nämlich (vergl. Nr. 14, Bd I, S. 37)

$$D_\varkappa(z;\, y_1, y_2, \cdots y_n) = (-1)^\varkappa D_{n-\varkappa+1}(y_1, y_2, \cdots y_n),$$

und folglich haben die oben mit $r_\lambda^{(\varkappa)}$ bezeichneten Zahlen die Werthe

$$r_\lambda^{(\varkappa)} = r_\lambda + \varkappa - n - 1 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n,\ \lambda = 1, 2, \cdots \sigma)$$

Wir erhalten also

$$(15)\quad G(x)\prod_{\lambda=1}^{\sigma}(x-a_\lambda)^n y^{(n)} = \prod_{\lambda=1}^{\sigma}(x-a_\lambda)^{n-1} G_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + G_n(x) y,$$

wo die $G_1(x), \cdots G_n(x)$ ganze rationale Functionen bedeuten, deren Grade sich durch Betrachtung des unendlich fernen Punktes ergeben Man findet in Uebereinstimmung mit Nr. 62 (Bd. I, S 220) den Grad von $G_\nu(x)$ gleich

$$\sum_{\lambda=1}^{\varrho}\mathfrak{r}_\lambda + (\sigma - 1)\varkappa.$$

Wenn wir nebst dem Systeme $[z_\varkappa]$ noch die $(n-1)$ Systeme

$$[z_\varkappa^{(\lambda)}] \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n-1)$$

betrachten, so gehören diese offenbar auch mit $[y_\varkappa]$ zur selben Classe. Es ist folglich

$$G(x) H_\lambda(x) z_\varkappa^{(\lambda)} = h_{\lambda 0} y_\varkappa + h_{\lambda 1} y_\varkappa' + \cdots + h_{\lambda, n-1} y_\varkappa^{(n-1)} \qquad (\varkappa = 1, 2 \cdots n,\ \lambda = 0, 1, \cdots n-1),$$

wo die $H_0, H_1, \cdots H_{n-1}$ ganze rationale Functionen bedeuten, die nur für $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ verschwinden können, und die

$$h_{\lambda 0}, h_{\lambda 1}, \cdots h_{\lambda, n-1}$$

ganze Functionen sind, die sich aus den

$$h_{00} = h_0, \; h_{01} = h_1, \; \cdot \; h_{0, n-1} = h_{n-1}$$

und deren Ableitungen sowie aus den Coefficienten der Differentialgleichung (A) nebst deren Ableitungen zusammensetzen. Nach dem Multiplicationstheoreme der Determinanten haben wir demnach

$$(16) \quad [G(x)]^n H_0(x) \cdots H_{n-1}(x) D(z_1, z_2, \cdots z_n) = |h_{\iota\varkappa}| \, D(y_1, y_2, \cdots y_n)$$
$$(\varkappa, \iota = 0, 1, \quad n-1)$$

Die Coefficienten $h_0, h_1, \cdots h_{n-1}$ der rechten Seite der Gleichung (3) müssen zufolge der ausserwesentlich singulären Stellen $\mathfrak{r}_\varkappa^{\text{ter}}$ Ordnung

$$x = b_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \quad \varrho)$$

genau

$$(n-1) \sum_{\varkappa=1}^{\varrho} \mathfrak{r}_\varkappa$$

Bedingungen erfüllen. **Diese Bedingungen können wir jetzt auch so formuliren, dass wir sagen, es muss die Determinante**

$$|h_{\iota\varkappa}| \qquad (\iota, \varkappa = 0, 1, \quad n-1)$$

durch die $(n-1)^{\text{te}}$ Potenz der ganzen Function $G(x)$ theilbar sein.

Setzen wir

$$\frac{|h_{\iota\varkappa}|}{[G(x)]^{n-1}} = K(x) \qquad (\iota, \varkappa = 0, 1, \quad n-1),$$

so lässt sich die Gleichung (16) mit Rücksicht auf (14) in der Form

$$H_0(x) \cdots H_{n-1}(x) D(z_1, z_2, \cdots z_n) = K(x) \prod_{\varkappa=1}^{\sigma} (x - a_\varkappa)^{r_\varkappa}$$

schreiben. Die Determinante des Fundamentalsystems $[z_\varkappa]$,

$$D(z_1, z_2, \cdots z_n),$$

kann nur für singuläre Stellen und muss für die ausserwesentlich singulären Stellen der Differentialgleichung (B) verschwinden (Nr 11, Bd I, S. 30 und Nr. 57, Bd. I, S. 201); **daraus folgt, dass die Gleichung**

$$(17) \qquad K(x) = 0$$

durch ihre Wurzeln die Lage und durch die Vielfachheit jeder Wurzel zugleich die Ordnungszahl der ausserwesentlich singulären Stellen der Differentialgleichung (B) bestimmt

Nun können wir offenbar die ganzen Functionen

$$h_0, h_1, \cdot h_{n-1}$$

so einrichten, dass die Gleichung (17) lauter einfache Wurzeln besitzt,

dann sind also alle ausserwesentlich singulären Stellen der Differentialgleichung (B) einfache, d. h.:

Wir können von (A) stets zu einer Differentialgleichung derselben Classe übergehen, die nur einfache ausserwesentliche singuläre Stellen besitzt.

Es ist folglich keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir im Folgenden von vornherein annehmen, dass die ausserwesentlichen singulären Stellen $b_1, b_2, \cdots b_\varrho$ der Differentialgleichung (A) einfache sind. Dann ist also

$$\mathfrak{r}_\varkappa = 1 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \varrho),$$

und die ganze Function $G(x)$ ist einfach vom Grade ϱ,

$$G(x) = \prod_{\varkappa=1}^{\varrho} (x - b_\varkappa).$$

Die Thatsache, dass $b_\varkappa$ einfache ausserwesentlich singuläre Stelle ist, legt den Coefficienten der rechten Seite der Gleichung (15) $n-1$ Bedingungen, dem Coefficienten der linken Seite eine Bedingung auf, so dass wir also im Ganzen für die Coefficienten von (15) oder von (A) genau n Bedingungen und für alle ϱ ausserwesentlich singulären Stellen zusammengenommen

$$n\varrho$$

von einander unabhängige Bedingungen erhalten (vergl. Nr. 57, Bd. I, S 203).

Wir nehmen nun an der Differentialgleichung (A) bez. (15) eine Constantenzählung vor, die der in der Nr 207 (S. 301) vorgenommenen analog ist; so wie dort die projective Monodromiegruppe, wird aber jetzt die homogene lineare Monodromiegruppe Θ in Betracht gezogen werden.

Die ganzen Functionen $G_\varkappa(x)$ in (15) sind vom Grade

$$\varrho + \varkappa(\sigma - 1) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

wir haben also in allen

$$G(x),\ G_1(x),\ \cdots\ G_n(x)$$

im Ganzen

$$(n+1)(\varrho+1) + (\sigma-1)\frac{n(n+1)}{2}$$

Constanten, wo die ausserwesentlich singulären Stellen $b_1, b_2, \cdots b_\varrho$ als Constanten von $G(x)$ schon mitgezählt sind. Zu diesen treten noch die σ wesentlichen singulären Stellen, die aber nur $\sigma - 2$ wesentliche Parameter liefern, da wir durch lineare Transformation des x, ohne

den Charakter des unendlich fernen Punktes als wesentlich singulärer Stelle zu ändern, z B.

$$a_1 = 0, \ a_2 = 1$$

machen können Dagegen sind abzuziehen ein constanter Homogenitätsfactor in der Gleichung (15) und die $n\varrho$ Bedingungsgleichungen für die ausserwesentlich singulären Stellen, so dass genau

$$(n+1)(\varrho+1) + (\sigma-1)\frac{n(n+1)}{2} - n\varrho - 1 + \sigma - 2$$
$$= \varrho + n + (\sigma-1)\frac{n(n+1)}{2} + \sigma - 2$$

verfügbare Parameter in den Coefficienten von (A) enthalten sind

Die Gruppe Θ, die aus den Fundamentalsubstitutionen $A_1, A_2, \quad A_\sigma$ gebildet ist, hängt von $n^2\sigma$ Parametern ab; da wir aber ähnliche Gruppen als nicht von einander verschieden ansehen müssen, d. h also die n^2 Coefficienten einer willkürlichen linearen Transformation, durch die wir von dem Fundamentalsysteme $[y_\varkappa]$ zu einem anderen Fundamentalsysteme übergehen, noch abziehen müssen, bleiben zunächst

$$n^2\sigma - n^2$$

Parameter. Aber die Multiplication aller $[y_\varkappa]$ mit einem constanten Factor ändert nichts an der Gruppe, es sind also richtig nicht n^2, sondern nur $n^2 - 1$ Parameter abzuziehen, so dass Θ genau von

$$n^2(\sigma-1) + 1$$

Parametern abhängt

Denken wir uns die Gruppe Θ, d h die dieselbe bestimmenden $n^2(\sigma-1)+1$ Parameter gegeben und fragen, ob es möglich ist, die lineare Differentialgleichung (A) so einzurichten, dass die gegebene Gruppe die Monodromiegruppe derselben sei, so müssen wir also die in den Coefficienten von (A) auftretenden Parameter in geeigneter Weise zu bestimmen suchen. Es muss also jedenfalls die Anzahl dieser Parameter

$$\varrho + n + (\sigma-1)\frac{n(n+1)}{2} + \sigma - 2 \geqq n^2(\sigma-1) + 1$$

sein. Hieraus erkennen wir, dass es für $n > 2$ im Allgemeinen nicht möglich ist, eine Differentialgleichung (A) herzustellen, die eine vorgeschriebene Monodromiegruppe Θ und keinen ausserwesentlichen singulären Punkt besitzt Oder wie wir auch sagen können: Damit es möglich sei, eine zur Gruppe Θ gehörige Differentialgleichung (A) herzustellen, die keinen ausserwesentlich singulären Punkt besitzt, müssen

zwischen den $n^2(\sigma - 1) + 1$ Parametern von Θ genau

$$n^2(\sigma - 1) + 2 - (\sigma - 1)\frac{n^2 + n + 2}{2} - n$$

Relationen bestehen.

Diese Anzahl ist stets positiv, wenn

$$n > 2, \quad \sigma > 1$$

ist, nur für $n = 2$ ist dieselbe gleich Null. Wir finden also Betrachtung der Integrale und der zu denselben gehörigen hor linearen Gruppe genau dasselbe Ergebniss, wie wir es in der (S. 302) durch Betrachtung der Integralquotienten und der zuge projectiven Gruppe abgeleitet hatten. Die daselbst aufgestellte bleiben für unsere gegenwärtige Untersuchung bestehen, wenn denselben an die Stelle von „scheinbaren singulären Punkten" wesentlich singuläre Punkte" setzen. Es liefert uns also auc Constantenzählung eine Bestätigung dessen, dass den ausserwe singulären Punkten für die Betrachtung der Integrale die analog zufällt wie den scheinbar singulären Punkten für die Betracht Integralquotienten, und dass demnach beim Studium der Integral die Differentialgleichungen derselben Classe (also nicht die d Art) das Analogon sind für die beim Studium der Integralqu auftretenden Differentialgleichungen derselben Familie.

Wir wollen auch hier, ähnlich wie in der Nr 217 (S. 3 Constantenzählung unter der Voraussetzung vornehmen, das nur die Parameter der Gruppe Θ, sondern auch die wesentliche lären Stellen

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, \quad a_{\sigma+1} = \infty$$

fest aber sonst willkürlich gegeben sind

Die Anzahl der in den Coefficienten der Differentialgleich verfügbaren Parameter reducirt sich dann auf

$$\varrho + n + (\sigma - 1)\frac{n(n+1)}{2}.$$

Soll eine Bestimmung derselben möglich sein, so dass die Diff gleichung (A) die durch ihre $n^2(\sigma - 1) + 1$ Parameter g Gruppe Θ zur Monodromiegruppe hat, so muss also

$$\varrho + n + (\sigma - 1)\frac{n(n+1)}{2} - (\sigma - 1)n^2 - 1 \geqq 0$$

sein, d. h.:

Damit eine Differentialgleichung (A) gefunden w kann, welche die vorgeschriebenen wesentlichen sing Punkte

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, \infty$$

besitzt, und (so drücken wir uns jetzt exacter aus) für welche ein Fundamentalsystem existirt, welches bei Ueberschreitung der Querschnitte $l_1, l_2, \cdot\ l_\sigma$ die vorgeschriebenen Substitutionen

$$A_1, A_2, \cdot\cdot A_\sigma$$

erfährt, muss die Anzahl ϱ der ausserwesentlich singulären Stellen

(18) $$\varrho \geq (\sigma - 1)\frac{n(n-1)}{2} + 1 - n$$

genommen werden.

Da die Gesammtheit aller Differentialgleichungen, deren wesentlich singuläre Punkte die

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, \infty,$$

und deren zugehörige Fundamentalsubstitutionen die

$$A_1, A_2, \cdots A_\sigma, A_{\sigma+1}$$

sind, eine bestimmte Classe ausmacht, so schliessen wir aus der vorgenommenen Constantenzählung, dass bei willkürlicher Wahl der $a_1, a_2, \cdot\ a_\sigma$ eine und nur eine Differentialgleichung der Classe vorhanden sein dürfte, die genau

(19) $$\varrho_0 = (\sigma - 1)\frac{n(n-1)}{2} + 1 - n$$

ausserwesentlich singuläre Stellen besitzt, da, wenn ϱ gleich dieser Anzahl genommen wird, in den Coefficienten von (A) genau ebensoviele noch verfügbare Parameter auftreten, wie in der Gruppe Θ. Natürlich hat diese Folgerung aus der Constantenzählung nur heuristische Bedeutung, wir werden sehr bald sehen, wie dieselbe präcisirt werden muss.

226. Differentialgleichungen derselben Classe, deren determinirende Fundamentalgleichungen übereinstimmen.

Wir hatten in der Nr 224 (S. 376) erkannt, dass die allgemeinste Transformation, durch welche man von der Differentialgleichung (A) zu einer Differentialgleichung (B) derselben Classe übergeht, in der Form

(20) $$g(x)z = h_0 y + h_1 y' + \cdot\ \cdot + h_{n-1} y^{(n-1)}$$

dargestellt werden kann, wo die ganze Function $g(x)$ als ein Product

$$g(x) = G(x)H(x)$$

von zwei Factoren darstellbar ist, deren einer $H(x)$ nur für die wesent-

lichen singulären Stellen $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ verschwindet, während de andere $G(x)$ für jeden ausserwesentlichen singulären Punkt von (A von so hoher Ordnung verschwindet, wie die Vielfachheit dieses ausser wesentlich singulären Punktes angiebt Die $h_0, h_1, \cdots h_{n-1}$ sind dann ganze rationale Functionen, deren Coefficienten, entsprechend jeden linearen Factor von $G(x)$, $n-1$ von einander unabhängige Bedingungen zu erfüllen haben.

Wir stellen uns nun nach Riemann die Aufgabe, die Coefficienten

$$g, h_0, h_1, \cdots h_{n-1}$$

der Relation (20) so zu bestimmen, dass die Differentialgleichung (B) der z Genüge leistet, nicht nur mit (A) zur selben Classe gehört, sondern dass auch für jeden wesentlichen singulären Punkt die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichungen (A) und (B) übereinstimmen

Aus der Forderung folgt zunächst, dass die Exponenten $r_\lambda^{(\varkappa)}$, zu denen die Determinanten

$$D_\varkappa(z; y_1, y_2, \cdots y_n)$$

in Bezug auf die Punkte a_λ gehören, für $\varkappa = 1, 2, \cdots n$ nicht kleiner sind wie die entsprechenden Exponenten r_λ, zu denen

$$D(y_1, y_2, \cdots y_n)$$

gehört. Es ist nämlich im Allgemeinen

$$r_\lambda^{(\varkappa)} = r_\lambda + \varkappa - 1 \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots \sigma;\ \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

Daraus schliessen wir, dass wir $H(x)$ gleich einer Constanten nehmen können, so dass also einfach

$$g(x) = G(x)$$

ist Wir hatten vorausgesetzt, dass die Gleichung (A) genau ϱ einfache ausserwesentlich singuläre Punkte haben sollte; die Voraussetzung, dass alle ausserwesentlich singulären Punkte einfache sind, ist zwar im Folgenden nicht erforderlich, wir halten aber der Bequemlichkeit wegen trotzdem an derselben fest.

Es ist also $g(x)$ eine ganze Function ϱ^{ten} Grades, die für keinen der wesentlich singulären Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ verschwindet. Seien die ganzen Functionen $h_0, h_1, \cdots h_{n-1}$ beziehungsweise von den Graden $\tau_0, \tau_1, \cdots \tau_{n-1}$, so handelt es sich zunächst um die Bestimmung dieser Gradzahlen.

Zu dem Ende betrachten wir den Punkt $x = \infty$ und das zu demselben gehörige canonische Fundamentalsystem von (A)

$$\mathfrak{y}_{\sigma+1,\varkappa} = \left(\frac{1}{x}\right)^{r_{\sigma+1,\varkappa}} \mathfrak{P}_\varkappa\left(\frac{1}{x}\right), \quad \mathfrak{P}_\varkappa(\infty) \neq 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

Dann ist, da die entsprechenden Integrale von (B) zu denselben Exponenten gehören müssen, in der Umgebung von $x = \infty$

$$x^\varrho \left(\frac{1}{x}\right)^{r_{\sigma+1,\varkappa}} \overline{\mathfrak{P}}_\nu\left(\frac{1}{x}\right) = x^{\tau_0}\left(\frac{1}{x}\right)^{r_{\sigma+1,\varkappa}} \mathfrak{P}_{\nu 0}\left(\frac{1}{x}\right) + x^{\tau_1}\left(\frac{1}{x}\right)^{r_{\sigma+1,\varkappa}+1} \mathfrak{P}_{\varkappa 1}\left(\frac{1}{x}\right) + \cdots$$
$$+ x^{\tau_{n-1}}\left(\frac{1}{x}\right)^{r_{\sigma+1,\varkappa}+n-1} \mathfrak{P}_{\nu, n-1}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n),$$

wo die $\mathfrak{P}_\varkappa$, $\overline{\mathfrak{P}}_\nu$, $\mathfrak{P}_{\varkappa 0}$, $\cdots$ $\mathfrak{P}_{\varkappa, n-1}$ gewöhnliche Potenzreihen bedeuten, von denen $\overline{\mathfrak{P}}_\varkappa$ für $x = \infty$ sicher von Null verschieden ist. Es muss folglich

$$\tau_0 \leqq \varrho, \quad \tau_1 \leqq \varrho + 1, \quad \tau_2 \leqq \varrho + 2, \cdots \quad \tau_{n-1} \leqq \varrho + n - 1$$

sein, wir können also im Allgemeinen

$$\tau_\varkappa = \varrho + \varkappa \tag{21}$$

nehmen.

Die ganzen Functionen $h_0, h_1, \cdots h_{n-1}$ enthalten somit

$$n(\varrho + 1) + \frac{n(n-1)}{2}$$

Coefficienten, zwischen denen zufolge der ϱ ausserwesentlichen singulären Punkte, für welche $g(x)$ verschwindet,

$$(n-1)\varrho$$

homogene lineare Bedingungsgleichungen stattfinden, so dass also nur noch

$$n + \varrho + \frac{n(n-1)}{2}$$

dieser Coefficienten verfügbar bleiben. Wir haben jetzt noch die Bedingungen dafür aufzustellen, dass auch für die im Endlichen gelegenen wesentlichen singulären Punkte Uebereinstimmung der Wurzeln der determinirenden Gleichungen von (A) und (B) stattfindet.

Setzen wir in (20) für y die Elemente des zu $x = a_\nu$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems von (A)

$$\mathfrak{y}_{\varkappa i} = (x - a_\varkappa)^{r_{\varkappa i}} \mathfrak{P}_i(x | a_\varkappa) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

ein, so erhalten wir in der Umgebung von $x = a_\varkappa$

$$(x - a_\varkappa)^{r_{\varkappa i}} \mathfrak{P}_i(x|a_\varkappa) = [h_0(a_\varkappa) + h_0'(a_\varkappa)(x - a_\varkappa) + \cdots](x - a_\nu)^{r_{\varkappa i}} \mathfrak{P}_i(x|a_\varkappa)$$
$$+ [h_1(a_\varkappa) + h_1'(a_\varkappa)(x - a_\varkappa) + \cdots](x - a_\varkappa)^{r_{\nu i}-1} \mathfrak{P}_{i1}(x|a_\varkappa) + \cdots$$
$$+ [h_{n-1}(a_\varkappa) + h_{n-1}'(a_\varkappa)(x - a_\varkappa) + \cdots](x - a_\varkappa)^{r_{\varkappa i}-n+1} \mathfrak{P}_{i, n-1}(x|a_\varkappa)$$
$$(i = 1, 2, \ldots n),$$

wo die $\mathfrak{P}_i, \overline{\mathfrak{P}}_i, \cdots \mathfrak{P}_{i,n-1}$ gewöhnliche Potenzreihen bedeuten, die für $x = a_\varkappa$ nicht verschwinden Es müssen folglich auf den rechten Seite dieser Gleichungen die Coefficienten der Potenzen

$$(x-a_\varkappa)^{r_{\varkappa i}-n+1}, \quad (x-a_\varkappa)^{r_{\varkappa i}-n+2}, \cdots (x-a_\varkappa)^{r_{\varkappa i}-1}$$

verschwinden Dies giebt für jeden Werth von i $n-1$ lineare homogene Gleichungen zwischen den

$$h_\lambda^{(\mu)}(a_\varkappa) \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n-1, \ \mu = 0, 1, \cdots \lambda - 1),$$

so dass wir also im Ganzen $n(n-1)$ homogene Gleichungen zwischen diesen

$$\frac{n(n-1)}{2} = n_2$$

Grössen erhalten. Diese Gleichungen lassen, da sie homogen sind, stets eine Auflösung zu, es kommen folglich nur n_2 von einander unabhängige derselben in Betracht.

Entsprechend den σ wesentlich singulären Punkten $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ haben also die Coefficienten der ganzen Functionen $h_0, h_1, \cdots h_n$ im Ganzen

$$\frac{n(n-1)}{2}\sigma$$

homogene lineare Bedingungsgleichungen zu erfüllen. Es bleiben somit noch

$$n + \varrho - (\sigma - 1)\frac{n(n-1)}{2}$$

Constanten verfügbar, wobei zu bemerken ist, dass diese Anzahl mindestens gleich Eins sein muss, da die Multiplication von y mit einem constanten Factor jederzeit freisteht. Es muss also, in Uebereinstimmung mit dem durch die Constantenzählung in der Differentialgleichung gefundenen Resultate, die Anzahl ϱ der einfach zu zählenden ausserwesentlich singulären Stellen

(22) $$\varrho \geqq 1 - n + (\sigma - 1)\frac{n(n-1)}{2} = \varrho_0$$

sein (Ungleichung (18) S. 383).

Wenn die Differentialgleichung (A) genau $\varrho_0 + \nu$ einfach zu zählende ausserwesentlich singuläre Stellen besitzt, so verbleiben also in den Coefficienten der $h_0, h_1, \cdots h_{n-1}$ noch $\nu + 1$ willkürliche Constanten, und zwar hängen die $h_0, h_1, \cdots h_{n-1}$ linear homogen von diesen willkürlichen Parametern ab.

Wenn wir diese $\nu + 1$ Constanten unbestimmt lassen, so stellt uns der Ausdruck (20) stets die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung (B) dar, die mit (A) zur selben Classe

gehört und für welche, wie verlangt wurde, die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen für die wesentlich singulären Punkte dieselben sind wie bei (A), und umgekehrt erhalten wir auf diese Weise auch alle Differentialgleichungen von der gedachten Beschaffenheit.

Zufolge der Fuchs'schen Beziehung (vergl. die Gleichung (13) S 376) ist bei $\varrho = \varrho_0 + \nu$ einfach zu zählenden ausserwesentlich singulären Stellen

$$(23) \qquad r = \sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1} \sum_{i=1}^{n} r_{\varkappa i} = (\sigma - 1)\frac{n(n-1)}{2} - \varrho,$$

also mit Rücksicht auf (22)

$$(24) \qquad r = n - 1 - \nu.$$

Hieraus schliessen wir zunächst, dass für Differentialgleichungen (B) die Anzahl der ausserwesentlich singulären Stellen ebenfalls gleich ϱ sein muss, so lange die $\nu + 1$ Constanten in den $h_0, h_1, \cdots h_{n-1}$ unbestimmt bleiben.

Wir können über diese $\nu + 1$ Constanten aber so disponiren, dass in den Entwickelungen gewisser unter den Ausdrücken

$$h_0 \mathfrak{y}_{\varkappa i} + h_1 \mathfrak{y}'_{\varkappa i} + \cdots + h_{n-1} \mathfrak{y}^{(n-1)}_{\varkappa i} \qquad \begin{pmatrix} \varkappa = 1, 2, & \sigma+1 \\ i = 1, 2, & \cdot n \end{pmatrix}$$

die Anfangsglieder wegfallen. Dadurch, dass wir in einem dieser Ausdrücke ein Anfangsglied zum Verschwinden bringen, verringern wir die Anzahl der willkürlichen Constanten um Eins und vermehren dagegen die Summe

$$\sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1} \sum_{i=1}^{n} s_{\varkappa i} = s$$

der Wurzeln aller zu wesentlichen singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen von (B) mindestens um eine Einheit. Entsprechend vermindert sich dann die Anzahl der einfach zu zählenden ausserwesentlich singulären Stellen von (B) mindestens um eine Einheit, da die Summe $r + \varrho$ stets den unveränderlichen Werth

$$(\sigma - 1)\frac{n(n-1)}{2}$$

behalten muss. Indem wir über ν von den $\nu + 1$ Constanten auf solche Weise disponiren, erhalten wir eine Differentialgleichung (B), für welche die Wurzelsumme s mindestens gleich

$$s = r + \nu$$

und die Anzahl $\bar{\varrho}$ der einfach zu zählenden ausserwesentlich singulären

Stellen höchstens gleich

$$\bar{\varrho} = \varrho_0$$

geworden ist. Diese Differentialgleichung (B) ist dann eindeutig bestimmt, d. h. wir haben den Satz:

Unter den mit (A) zur selben Classe gehörigen Differentialgleichungen lassen sich stets solche aussondern, die ein gewisses Minimum von ausserwesentlichen singulären Stellen besitzen. Ist (B) eine solche Differentialgleichung, so giebt es innerhalb der Classe keine zweite, die die gleiche Anzahl von einfach zu zählenden ausserwesentlich singulären Stellen und dieselben Wurzeln der zu den wesentlich singulären Stellen gehörigen determinirenden Gleichungen hat wie (B).

227. Formulirung zweier verschiedener Probleme, die für die Riemann'sche P-Function zusammenfallen. Contigue Functionen.

Wenn die Gruppe Θ oder genauer die Fundamentalsubstitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_\sigma$$

gegeben sind, und es giebt eine Differentialgleichung (A), die die willkürlich vorgeschriebenen Stellen

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma$$

und $x = \infty$ zu wesentlich singulären Stellen und die $A_1, A_2, \cdots A_\sigma$ als zugehörige Fundamentalsubstitutionen hat, so muss ϱ mindestens gleich $\sigma - 2$ sein. In diesem Falle wird also die Differentialgleichung (B) mit dem Minimum von ausserwesentlich singulären Stellen genau ϱ_0 solcher einfach zu zählender Stellen haben. Wenn die $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ nicht willkürlich, sondern geeignet gewählt sind, so kann die Minimalzahl der ausserwesentlich singulären Stellen unter ϱ_0 herabsinken, sie kann nämlich (vergl. Nr. 225, S. 383) gleich oder grösser wie

$$\varrho_0 - \sigma + 2$$

werden, so lange die Fundamentalsubstitutionen $A_1, A_2, \cdots A_\sigma$ ganz willkürlich gewählt sind; sie kann sich endlich auf eine noch kleinere Zahl bis Null einschliesslich reduciren, wenn für $n > 2$ zwischen den Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen Beziehungen bestehen.

Die Frage, ob Differentialgleichungen von der Form (A) angebbar sind, wenn die Fundamentalsubstitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_\sigma$$

willkürlich vorgeschrieben werden, kommt im Wesentlichen auf die

analoge Existenzfrage für den Fall, wo die projective Monodromiegruppe gegeben ist, zurück. Wir können dieselbe also für Differentialgleichungen zweiter Ordnung ohne ausserwesentlich singuläre Stellen und mit reellen Wurzeln der zu den wesentlich singulären Stellen gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen durch die Untersuchungen der Nummern 211—216 als erledigt ansehen.

Von wesentlich anderer Natur ist die Frage, ob es Differentialgleichungen (A) giebt, für welche nicht nur die Fundamentalsubstitutionen, sondern auch die Lage der wesentlich singulären Stellen

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1}$$

willkürlich gegeben ist. Um dieser Frage näher zu treten, muss man die Art der Abhängigkeit der Integrale einer Differentialgleichung (A) von der Lage jener Stellen (von denen man ein für allemal

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{\sigma+1} = \infty$$

nehmen kann) eingehend untersuchen, insbesondere wird dabei die Art der Abhängigkeit der Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen von den $a_3, a_4, \cdots a_\sigma$ von hervorragender Wichtigkeit sein. Die Einsicht, die wir uns durch die Betrachtungen des zweiten Kapitels des siebenten Abschnittes (Bd. I, S 378 ff.) in die Natur dieser Abhängigkeit verschafft haben, reicht zur Erledigung der aufgeworfenen Frage nicht hin; man wird vorläufig nur durch geeignete Specialisirung des Problems eine Förderung desselben erwarten können.

Da ist es denn der einfachste Fall, der zunächst in Betracht gezogen werden muss und auf den in den letzten Jahren Herr Fuchs durch seine auf denselben bezüglichen tiefen Untersuchungen die Aufmerksamkeit gelenkt hat, der Fall nämlich, wo die Parameter der Monodromiegruppe unabhängig sind von der Lage der singulären Punkte. Ehe wir die Darlegung der Fuchs'schen Untersuchungen in ihrer vollen Allgemeinheit in Angriff nehmen, haben wir noch eines besonderen Falles Erwähnung zu thun, der uns schon vielfach beschäftigt hat und noch vielfach beschäftigen wird; es ist der Fall

$$n = 2, \quad \sigma = 2.$$

Specialisiren wir zunächst auf $n = 2$, so ist in Uebereinstimmung mit dem bei der Betrachtung der projectiven Monodromiegruppe gefundenen Ergebnisse, im Sinne der Constantenzählung, eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ohne ausserwesentlich singulären Punkt möglich, die σ vorgeschriebene Fundamentalsubstitutionen besitzt; die Lage der $\sigma - 2$ singulären Punkte

$$a_3, a_4, \cdots a_\sigma$$

ist dann vollkommen festgelegt, wenn man

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{\sigma+1} = \infty$$

wählt. Das zweite Problem, wo nebst den Fundamentalsubstitutionen auch noch die Lage der wesentlichen singulären Punkte willkürlich vorgeschrieben wird, erfordert das Auftreten von mindestens

$$\varrho_0 = \sigma - 2$$

einfach zu zählenden ausserwesentlichen singulären Stellen. Wir haben gezeigt, dass innerhalb der durch Angabe der Fundamentalsubstitutionen und der wesentlichen singulären Stellen bestimmten Classe die Differentialgleichung mit $\sigma - 2$ ausserwesentlich singulären Stellen eindeutig festgelegt ist, wenn noch die, durch die Fundamentalsubstitutionen nur abgesehen von ganzen Zahlen bestimmten Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen genau gegeben werden. Die Gesammtsumme r dieser Wurzeln ist dann

$$r = \sigma - 1;$$

wenn mehr wie $\sigma - 2$ ausserwesentlich singuläre Stellen zugelassen werden, so ist r entsprechend kleiner als $\sigma - 1$.

Die beiden Probleme, die für $\sigma > 2$ von wesentlich verschiedener Natur sind, fallen zusammen, wenn $\sigma = 2$ genommen wird.

Dieser Fall ist es, den Riemann in seiner Abhandlung „Ueber die durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen" behandelt. In demselben ist die Anzahl der Parameter der Monodromiegruppe gleich

$$n^2(\sigma - 1) + 1 = 5;$$

wir können z. B die sechs Wurzeln der zu den wesentlich singulären Punkten 0, 1, ∞ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen

$$\lambda, \lambda'; \quad \nu, \nu'; \quad \mu, \mu',$$

zwischen denen dann noch die Beziehung

$$\lambda + \lambda' + \nu + \nu' + \mu + \mu' = 1 - \varrho$$

bestehen muss, wenn ϱ die Anzahl der ausserwesentlich singulären Stellen bedeutet, als diese fünf Parameter ansehen. Da $\varrho_0 = 0$ ist, so kann es auch Differentialgleichungen der verlangten Art ohne ausserwesentlich singuläre Stellen geben; dann ist also die Wurzelsumme

$$\lambda + \lambda' + \mu + \mu' + \nu + \nu' = 1,$$

und wir kommen zu der Riemann'schen P-Function, wie sie in der Nr 70 (Bd I, S. 250 ff) definirt worden ist.

Die von Riemann für diese seine Function aufgestellten Sätze ergeben sich nun als specielle Fälle aus unserer allgemeinen Theorie.

Riemann nennt die $\lambda, \lambda', \mu, \mu', \nu, \nu'$ die Exponenten der Function

$$P\begin{pmatrix}\lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \end{pmatrix} x$$

und sagt von den Elementen der zu den einzelnen wesentlich singulären Punkten gehörigen canonischen Fundamentalsysteme, sie seien die zu den bezüglichen Exponenten gehörigen Bestandtheile der P-Function. Dann haben wir zufolge des Satzes der Nr. 226 (S 388) das von Riemann in der Nr. 4 seiner Abhandlung aufgestellte Theorem:

In zwei P-Functionen mit gleichen Exponenten unterscheiden sich die zu denselben Exponenten gehörigen Bestandtheile nur durch einen constanten Factor.

Aus dem Classenbegriffe folgt ferner der Satz der Nr. 7 von Riemann's Arbeit:

Sämmtliche P-Functionen, deren entsprechende Exponenten sich um ganze Zahlen unterscheiden, lassen sich in zwei beliebige von ihnen linear mit rationalen Functionen von x als Coefficienten ausdrücken

Aus diesem Satze folgt bei Riemann die Differentialgleichung für die P-Function (vergl Nr. 70, Bd. I, S 252), und damit ist auch der Existenzbeweis geliefert, wenn man, wie Riemann es thut, die P-Function nur durch ihre Eigenschaften definirt, nämlich dadurch, dass

1) P für alle Werthe von x, ausser 0, 1, ∞, regulär ist,
2) zwischen je drei Zweigen der Function P eine homogene lineare Beziehung mit constanten Coefficienten besteht,
3) P in der Umgebung von $x = 0, \infty, 1$ in der Form darstellbar ist:

$$\begin{aligned} P &= c_{11} x^{\lambda} \mathfrak{P}_{11}(x) + c_{12} x^{\lambda'} \mathfrak{P}_{12}(x), \\ &= c_{31}\left(\frac{1}{x}\right)^{\mu} \mathfrak{P}_{31}\left(\frac{1}{x}\right) + c_{32}\left(\frac{1}{x}\right)^{\mu'} \mathfrak{P}_{32}\left(\frac{1}{x}\right), \\ &= c_{21}(x-1)^{\nu} \mathfrak{P}_{21}(x-1) + c_{22}(x-1)^{\nu'} \mathfrak{P}_{22}(x-1), \end{aligned}$$

wo die $c_{\iota\varkappa}$ Constanten, die $\mathfrak{P}_{\iota\varkappa}$ für verschwindende Werthe des Argumentes von Null verschiedene gewöhnliche Potenzreihen bedeuten.

Die aus der Gauss'schen Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ entspringende P-Function ist (vergl Nr. 70, 71)

$$\text{(I)} \qquad P\begin{pmatrix}0 & \alpha & \gamma-\alpha-\beta & \\ 1-\gamma & \beta & 0 & x\end{pmatrix};$$

daraus folgt sofort, dass die P-Functionen, welche aus den zu $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ contiguen Reihen (Nr. 75, Bd I, S. 268) entspringen,

Exponenten besitzen, die sich von denen der Function (I) nur um ganze Zahlen unterscheiden. Die Gauss'schen Beziehungen zwischen je dreien der zu einander contiguen Functionen sind also Specialfälle der zu Folge des letzterwähnten Riemann'schen Satzes bestehenden Beziehungen zwischen P-Functionen, deren Exponenten um ganze Zahlen von einander verschieden sind Die Art, wie Riemann aus diesen Relationen die Differentialgleichung der P-Function herstellt, ist auch nur eine Verallgemeinerung des Verfahrens, mit Hülfe dessen Gauss in der zweiten (nachgelassenen) Arbeit über die Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ die Differentialgleichung für dieselbe aus den „relationes inter functiones contiguas“ ableitet.

Allgemein hätte man als das Analogon der contiguen Functionen die Lösungen von Differentialgleichungen derselben Classe und mit der gleichen Anzahl von einfach zu zählenden ausserwesentlichen singulären Stellen zu betrachten

Die Differentialgleichungen, die mit der Differentialgleichung der Function

$$P\begin{pmatrix}\lambda & \mu & \nu & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & x\end{pmatrix}$$

zur selben Classe gehören, können im Allgemeinen noch beliebig viele ausserwesentlich singuläre Punkte enthalten Ihre Lösungen sind dann P-Functionen allgemeinerer Art. Einen besonderen Fall solcher verallgemeinerten P-Functionen hat Riemann gelegentlich in der von Hattendorf herausgegebenen Abhandlung „über die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begränzung“ in Betracht gezogen Es ist dies eine Function, die, wie wir kurz sagen können, mit der gewöhnlichen P-Function

$$\text{(II)} \qquad P\begin{pmatrix}0 & \dfrac{-\alpha-\beta-\gamma+1}{2} & 0 & \\ \alpha & \dfrac{-\alpha+\beta-\gamma+1}{2} & \gamma & x\end{pmatrix}$$

zur selben Classe gehört, und für welche die Exponentensumme nicht Eins, sondern -1 ist Riemann bezeichnet dieselbe durch

$$Q\begin{pmatrix}0 & \dfrac{-\alpha-\beta-\gamma-1}{2} & 0 & \\ \alpha & \dfrac{-\alpha+\beta-\gamma-1}{2} & \gamma & x\end{pmatrix}$$

und zeigt, dass sie sich durch die Function (II) und deren erste Ableitung homogen linear mit ganzen Coefficienten darstellen lässt

Die lineare Differentialgleichung mit den wesentlichen singulären Stellen a, b, c, der die allgemeine Riemann'sche P-Function

$$P\begin{pmatrix} a & b & c & \\ \lambda & \mu & \nu & x \\ \lambda' & \mu' & \nu' & \end{pmatrix}$$

genügt, ist so beschaffen, dass die Parameter ihrer Monodromiegruppe unabhängig sind von der Lage der Punkte a, b, c. Wir wenden uns nun zu den allgemeinen Untersuchungen von Herrn Fuchs über lineare Differentialgleichungen, deren Monodromiegruppe von gewissen in den Coefficienten auftretenden Parametern unabhängig ist; bei denselben werden die Untersuchungen des zehnten Abschnittes, besonders die der Nr. 175, in höchst merkwürdiger Weise zur Anwendung kommen.

Neuntes Kapitel.

228. Differentialgleichungen, deren Monodromiegruppe von einem in den Coefficienten auftretenden Parameter unabhängig ist. Sätze von Fuchs.

Sei die lineare homogene Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n y = 0$$

vorgelegt, deren Coefficienten wir vorläufig als eindeutige Functionen von x voraussetzen. Möge ferner t ein Parameter sein, von dem die Coefficienten $p_1, \cdots p_n$ so abhängen, dass sie innerhalb eines gewissen Gebietes von x, t monogene analytische Functionen dieser beiden Variabeln sind.

Wir nehmen nun an, dass ein Fundamentalsystem

$$y_1, y_2, \cdots y_n$$

von (A) existirt, welches die Eigenschaft hat, dass die Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen und also auch die jeder Substitution der Monodromiegruppe Θ, die zu jenem Fundamentalsysteme gehört, von dem Parameter t unabhängig sind. Wir sagen dann kurz, die **Monodromiegruppe der Differentialgleichung (A) sei von t unabhängig.**

Wenn sich für einen geschlossenen Umlauf $\mathfrak{U}$ von x das Integral $y_\varkappa(x, t)$ in

$$\text{(1)} \qquad \Theta y_\varkappa = \sum_{\iota=1}^{n} \alpha_{\varkappa\iota} y_\iota \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

verwandelt, so sind also die $\alpha_{\varkappa\iota}$ von x und von t unabhängige Grössen.

Nach den Ergebnissen der Nummern 85 und 106 (Band I) sind die Integrale von (A) monogene analytische Functionen von t; wenn wir also in den Coefficienten von (A) an Stelle von t setzen

$$t + \delta t,$$

wo δt eine Grösse bedeutet, deren absoluter Betrag eine gewisse Grenze

nicht überschreitet, so verwandelt sich (A) in eine Differentialgleichung $(\overline{A})$, für welche die Ausdrücke

$$y_\varkappa(x, t + \delta t) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

ein Fundamentalsystem darstellen. Lassen wir x wiederum den Umlauf $\mathfrak{U}$ vollziehen, so ist gemäss unserer Voraussetzung

$$(2) \qquad \Theta y_\varkappa(x, t + \delta t) = \sum_{\iota=1}^{n} \alpha_{\varkappa\iota} y_\iota(x, t + \delta t) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n),$$

also folgt durch Subtraction der Gleichungen (2), (1) und nach Division durch δt

$$\Theta \left\{ \frac{y_\varkappa(x, t + \delta t) - y_\varkappa(x, t)}{\delta t} \right\} = \sum_{\iota=1}^{n} \alpha_{\varkappa\iota} \frac{y_\iota(x, t + \delta t) - y_\iota(x, t)}{\delta t},$$

und wenn wir hierin δt gegen Null convergiren lassen,

$$(3) \qquad \Theta \left(\frac{\partial y_\varkappa(x, t)}{\partial t} \right) = \sum_{\iota=1}^{n} \alpha_{\varkappa\iota} \frac{\partial y_\iota(x, t)}{\partial t} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

So lange t innerhalb gewisser Grenzen bleibt, haben die Functionen

$$\frac{\partial y_1}{\partial t}, \; \frac{\partial y_2}{\partial t}, \; \ldots \frac{\partial y_n}{\partial t},$$

als Functionen von x betrachtet, keine anderen Singularitäten, wie die

$$y_1, y_2, \cdots y_n$$

selbst. Dieselben bilden folglich im Sinne der Nr 163 (S. 112) ein mit dem Systeme $[y_\nu]$ cogredientes Functionssystem, und nach den Ergebnissen jener Nummer besteht demnach eine Gleichung von der Form

$$(4) \qquad \frac{\partial y_\varkappa}{\partial t} = R_0 y_\varkappa + R_1 \frac{\partial y_\nu}{\partial x} + R_2 \frac{\partial^2 y_\varkappa}{\partial x^2} + \cdots + R_{n-1} \frac{\partial^{n-1} y_\varkappa}{\partial x^{n-1}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n),$$

wo die $R_0, R_1, \cdots R_{n-1}$ eindeutige Functionen von x sind.

Wenn umgekehrt von der Differentialgleichung (A) bekannt ist, dass ein Fundamentalsystem $[y_\varkappa]$ derselben Gleichungen von der Form (4) befriedigt, so bestehen offenbar für jeden Umlauf $\mathfrak{U}$ von x die Gleichungssysteme (1) und (3) gleichzeitig. Es ist dann leicht einzusehen, dass die $\alpha_{\nu\iota}$ von t unabhängig sein müssen.

In der That folgt durch Differentiation der Gleichungen (1) nach t

$$\frac{\partial \Theta y_\varkappa}{\partial t} = \Theta \left(\frac{\partial y_\nu}{\partial t} \right) = \sum_{\iota=1}^{n} \alpha_{\varkappa\iota} \frac{\partial y_\iota}{\partial t} + \sum_{\iota=1}^{n} \frac{\partial \alpha_{\varkappa\iota}}{\partial t} y_\iota \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n),$$

also durch Subtraction von (3)

$$0 = \sum_{\iota=1}^{n} \frac{\partial \alpha_{\varkappa\iota}}{\partial t} y_\iota \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots n)$$

Da aber die $\alpha_{\varkappa i}$ von x unabhängig sind und die $y_1, y_2, \cdots y_n$ ein Fundamentalsystem constituiren, muss, wie behauptet wurde,

$$\frac{\partial \alpha_{\varkappa i}}{\partial t} = 0 \qquad (i, \gamma = 1, 2, \dots n)$$

sein. Wir haben also den Satz:

Das Bestehen von Gleichungen von der Form (4) ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass die zum Fundamentalsysteme $[y_\varkappa]$ gehörige Monodromiegruppe Θ von dem in den Coefficienten der Differentialgleichung (A) auftretenden Parameter t unabhängig ist.

Es möge von nun ab vorausgesetzt werden, dass die Differentialgleichung (A) zur Fuchs'schen Classe gehört.

Die Functionen

$$\frac{\partial y_1}{\partial t}, \frac{\partial y_2}{\partial t}, \cdots \frac{\partial y_n}{\partial t},$$

von denen bereits hervorgehoben wurde, dass ihre Singularitäten mit denen der Integrale $y_1, y_2, \cdots y_n$ übereinstimmen, befriedigen die nicht homogene lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$(5) \qquad \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) + p_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) + \cdots + p_n \frac{\partial y}{\partial t}$$
$$= - \frac{\partial p_1}{\partial t} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} - \frac{\partial p_2}{\partial t} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} - \cdots - \frac{\partial p_n}{\partial t} y,$$

die aus (A) durch Differentiation nach t hervorgeht. Sei $x = a$ ein singulärer Punkt von (A) und $\mathfrak{y}_\varkappa$ ein Element des zu $x = a$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems, welches, wie wir der Einfachheit wegen voraussetzen wollen, in Reihenform

$$\mathfrak{y}_\varkappa = (x-a)^r \mathfrak{P}(x|a), \quad \mathfrak{P}(a|a) \neq 0,$$

darstellbar ist. Dann ist, wenn wir in (5) $\mathfrak{y}_\varkappa$ an die Stelle von y einsetzen, die rechte Seite dieser Gleichung so beschaffen, dass sich ihre logarithmische Ableitung in der Umgebung von $x = a$ wie eine rationale Function verhält, und dass sie selbst in der Form

$$(x-a)^\mu \overline{\mathfrak{P}}(x|a), \quad \overline{\mathfrak{P}}(a|a) \neq 0$$

darstellbar ist, wo μ eine Constante bedeutet. Aus dem Satze der

Nr 58 (Bd. I, S 207) folgt demnach, dass der Punkt $x = a$ für die Function

$$\frac{\partial \mathfrak{y}_\varkappa}{\partial t}$$

eine Stelle der Bestimmtheit ist

Wir schliessen hieraus, dass, wenn y das allgemeine Integral der Differentialgleichung (A) bedeutet, auch die Function

$$\frac{\partial y}{\partial t}$$

als Function von x sich allenthalben bestimmt verhält

Es gehören folglich die Functionssysteme

$$\left[\frac{\partial y_\varkappa}{\partial t}\right] \quad \text{und} \quad [y_\varkappa]$$

zur selben Classe im Sinne von Riemann (Nr 222, S 368), die Coefficienten $R_0, R_1, \cdots R_{n-1}$ in den Gleichungen (4) sind also in diesem Falle rationale Functionen von x.

229. System von linearen Differentialgleichungen, welches rationale Particularlösungen besitzen muss.

Die Bedingungen dafür, dass die Differentialgleichung (A) die durch die Gleichungen (4) charakterisirte Eigenschaft besitzt, lassen sich in folgender Weise darstellen

Bezeichnen wir mit $P(y)$ die linke Seite der Differentialgleichung (A) und mit $R(y)$ die rechte Seite von (4), also

$$P(y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y,$$
$$R(y) = R_0 y + R_1 y' + \cdots + R_{n-1} y^{(n-1)},$$

so lautet die Differentialgleichung (5)

$$\text{(5a)} \qquad P\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial t} y^{(n-1)} + \frac{\partial p_2}{\partial t} y^{(n-2)} + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial t} y = 0.$$

Sei

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

ein willkürliches Integral von (A), so können die $c_1, c_2, \cdot\ c_n$ noch als Functionen von t gewählt werden. Es ist also

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{\partial c_\varkappa}{\partial t} y_\varkappa + \sum_{\varkappa=1}^{n} c_\varkappa \frac{\partial y_\varkappa}{\partial t},$$

und da nach (4)

$$\frac{\partial y_\varkappa}{\partial t} = R(y_\varkappa)$$

ist, so finden wir

$$(6)\qquad P\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = P\left(\sum_{\nu=1}^{n} c_{\varkappa} R(y_{\varkappa})\right) = PR(y),$$

da ja offenbar

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{\partial c_{\varkappa}}{\partial t} y_{\varkappa}$$

eine Lösung von (A) darstellt.

Es besteht demnach für ein willkürliches Integral y von (A) die Gleichung

$$(7)\qquad PR(y) + \frac{\partial p_1}{\partial t} y^{(n-1)} + \cdot\ \cdot + \frac{\partial p_n}{\partial t} y = 0.$$

Bedeuten u, v zwei willkürliche Functionen von x, so ist

$$P(uv) = \sum_{\varkappa=0}^{n} u^{(n-\varkappa)}[n_{\varkappa} v^{(\varkappa)} + (n-1)_{\varkappa-1} p_1 v^{(\varkappa-1)} + (n-2)_{\varkappa-2} p_2 v^{(\varkappa-2)} + \cdot$$
$$+ (n-\varkappa+1) p_{\varkappa-1} v' + p_{\varkappa} v];$$

wir finden also

$$(8)\qquad P(R_{\varkappa} y^{(\varkappa)}) = \sum_{\lambda=0}^{n} R_{\varkappa}^{(n-\lambda)}[n_{\lambda} y^{(\varkappa+\lambda)} + (n-1)_{\lambda-1} p_1 y^{(\varkappa+\lambda-1)} + \cdot$$
$$+ (n-\lambda+1) p_{\lambda-1} y^{(\varkappa+1)} + p_{\lambda} y^{(\varkappa)}].$$

Sei nunmehr

$$z_1,\ z_2,\ \cdot\cdot\ z_n$$

das zu $[y_i]$ adjungirte Fundamentalsystem, so erhalten wir unter Benutzung der in der Nr. 23 (Bd. I, S. 63) eingeführten Bezeichnungen aus (8), wenn wir in diese Gleichung y_i für y einsetzen, mit

$$\frac{d^{\mu} z_i}{dx^{\mu}} = z_i^{(\mu)}$$

multipliciren und in Bezug auf i summiren:

$$(9)\quad \sum_{i=1}^{n} z_i^{(\mu)} P(R_{\varkappa} y_i^{(\varkappa)}) = \sum_{\lambda=0}^{n} R_{\varkappa}^{(n-\lambda)}[n_{\lambda} s_{\varkappa+\lambda,\mu} + (n-1)_{\lambda-1} p_1 s_{\nu+\lambda-1,\mu} + \cdot\cdot$$
$$+ (n-\lambda+1) p_{\lambda-1} s_{\varkappa+1,\mu} + p_{\lambda} s_{\varkappa,\mu}] = Q_{\mu}(R_{\varkappa}).$$

Zufolge des Appell'schen Satzes sind (vergl. Nr. 169, S. 138 und Nr. 23, Bd. I, S. 63) die Ausdrücke

$$s_{\alpha,\beta} = \sum_{\varkappa=1}^{n} y_{\varkappa}^{(\alpha)} z_{\varkappa}^{(\beta)}$$

rationale Functionen von x; die $Q_{\mu}(R_{\varkappa})$ sind demnach lineare

Differentialausdrücke der R_x mit in x rationalen Coefficienten.

Setzen wir nunmehr in der Gleichung (7) an die Stelle von y die Integrale y_i, multipliciren mit $z_i^{(\mu)}$ und summiren in Bezug auf i, so erhalten wir mit Rücksicht auf (9) die Gleichung

$$(10)\quad Q_\mu(R_0) + Q_\mu(R_1) + \cdots + Q_\mu(R_{n-1}) + \frac{\partial p_1}{\partial t} s_{n-1,\mu} + \frac{\partial p_2}{\partial t} s_{n-2,\mu} + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial t} s_{0,\mu} = 0.$$

Diese Gleichung liefert für

$$\mu = 0, 1, 2, \cdots n-1$$

ein System von linearen Differentialgleichungen für die $R_0, R_1, \cdots R_{n-1}$

Wenn die Differentialgleichung (A) die durch die Gleichungen (4) charakterisirte Eigenschaft haben soll, so müssen die Differentialgleichungen (10) ein System von Particularintegralen besitzen, die rationale Functionen von x sind.

230 Differentialgleichungen gerader ($2m^{\text{ter}}$) Ordnung. Satz von Fuchs über die Reductibilität der m^{ten} Associirten.

Wir greifen nunmehr auf die Untersuchungen der Nummern 171 und 175 zurück und setzen demgemäss im Folgenden voraus, dass die Ordnung der Differentialgleichung (A) eine gerade Zahl

$$n = 2m$$

sei. Es wird sich dann vorwiegend um die Untersuchung der m^{ten} associirten Differentialgleichung $(A^{(m)})$ von (A) handeln, deren Ordnung ν gleich

$$\nu = (2m)_m$$

ist, und für welche

$$u_{11}, u_{12}, \cdots u_{1\nu}$$

das dem Fundamentalsysteme $[y_x]$ von (A) entsprechende Fundamentalsystem (im Sinne der Nr. 168, S. 130) bedeutet

Da die Monodromiegruppe der Differentialgleichung $(A^{(m)})$ aus den m^{ten} associirten Substitutionen der Monodromiegruppe Θ von (A) gebildet wird (Nr. 169, S. 136), so schliessen wir unmittelbar, dass, wenn Θ von dem Parameter t unabhängig ist, dies auch für die Monodromiegruppe von $(A^{(m)})$ der Fall sein wird; d. h. die Integrale

$$u_{12}, u_{12}, \cdots u_{1\nu}$$

befriedigen die den Gleichungen (4) analogen Gleichungen

$$\mathfrak{T}(f\mathfrak{u}_{1\lambda}) = f^2\mathfrak{T}(\mathfrak{u}_{1\lambda}) = f^2 \frac{d}{dt}\mathfrak{Z}(\mathfrak{u}_{1\lambda}),$$

also auch der Ausdruck

$$\mathfrak{T}(f\mathfrak{u}_{1\lambda})$$

von x unabhängig. Ebenso ist offenbar

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{u}_{1\lambda} + \mathfrak{u}_{1\mu}) \qquad {\scriptstyle (\lambda, \mu = 1, 2, \quad \nu)}$$

von x unabhängig. Also ist auch

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{u}_{1\lambda}, \mathfrak{u}_{1\mu}) = \frac{\partial \mathfrak{T}(\mathfrak{u}_{1\lambda})}{\partial \mathfrak{u}_{1\lambda}} \mathfrak{u}_{1\mu} + \cdots + \frac{\partial \mathfrak{T}(\mathfrak{u}_{1\lambda})}{\partial \mathfrak{u}_{1\lambda}^{(\nu-1)}} \mathfrak{u}_{1\mu}^{(\nu-1)}$$

von x unabhängig, da ja

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{u}_{1\lambda} + \mathfrak{u}_{1\mu}) = \mathfrak{T}(\mathfrak{u}_{1\lambda}) + \mathfrak{T}(\mathfrak{u}_{1\mu}) + \mathfrak{T}(\mathfrak{u}_{1\lambda}, \mathfrak{u}_{1\mu})$$

gefunden wird

Für eine zweite von x unabhängige Grösse g ist aber

$$\mathfrak{T}(f\mathfrak{u}_{1\lambda} + g\mathfrak{u}_{1\mu}) = \mathfrak{T}(f\mathfrak{u}_{1\lambda}) + \mathfrak{T}(g\mathfrak{u}_{1\mu}) + fg\mathfrak{T}(\mathfrak{u}_{1\lambda}, \mathfrak{u}_{1\mu}),$$

also ist auch der Ausdruck

$$\mathfrak{T}(f\mathfrak{u}_{1\lambda} + g\mathfrak{u}_{1\mu})$$

von x unabhängig, d. h. wir haben den Satz:

Die Form $\mathfrak{T}(\mathfrak{u})$ ist ebenso wie $\mathfrak{Z}(\mathfrak{u})$ gleich einer von x unabhängigen Grösse, wenn wir für $\mathfrak{u}$ irgend eine Lösung der Differentialgleichung $(\mathfrak{A}^{(m)})$ einsetzen.

Aus dieser Eigenschaft der Form $\mathfrak{T}(\mathfrak{u})$ erschliessen wir nun genau ebenso, wie in der Nr. 175 (S. 158 ff) aus der analogen Eigenschaft der daselbst betrachteten Form $\mathfrak{Z}(\mathfrak{u})$, dass

$$\frac{\partial \mathfrak{T}(\mathfrak{u})}{\partial \mathfrak{u}^{(\nu-1)}} = \mathfrak{M}_1(\mathfrak{u})$$

einen Multiplicator der Differentialgleichung $(\mathfrak{A}^{(m)})$, d. h. also eine Lösung der zu $(\mathfrak{A}^{(m)})$ adjungirten Differentialgleichung darstellt, wenn man für $\mathfrak{u}$ irgend eine Lösung von $(\mathfrak{A}^{(m)})$ einsetzt. Bedeutet also $\mathfrak{u}$ irgend eine solche Lösung, so haben wir in $\mathfrak{M}_1(\mathfrak{u})$ und in

$$\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial \mathfrak{u}^{(\nu-1)}} = \mathfrak{M}(\mathfrak{u})$$

zwei Lösungen der zu $(\mathfrak{A}^{(m)})$ adjungirten Differentialgleichung, die beide als lineare homogene Differentialausdrücke von höchstens $(\nu - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung von $\mathfrak{u}$ mit in x rationalen Coefficienten dargestellt sind.

Auf Grund des am Schlusse der Nr. 175 (S. 163) bewiesenen Satzes folgt hieraus, dass die Differentialgleichung $(\mathfrak{A}^{(m)})$ und folglich

auch die m^{te} associirte Differentialgleichung $(A^{(m)})$ von (A) reductibel sein muss, wenn nicht

$$\mathfrak{M}_1(u) = \text{const.}\ \mathfrak{M}(u)$$

ist. Das letztere ist im Allgemeinen nicht der Fall, wir haben also den wunderbaren von Herrn Fuchs gefundenen Satz:

Wenn die Monodromiegruppe der Differentialgleichung $2m^{ter}$ Ordnung (A) der Fuchs'schen Classe von einem in den Coefficienten von (A) auftretenden Parameter t unabhängig ist, so ist die m^{te} associirte Differentialgleichung von (A) reductibel.

Unter gewissen besonderen Voraussetzungen über die Art, wie die Coefficienten der Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe (A) von dem Parameter t abhängen, kann es sich ereignen, dass, wenn die Monodromiegruppe von (A) von t unabhängig ist, die Coefficienten $R_0, R_1, \cdots R_{n-1}$ der Relation (4) nicht nur rationale Functionen von x, sondern rationale Functionen von x und t sind. Wenn dies der Fall ist, so lassen sich mittelst der Gleichungen (4) und der Differentialgleichung (A) alle partiellen Ableitungen der Integrale $[y_\varkappa]$ nach den beiden Variabeln x und t als homogene lineare Functionen der $y_\varkappa$ und ihrer $n-1$ Ableitungen

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial y_\varkappa}{\partial x}, \ \frac{\partial^2 y_\varkappa}{\partial x^2}, \ \cdots \ \frac{\partial^{n-1} y_\varkappa}{\partial x^{n-1}}$$

mit in x und t rationalen Coefficienten darstellen, sofern die Coefficienten von (A) auch rationale Functionen von t sind.

Man erhält also insbesondere

$$\text{(II)} \quad \frac{\partial^\mu y_\varkappa}{\partial t^\mu} = R_{\mu 0} y_\varkappa + R_{\mu 1} \frac{\partial y_\varkappa}{\partial x} + \cdots + R_{\mu, n-1} \frac{\partial^{n-1} y_\varkappa}{\partial x^{n-1}} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n), \quad (\mu = 1, 2, \ldots n)$$

und hieraus ergiebt sich durch Elimination der Grössen (I) eine homogene lineare Differentialgleichung von höchstens n^{ter} Ordnung, der die $[y_\varkappa]$ als Functionen von t genügen, und deren Coefficienten rationale Functionen von t und dem jetzt als Parameter fungirenden x sind.

Wenn die Determinante

$$|R_{\mu\nu}| \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots n-1)$$

von Null verschieden ist, so ist die Differentialgleichung, der die $[y_\varkappa]$ als Functionen von t genügen, wirklich von n^{ter} Ordnung. Dann lassen sich aber aus den Gleichungen (II) die Grössen (I) ausrechnen, d. h. wir erhalten insbesondere

$$\frac{\partial y_\varkappa}{\partial x} = \overline{R}_0 y_\varkappa + \overline{R}_1 \frac{\partial y_\varkappa}{\partial t} + \cdots + \overline{R}_{n-1} \frac{\partial^{n-1} y_\varkappa}{\partial t^{n-1}} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n),$$

und hieraus folgt auf Grund des Satzes der Nr. 228 (S. 396), dass di Monodromiegruppe der linearen Differentialgleichung mit der unab hängigen Variabeln t, der die $[y_x]$ genügen, von dem in den Coeffi cienten dieser Differentialgleichung auftretenden Parameter x unabhängig ist. Wir haben also den Satz:

Wenn die Coefficienten der Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe (A) den Parameter t rational enthalten und wenn für ein Fundamentalsystem $[y_x]$ die Gleichungen (4) bestehen, deren Coefficienten ebenfalls rational von den beiden Variabeln x und t abhängen, so befriedigen die $[y_x]$ als Functionen von t auch eine lineare homogene Differentialgleichung, deren Ordnung die von (A) nicht übertrifft, und es sind die Coefficienten der Substitutionen, welche die $[y_x]$ bei einem geschlossenen Umlaufe von x erleiden, von t, und die Coefficienten der ebenfalls linearen Substitutionen, die die $[y_x]$ bei einem geschlossenen Umlaufe von t erleiden, von x unabhängig.

Die nun folgenden Untersuchungen werden uns eine ausgedehnte Classe von linearen Differentialgleichungen liefern, die zu der in dem eben ausgesprochenen Theoreme charakterisirten Kategorie gehören.

Zwölfter Abschnitt.

Theorie und Anwendungen der Euler'schen Transformirten.

Erstes Kapitel.

231. Neue Herleitung der Laplace'schen Transformirten. Anwendung der dabei befolgten Methode. Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument.

Wir knüpfen an die auf die Laplace'sche Transformirte bezüglichen Untersuchungen (viertes Kapitel des siebenten Abschnittes, Bd. I) an und wollen zunächst die Herleitung der Nr. 113 (Bd. I, S 407) in etwas modificirter Form wiedergeben, um einerseits dasjenige, was der Methode von Laplace eigenthümlich ist, und andererseits die Rolle, die der adjungirten Differentialgleichung zufällt, deutlich hervortreten zu lassen.

Die Differentialgleichung (A) werde in derselben Form angenommen, wie in der Nr. 110 (Bd. I, S. 394),

$$(A) \qquad D_x(y) = \sum_{\varkappa=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} C_{i\varkappa} x^i \frac{d^\varkappa y}{dx^\varkappa} = \sum_{\varkappa=0}^{n} P_\varkappa(x) \frac{d^\varkappa y}{dx^\varkappa} = 0,$$

so dass also die Coefficienten

$$P_n(x), \quad P_{n-1}(x), \cdots P_0(x)$$

ganze rationale Functionen m^{ten} Grades (in der Nr. 110 war dieser Grad durch p bezeichnet worden) von x sind; es wird ferner

$$C_{mn} = 1$$

vorausgesetzt.

Bilden wir nun den von x und einem Parameter z abhängigen Ausdruck

$$D_x(e^{zx}) = \sum_{\varkappa=0}^{n} P_\varkappa(x) z^\varkappa e^{zx},$$

so lässt sich derselbe umformen, wenn man beachtet, dass

$$(\alpha) \qquad x^\varkappa \frac{\partial^\varkappa e^{zx}}{\partial x^\varkappa} = z^\varkappa \frac{\partial^\varkappa e^{zx}}{\partial z^\varkappa}$$

ist. Entwickeln wir nämlich die Producte

$$P_\varkappa(x) e^{zx}$$

nach den successiven Ableitungen von e^{zx}, d. h. setzen wir

$$e^{zx} P_\varkappa(x) = \sum_{i=0}^{m} C_{i\varkappa} \frac{d^i e^{zx}}{dz^i} = e^{zx} \sum_{i=0}^{m} C_{i\varkappa} x^i \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots n),$$

so ergiebt sich

$$(1) \qquad D_x(e^{zx}) = \sum_{\varkappa=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} C_{i\varkappa} x^i z^\varkappa e^{zx} = \varDelta_z(e^{zx}),$$

wo $\varDelta_z(u)$ den in der Nr. 112 (Bd. I, S. 400) mit $\varDelta(u)$ bezeichneten linearen homogenen Differentialausdruck m^{ter} Ordnung

$$\varDelta_z(u) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{\varkappa=0}^{n} C_{i\varkappa} z^\varkappa \frac{d^i u}{dz^i} = \sum_{i=0}^{m} \Pi_i(z) \frac{d^i u}{dz^i}$$

mit der unabhängigen Variabeln z bedeutet (vergl. Nr. 117, Bd. I S. 426).

Bezeichnen wir durch

$$\varDelta_z'(v) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \frac{d^i(\Pi_i(z) v)}{dz^i}$$

den zu $\varDelta_z(v)$ adjungirten, durch

$$\varDelta_z(f, g) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{h=0}^{i-1} (-1)^h \frac{d^h(\Pi_i(z) g)}{dz^h} \frac{d^{i-h-1} f}{dz^{i-h-1}}$$

den begleitenden bilinearen Differentialausdruck (Nr. 24, Bd. I, S. 69) so erhalten wir für

$$f = e^{zx}, \quad g = v$$

aus der Beziehung von Lagrange (a. a. O. Bd. I, S 68, Gleich. (30))

$$(2) \qquad v \varDelta_z(e^{zx}) - e^{zx} \varDelta_z'(v) = \frac{d}{dz} \varDelta_z(e^{zx}, v),$$

und da nach (1) für eine beliebige Function v von z

$$D_x(v e^{zx}) = v \varDelta_z(e^{zx})$$

ist, so folgt aus (2)

$$D_x(v e^{zx}) = \frac{d}{dz} \varDelta_z(e^{zx}, v) + e^{zx} \varDelta_z'(v).$$

Integriren wir diese Gleichung auf einem Wege l in Bezug auf z, so ergiebt sich

$$D_x\Big(\int_{(l)} v e^{zx} dz\Big) = \int_{(l)} \frac{d}{dz} \varDelta_z(e^{zx}, v) dz + \int_{(l)} e^{zx} \varDelta_z'(v) dz;$$

wenn also v als eine Lösung der Differentialgleichung

(L) $$\varDelta_z'(v) = 0$$

gewählt wird, die nichts anderes ist, wie die Laplace'sche Transformirte von (A) (vergl. Nr. 111, Bd. I, S. 400), so stellt in Uebereinstimmung mit der Nr. 113 (Bd. I, S. 408) der Ausdruck

$$J_l(x) = \int_{(l)} v e^{zx} dz$$

eine Lösung von (A) dar, sofern wir l so einrichten, dass

$$\int_{(l)} \frac{d}{dz} \varDelta_z(e^{zx}, v) dz = 0$$

ist.

Das Charakteristische der Methode von Laplace besteht in der Anwendung der Function

$$e^{zx}.$$

Wir wollen jetzt an die Stelle dieser Function den Ausdruck

$$(z-x)^{\xi-1}$$

treten lassen, wo ξ irgend eine beliebige von z und x unabhängige Grösse bedeutet. Die Function e^{zx} geht im Wesentlichen aus diesem Ausdrucke hervor, indem man ξ in geeigneter Weise unendlich gross werden lässt.

Setzen wir in die linke Seite der Differentialgleichung (A) den Ausdruck

$$(z-x)^{\xi-1}$$

an die Stelle von y, so erhalten wir im Wesentlichen die zur Stelle $x = z$ gehörige charakteristische Function (Nr. 44, Bd. I, S. 156)

(3) $$D_x((z-x)^{\xi-1}) = \sum_{\varkappa=0}^{n} (-1)^{\varkappa} P_{\varkappa}(x)(\xi-1)(\xi-2) \cdot (\xi-\varkappa)(z-x)^{\xi-\varkappa-1}$$

Um diesen Ausdruck in ähnlicher Weise umzuformen wie vorhin den Ausdruck

$$D_x(e^{zx}),$$

entwickeln wir die Producte

$$P_{\varkappa}(x)(z-x)^{\xi-1}$$

nach den successiven Ableitungen von $(z-x)^{\xi-1}$, d. h. wir entwickeln die ganzen Functionen $P_{\varkappa}(x)$ nach Potenzen von $z-x$:

$$P_\varkappa(x) = \sum_{i=0}^{m} \frac{P_\varkappa^{(i)}(z)}{i!}(x-z)^i \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots n).$$

Dann ist

$$D_x((z-x)^{\xi-1}) = \sum_{\varkappa=0}^{n}\sum_{i=0}^{m}(-1)^{\varkappa+i}\frac{(\xi-1)(\xi-2)\cdots(\xi-\varkappa)}{i!}P_\varkappa^{(i)}(z)(z-x)^{\xi-\varkappa+i-1}$$

oder, wenn wir einen neuen Summationsindex

$$\nu = m + \varkappa - i$$

einführen, der dann alle ganzzahligen Werthe von 0 bis $m+n$ durchläuft und

$$(4) \qquad \varphi_\nu(z) = \sum_{\varkappa=0}^{n}(-1)^{m-\nu}\frac{(\xi-1)(\xi-2)\cdots(\xi-\varkappa)}{(\xi+m-1)(\xi+m-2)\cdots(\xi+m-\nu)}\frac{P_\varkappa^{(m+\varkappa-\nu)}(z)}{(m+\varkappa-\nu)!}$$

setzen, so ist

$$D_x((z-x)^{\xi-1}) = \sum_{\nu=0}^{m+n}\varphi_\nu(z)\frac{d^\nu}{dz^\nu}(z-x)^{\xi+m-1}.$$

Führen wir nun durch die Formel

$$\mathfrak{D}_z(u) = \sum_{\nu=0}^{m+n}\varphi_\nu(z)\frac{d^\nu u}{dz^\nu}$$

einen homogenen linearen Differentialausdruck $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung mit der unabhängigen Variabeln z und mit in z ganzen rationalen Coefficienten ein, so finden wir die Gleichung

$$(\mathrm{C}) \qquad D_x((z-x)^{\xi-1}) = \mathfrak{D}_z((z-x)^{\xi+m-1}),$$

die wir als den Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument bezeichnen wollen Es ist nämlich auf der linken Seite x das Argument und z der Parameter, auf der rechten Seite z das Argument und x der Parameter.

232. Satz von Abel für lineare Differentialgleichungen und Anwendung desselben auf die hyperelliptischen Integrale dritter Gattung.

Aus den Gleichungen (4) lassen sich die $P_\nu(z)$ durch die $\varphi_\nu(z)$ und deren Ableitungen ausdrücken. Die Rechnung gestaltet sich am einfachsten, wenn man $\varphi_\nu(z)$ zunächst nach Potenzen von $z-x$ entwickelt,

$$\varphi_\nu(z) = \sum_{\lambda=0}^{m}\frac{\varphi_\nu^{(\lambda)}(x)}{\lambda!}(z-x)^\lambda,$$

und diese Entwickelungen in die rechte Seite der Gleichung (C) einsetzt. Man erhält auf diese Weise

$$\mathfrak{D}_z\left((z-x)^{\xi+m-1}\right)$$

$$=\sum_{\nu=0}^{m+n}\sum_{\lambda=0}^{m}\frac{(\xi+m-1)(\xi+m-2)\cdots(\xi+m-\nu)}{\lambda!}\,\varphi_\nu^{(\lambda)}(x)\,(z-x)^{\xi+m-\nu+\lambda-1},$$

oder wenn man

$$\varkappa=\nu-\lambda-m$$

als neuen Summationsindex einführt,

$$\mathfrak{D}_z\left((z-x)^{\xi+m-1}\right)$$

$$=\sum_{\varkappa=-2m}^{n}(z-x)^{\xi-\varkappa-1}\sum_{\nu=0}^{m+n}(\xi+m-1)(\xi+m-2)\cdots(\xi+m-\nu)\frac{\varphi_\nu^{(\nu-m-\varkappa)}(x)}{(\nu-m-\varkappa)!},$$

und dies muss zufolge des Vertauschungssatzes (C) mit der rechten Seite der Gleichung (3) übereinstimmen. Die Coefficientenvergleichung ergiebt dann

$$(5)\quad \sum_{\nu=0}^{m+n}(-1)^{\varkappa}\frac{(\xi+m-1)(\xi+m-2)\cdots(\xi+m-\nu)}{(\xi-1)(\xi-2)\cdots(\xi-\varkappa)}\,\frac{\varphi_\nu^{(\nu-m-\varkappa)}(x)}{(\nu-m-\varkappa)!}$$

$$=\begin{cases}0 & \text{für } \varkappa<0,\\ P_\varkappa(x) & \text{für } \varkappa\geqq 0.\end{cases}$$

In mehr übersichtlicher Form tritt die Beziehung zwischen den beiden Differentialausdrücken

$$D_x(y),\quad \mathfrak{D}_z(u)$$

durch die folgende Ueberlegung zu Tage.

Setzen wir

$$\overline{P}_{\varkappa+m}(x)=(-1)^{m+\varkappa}\frac{(\xi-1)(\xi-2)\cdots(\xi-\varkappa)}{(m+\varkappa)!}\,P_\varkappa(x)\qquad(\varkappa=0,1,\ldots n),$$

$$\overline{P}_\nu(x)=0\quad\text{für}\quad \nu<m,$$

$$\overline{\varphi}_\varkappa(x)=(-1)^{\varkappa}(\xi+m-1)_\varkappa\,\varphi_\varkappa(x)\qquad(\varkappa=0,1,\ldots m+n),$$

so ist nach (4) und (5)

$$\overline{\varphi}_\nu(x)=\sum_{\varkappa=0}^{m+n}(-1)^{\varkappa}\varkappa_\nu\,\overline{P}_\varkappa^{(\varkappa-\nu)}(x),$$

$$\overline{P}_\nu(x)=\sum_{\nu=0}^{m+n}(-1)^{\nu}\nu_\varkappa\,\overline{\varphi}_\nu^{(\nu-\varkappa)}(x).$$

Nun lautet aber die explicite Form des zu einem Differentialausdrucke

$$\sum_{\varkappa=0}^{p}p_\varkappa\frac{d^\varkappa y}{dx^\nu}$$

adjungirten Differentialausdruckes

$$\sum_{\varkappa=0}^{p}(-1)^{\varkappa}\frac{d^{\varkappa}(p_{\varkappa}w)}{dx^{\varkappa}}=\sum_{\varkappa=0}^{p}\sum_{\nu=0}^{\varkappa}(-1)^{\varkappa}\varkappa_{\nu}\frac{d^{\varkappa-\nu}p_{\varkappa}}{dx^{\varkappa-\nu}}\frac{d^{\nu}w}{dx^{\nu}}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{p}\frac{d^{\nu}w}{dx^{\nu}}\sum_{\nu=0}^{p}(-1)^{\varkappa}\varkappa_{\nu}\frac{d^{\varkappa-\nu}p_{\varkappa}}{dx^{\varkappa-\nu}}.$$

Setzen wir also

$$\overline{D}_{x}(y)=\sum_{\varkappa=0}^{n}(-1)^{\varkappa}\frac{(\xi-1)(\xi-2)\quad(\xi-\varkappa)}{(m+\varkappa)!}P_{\varkappa}(x)\frac{d^{\varkappa}y}{dx^{\varkappa}},$$

$$\overline{\mathfrak{D}}_{x}(u)=\sum_{\nu=0}^{m+n}(-1)^{\nu}(\xi+m-1)_{\nu}\varphi_{\nu}(x)\frac{d^{\nu}u}{dx^{\nu}},$$

so sind die beiden Differentialausdrücke

$$(-1)^{m}\overline{D}_{x}\left(\frac{d^{m}y}{dx^{m}}\right)=\sum_{\varkappa=0}^{m+n}\overline{P}_{\varkappa}(x)\frac{d^{\varkappa}y}{dx^{\varkappa}}$$

und

$$\overline{\mathfrak{D}}_{x}(u)$$

einander adjungirt. Bezeichnen wir durch $\overline{D}_{x}'(w)$ den zu $\overline{D}_{x}(y$ adjungirten Differentialausdruck, so ist nach dem Thomé-Frobenius schen Reciprocitätssatze (Nr. 21, Bd. I, S. 59)

$$\overline{\mathfrak{D}}_{x}(u)=\frac{d^{m}}{dx^{m}}[\overline{D}_{x}'(u)].$$

Wir wenden uns nun zu der Gleichung (C), die wir ein wenig umformen wollen, um einerseits ihre Bedeutung klarer hervortreten zu lassen und um andererseits zu zeigen, wie sich aus derselben durch Specialisirung ein von Abel entdeckter Satz ergiebt, der von ihm al der Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument be zeichnet worden ist.

Es ist offenbar

$$\frac{d^{m+\mu}}{dz^{m+\mu}}(z-x)^{\xi+m-1}=\xi(\xi+1)\cdots(\xi+m-1)\frac{d^{\mu}(z-x)^{\xi-1}}{dz^{\mu}}$$

Hieraus und aus der Gleichung (4) ergiebt sich

$$\mathfrak{D}_{z}((z-x)^{\xi+m-1})=\sum_{\mu=0}^{n}\frac{d^{\mu}(z-x)^{\xi-1}}{dz^{\mu}}\sum_{\varkappa=\mu}^{n}(-1)^{\mu}\frac{(\xi-1)\quad(\xi-\varkappa)}{(\xi-1)\cdot(\xi-\mu)}\frac{P_{\varkappa}^{(\varkappa-\mu)}(}{(\varkappa-\mu)!}$$

$$+\sum_{\nu=0}^{m-1}(\xi+m-1)\cdots(\xi+m-\nu)(z-x)^{\xi+m-\nu-}$$

$$\sum_{\varkappa=0}^{n}(-1)^{m-\nu}\frac{(\xi-1)\cdots(\xi-\varkappa)}{(\xi+m-1)\cdot(\xi+m-\nu)}\frac{P_{\varkappa}^{(m+\varkappa-\nu)}(z)}{(m+\varkappa-\nu)!}$$

Setzen wir nun $\xi = 0$, so ist demnach

$$(6)\quad \mathfrak{D}_z((z-x)^{m-1})$$
$$= D_z'((z-x)^{-1}) + \sum_{\nu=0}^{m-1} (z-x)^{m-\nu-1} \sum_{\varkappa=0}^{n} \frac{P_\varkappa^{(m+\varkappa-\nu)}(z)}{(m+\varkappa-\nu)!} (-1)^{m-\nu-\varkappa} \varkappa!.$$

Eine einfache Rechnung ergiebt aber

$$\frac{d^\varkappa}{dz^\varkappa}\left[\frac{P_\varkappa(z)-P_\varkappa(x)}{z-x}\right] = \frac{d^\varkappa}{dz^\varkappa} \sum_{i=1}^{m} \frac{P_\varkappa^{(i)}(z)}{i!}(x-z)^{i-1}$$
$$= \sum_{\nu=0}^{m-1} (x-z)^{m-\nu-1} \frac{P_\varkappa^{(m-\nu+\varkappa)}(z)}{(m-\nu-1)!} \sum_{\lambda=0}^{\varkappa} \frac{(-1)^\lambda \varkappa_\lambda}{m-\nu+\lambda},$$

und nach einer bekannten combinatorischen Formel ist

$$\sum_{\lambda=0}^{\varkappa} (-1)^\lambda \frac{\varkappa_\lambda}{m+\lambda} = \frac{\varkappa!}{m(m+1)\cdot(m+\varkappa)};$$

wir finden also

$$\frac{d^\varkappa}{dz^\nu}\left[\frac{P_\varkappa(z)-P_\varkappa(x)}{z-x}\right] = \sum_{\nu=0}^{m-1} (z-x)^{m-\nu-1} (-1)^{m-\nu-1} \frac{\varkappa!}{(m-\nu+\varkappa)} P_\varkappa^{(m-\nu+\varkappa)}(z).$$

Hieraus und aus der Gleichung (6) folgt nunmehr mit Rücksicht auf die Gleichung (C)

$$(C_0)\quad D_x\left(\frac{1}{z-x}\right) = D_z'\left(\frac{1}{z-x}\right) - \sum_{\varkappa=0}^{m} (-1)^\varkappa \frac{d^\varkappa}{dz^\varkappa}\left[\frac{P_\varkappa(z)-P_\varkappa(x)}{z-x}\right],$$

und dies ist die Form, auf welche Jacobi den Abel'schen Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument gebracht hat.

Setzen wir die ganze rationale Function von z und x

$$(7)\quad -\sum_{\varkappa=0}^{m} (-1)^\varkappa \frac{d^\varkappa}{dz^\varkappa}\left[\frac{P_\varkappa(z)-P_\varkappa(x)}{z-x}\right] = U = \sum_i \sum_\varkappa c_{i\varkappa} x^i z^\varkappa,$$

so ergiebt sich mit Rücksicht auf die Form des zu $D_x(y)$ adjungirten Differentialausdruckes, dass $c_{i\varkappa}$ nichts anderes ist, wie der Coefficient von x^i in dem Ausdrucke

$$-D_x(x^{-\varkappa-1}),$$

oder der Coefficient von $z^\varkappa$ in dem Ausdrucke

$$-D_z'(z^{-i-1}).$$

Bezeichnen wir mit $y(x)$ ein Integral der Differentialgleichung (A), mit $\eta(x)$ ein Integral der zu (A) adjungirten Differentialgleichung

$$D_x'(w) = 0,$$

so ist, zufolge der Lagrange'schen Beziehung,

$$-y(z)D_z'\left(\frac{1}{z-x}\right)=\frac{d}{dz}D_z\left(y(z),\frac{1}{z-x}\right),$$

$$\eta(x)D_x\left(\frac{1}{z-x}\right)=\frac{d}{dx}D_x\left(\frac{1}{z-x},\eta(x)\right).$$

Multipliciren wir also die erste dieser Gleichungen mit $\eta(x)$, die zweite mit $y(z)$ und addiren, so folgt, wenn wir beachten, dass

$$D_z'\left(\frac{1}{z-x}\right)=-D_z'\left(\frac{1}{x-z}\right)$$

ist, mit Rücksicht auf die Gleichungen (C_0) und (7)

$$(\Gamma)\qquad \frac{d}{dx}D_x\left(\frac{y(z)}{z-x},\eta(x)\right)-\frac{d}{dz}D_z\left(y(z),\frac{\eta(x)}{x-z}\right)=Uy(z)\eta(x).$$

Wir wollen zeigen, wie sich aus dieser Gleichung für $n=1$ der Satz von der Vertauschung des Parameters mit dem Argumente für die hyperelliptischen Integrale dritter Gattung ergiebt.

Nehmen wir also $n=1$, dann lautet die Differentialgleichung (A)

$$(A_1)\qquad D_x(y)=P_1(x)\frac{dy}{dx}+P_0(x)y=0$$

und ihre adjungirte

$$(A_1')\qquad D_x'(\eta)=-P_1(x)\frac{d\eta}{dx}+[P_0(x)-P_1'(x)]\eta=0.$$

Wir nehmen der Einfachheit wegen an, dass die Differentialgleichung (A_1) zur Fuchs'schen Classe gehört, dann kann $P_1(x)$ nur von einander verschiedene lineare Factoren enthalten, und $P_0(x)$ muss vom Grade $m-1$ sein, wenn $P_1(x)$ genau vom m^{ten} Grade ist. Sei

$$P_1(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_\sigma)(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_\varrho),$$
$$\sigma+\varrho=m,$$

und möge in Partialbrüche zerlegt

$$(8)\qquad -\frac{P_0}{P_1}=\sum_{\iota=1}^{\sigma}\frac{r_\iota}{x-a_\iota}+\sum_{\iota=1}^{\varrho}\frac{\mathfrak{r}_\iota}{x-b_\iota}$$

sein. Dabei denken wir uns die Bezeichnung so gewählt, dass die

$$\mathfrak{r}_1,\ \mathfrak{r}_2,\cdots\mathfrak{r}_\varrho$$

ganze Zahlen bedeuten, während keine der Grössen

$$r_1,\ r_2,\cdots r_\sigma$$

eine ganze Zahl ist. D. h. die

$$b_1,\ b_2,\cdots b_\varrho$$

sind scheinbar singuläre Stellen von (A_1).

Das allgemeine Integral von (A_1) lautet, wenn wir die willkürliche Constante gleich Eins nehmen,

$$y(x) = (x - a_1)^{r_1} \cdots (x - a_\sigma)^{r_\sigma}(x - b_1)^{\mathfrak{r}_1} \cdots (x - b_\varrho)^{\mathfrak{r}_\varrho},$$

und das entsprechende Integral der adjungirten Differentialgleichung ist folglich

$$\eta(x) = (x - a_1)^{-r_1-1} \cdots (x - a_\sigma)^{-r_\sigma-1}(x - b_1)^{-\mathfrak{r}_1-1} \cdots (x - b_\varrho)^{-\mathfrak{r}_\varrho-1}.$$

Der Ausdruck U ist in unserem Falle

$$U = -\frac{P_0(z) - P_0(x)}{z - x} + \frac{d}{dz}\frac{P_1(z) - P_1(x)}{z - x},$$

und der bilineare Differentialausdruck von (A_1) reducirt sich auf

$$D_x(f, g) = P_1(x) f g.$$

Wir erhalten aus (Γ) die Formel

$$(9) \qquad \frac{d}{dx}\left[P_1(x)\eta(x)\frac{y(z)}{z - x}\right] - \frac{d}{dz}\left[P_1(z)y(z)\frac{\eta(x)}{x - z}\right]$$
$$= y(z)\eta(x)\left\{-\frac{P_0(z) - P_0(x)}{z - x} + \frac{d}{dz}\frac{P_1(z) - P_1(x)}{z - x}\right\};$$

dieselbe soll nun weiter specialisirt werden.

Betrachten wir nämlich den Fall, wo die Differentialgleichung (A_1) mit ihrer adjungirten (A_1') identisch ist.

Dann muss (vergl. Nr. 25, Bd. I, S. 70 ff.)

$$P_0(x) = \frac{1}{2} P_1'(x)$$

sein. Es fallen dann die $b_1, b_2, \cdots b_\varrho$ weg, und in (8) ist

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_m = \frac{1}{2}, \quad \sigma = m.$$

Die Integrale $y(x)$ und $\eta(x)$ reduciren sich auf

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{P_1(x)}}, \quad \eta(x) = \frac{1}{\sqrt{P_1(x)}},$$

und U nimmt die Form an

$$U = \frac{1}{2}\frac{P_1'(z) + P_1'(x)}{z - x} - \frac{P_1(z) - P_1(x)}{(z - x)^2}$$

Die Gleichung (9) liefert demnach

$$(10) \qquad \frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt{P_1(x)}}{(z - x)\sqrt{P_1(z)}}\right] - \frac{d}{dz}\left[\frac{\sqrt{P_1(z)}}{(x - z)\sqrt{P_1(x)}}\right] = \frac{U}{\sqrt{P_1(x)}\sqrt{P_1(z)}},$$

und dies ist unmittelbar die Form, in welcher der Vertauschungssatz von Parameter und Argument für das hyperelliptische Integral dritter Gattung

$$\int \frac{dx}{(x-z)\sqrt{P_1(x)}}, \quad P_1(x) = \prod_{\lambda=1}^{m}(x-a_\lambda)$$

gewöhnlich geschrieben zu werden pflegt.

Die ausserordentliche Wichtigkeit des Vertauschungssatzes (10) für die Theorie der hyperelliptischen Transcendenten liegt darin, dass es Herrn Weierstrass gelungen ist, aus diesem Satze die in der Nr. 206 (S. 295) erwähnten Beziehungen zwischen den Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale zum ersten Male abzuleiten Die Entdeckung dieser Beziehungen bildete eine Epoche in der Theorie der Abel'schen Functionen, da es nur auf Grund derselben für Herrn Weierstrass möglich ward, für die allgemeinen hyperelliptischen Functionen das zu leisten, was im einfachsten Falle der zu einer Quadratwurzel aus einer ganzen Function sechsten Grades gehörigen sogenannten ultraelliptischen Functionen Göpel und Rosenhain geleistet hatten, nämlich die Lösung des Jacobi'schen Umkehrproblems mit Hülfe der Transcendenten Θ. Wir werden auf das von Herrn Weierstrass in seiner Braunsberger Programmarbeit vom Jahre 1848/49 angewandte Verfahren an späterer Stelle einzugehen haben und daselbst auch die analogen, jedoch viel allgemeineren Folgerungen kennen lernen, die Herr Fuchs aus dem Vertauschungssatze (Γ) für die Integrale beliebiger linearer Differentialgleichungen gezogen hat

233. Definition der Euler'schen Transformirten einer linearen homogenen Differentialgleichung. Reciprocität. Integration durch Quadraturen. Doppelschleifen.

Jetzt wollen wir auf die den Vertauschungssatz darstellende Gleichung (C) (Nr. 231, S. 408) ein ähnliches Verfahren anwenden, wie für den Fall der Laplace'schen Transformirten auf die Gleichung (1) (S. 406).

Bezeichnen wir mit

$$\mathfrak{D}_z'(v), \quad \mathfrak{D}_z(f, g)$$

den adjungirten linearen, beziehungsweise den begleitenden bilinearen Differentialausdruck von $\mathfrak{D}_z(u)$, so ergiebt sich aus der Beziehung von Lagrange und aus der Gleichung (C) für eine beliebige Function v von z und einen Integrationsweg L die Gleichung

$$D_x\Big(\int_{(L)} v(z-x)^{\xi-1}dz\Big) = \int_{(L)} \frac{d}{dz}\mathfrak{D}_z((z-x)^{\xi-1+m}, v)\,dz$$
$$+\int_{(L)} (z-x)^{\xi+m-1}\mathfrak{D}_z'(v)\,dz.$$

Bedeutet also v eine Lösung der Differentialgleichung

(11) $$\mathfrak{D}_z'(v) = 0,$$

und denken wir uns den Integrationsweg L so gewählt, dass

(12) $$\int_{(L)} \frac{d}{dz}\mathfrak{D}_z((z-x)^{\xi+m-1}, v)\,dz = 0$$

ist, so besitzen wir in

(13) $$y = \int_{(L)} v(z-x)^{\xi-1}dz$$

eine Lösung von (A).

Euler war der erste, der die Lösung einer gewissen speciellen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung (die im Wesentlichen auf die Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe hinauskommt) in der Form eines bestimmten Integrales, oder wie sich die älteren Analysten auszudrücken pflegten, durch eine Quadratur von der Art

$$\int_\alpha^\beta v(z-x)^{\xi-1}dz$$

darstellte, wo α, β von z unabhängig sind und v eine blosse Function von z bedeutet; wir wollen darum die Differentialgleichung (11) (nach Analogie der von Herrn Poincaré eingeführten Bezeichnung „Laplace'sche Transformirte" für die Gleichung (L) S. 407) die Euler'sche Transformirte von (A) nennen.

Offenbar ist aber auch umgekehrt

(14) $$u = \int_{(\varDelta)} w(z-x)^{\xi+m-1}dx$$

eine Lösung der Differentialgleichung $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung

($\mathfrak{A}$) $$\mathfrak{D}_z(u) = 0,$$

wenn w eine Lösung der zu (A) adjungirten Differentialgleichung

$$D_x'(w) = 0$$

und $\varDelta$ einen Integrationsweg bedeutet, für welchen

(15) $$\int_{(\varDelta)} \frac{d}{dx} D_x((z-x)^{\xi-1}, w)\,dx = 0$$

ist. Wir haben also den Satz, der dem in der Nr. 117 (Bd. I, S. 426 für die Laplace'sche Transformirte gefundenen Satze ganz analog ist

Die adjungirte Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) der Euler'sche Transformirten der Differentialgleichung (A) ist so beschaffen, dass ihre Euler'sche Transformirte die Adjungirte der ursprünglichen Differentialgleichung (A) ist. Die Differentialgleichungen ($\mathfrak{A}$) und (A) integriren sich gegenseitig durch Quadraturen nach der Methode von Euler.

Es handelt sich jetzt noch darum, die Integrationswege L beziehungsweise Λ in geeigneter Weise zu wählen. Offenbar hängt diese Wahl wesentlich ab von der Lage der singulären Stellen der unter den Integralzeichen auftretenden Functionen, d. h. also von den singulären Punkten der beiden Differentialgleichungen (A) und ($\mathfrak{A}$). Da aber zufolge der Gleichungen (4) (S. 408)

$$\varphi_{m+n}(z) = (-1)^{m+n} P_n(z)$$

ist, so sind für die Differentialgleichungen (A) und ($\mathfrak{A}$) die singulären Stellen dieselben, und wir können uns demnach darauf beschränken etwa die Bestimmung der Integrationswege Λ zu unserer Aufgabe zu machen.

Zufolge der Gleichung (15) muss der Integrationsweg Λ so beschaffen sein, dass im Anfangs- und Endpunkte desselben der Ausdruck

$$(16) \qquad D_x((z-x)^{\xi-1}, w)$$

denselben Werth annimmt, dass aber trotzdem das auf diesem Wege erstreckte Integral (14) nicht identisch verschwindet. Wir werden also ähnliche Integrationswege zu benutzen haben, wie im vierten Kapite des siebenten Abschnittes (Bd. I), d. h. entweder geschlossene Wege welche die singulären Punkte des Ausdruckes (16) in geeigneter Weise umschlingen, oder aber solche, die in einem dieser singulären Punkte beginnen und endigen und zwar in der Weise, dass die ersten und letzten Wegelemente ganz bestimmte Richtungen einhalten, die so gewählt werden müssen, dass die Bedingung (15) erfüllt wird (vergl. Nr. 114 Bd. I, S. 411, Nr. 116, ebenda S. 418). Die letztere Art von Integrationswegen ist nur bei solchen singulären Punkten anwendbar, die Unbestimmtheitsstellen der Integrale w sind; da wir im Folgenden die Untersuchung von Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe im Auge haben, so lassen wir diese Art von Wegen bei Seite.

Wir erhalten geschlossene Wege, die nicht von singulären Punkten ausgehen und der Bedingung (15) Genüge leisten, auf folgende Weise

Seien

$$a_1, \ a_2, \ \cdot \ a_\sigma$$

die von einander verschiedenen Nullstellen der ganzen rationalen Function

$$P_n(x)$$

und fixiren wir nebst diesen in der x-Ebene noch die Stelle z. Denken wir uns dann von den Punkten

$$a_1, \ a_2, \cdots a_\sigma, \ z$$

aus die Querschnitte

$$l_1, \ l_2, \cdots l_\sigma, \ l_0$$

nach dem Unendlichen hin gelegt, so sind in der so zerschnittenen x-Ebene

$$w, \ (z - x)^{\xi - 1}$$

eindeutig, also auch (16) eindeutig. Bedeute nun ζ irgend einen regulären Punkt der x-Ebene, sei l ein von ζ ausgehender geschlossener Weg, der die Querschnitte $l_1, l_2, \cdots l_\sigma$ beliebig oft und in beliebiger Aufeinanderfolge überschreitet, und möge das allgemeine Integral w der zu (A) adjungirten Differentialgleichung, wenn x den Umlauf l vollzieht, in Θw übergehen. Ferner sei s_0 eine von ζ aus um den Punkt z herum gelegte einfache Schleife, die den Querschnitt l_0 einmal in positiver Richtung überschreitet.

Integriren wir nun von ζ ausgehend längs l, dann längs s_0, dann längs l aber im entgegengesetzten Sinne und endlich längs s_0 ebenfalls im entgegengesetzten Sinne, d. h. also auf dem Wege:

$$l s_0 l^{-1} s_0^{-1},$$

so ist die Function (16) zu ihrem Ausgangswerthe zurückgekehrt, und es ist folglich

$$\text{(17)} \qquad \int\limits_{(l s_0 l^{-1} s_0^{-1})} w (z - x)^{\xi + m - 1} dx$$

eine Lösung der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) Beachten wir, dass

$$\text{(17a)} \quad \begin{cases} \int\limits_{(l)} w (z - x)^{\xi + m - 1} dx + \int\limits_{(l^{-1})} \Theta w (z - x)^{\xi + m - 1} dx = 0, \\ \int\limits_{(s_0)} w (z - x)^{\xi + m - 1} dx + \int\limits_{(s_0^{-1})} w \, e^{2\pi \xi \sqrt{-1}} (z - x)^{\xi + m - 1} dx = 0 \end{cases}$$

ist, so erkennen wir, dass sich das Integral (17) in die Form setzen lässt

$$(18)\quad \int\limits_{(ls_0 l^{-1} s_0^{-1})} w(z-x)^{\xi+m-1}dx = \left(1-e^{2\pi\xi\sqrt{-1}}\right)\int\limits_{(l)} w(z-x)^{\xi+m-1}dx$$
$$-\int\limits_{(s_0)}(w-\Theta w)(z-x)^{\xi+m-1}dx.$$

Der Weg l lässt sich zusammensetzen aus den vom Punkte ξ aus um die Punkte a_i herum gelegten einfachen Schleifen s_i, die so beschaffen sind, dass sie nur den Querschnitt l_i einmal in positivem Sinne überschreiten. Da ferner nach Vollzug der Integration über eine solche Schleife s_i das Integral w der zu (A) adjungirten Differentialgleichung in ein anderes Integral derselben Differentialgleichung übergegangen ist, so können wir sagen:

Bedeutet $w_1, w_2, \cdot\cdot w_n$ ein Fundamentalsystem der zu (A) adjungirten Differentialgleichung, so lassen sich die über Wege von der Art

$$ls_0 l^{-1} s_0^{-1}$$

erstreckten Integrale (17) linear, homogen und mit constanten Coefficienten zusammensetzen aus den Integralen

$$(19)\quad \int\limits_{(s_\varkappa)} w_i(z-x)^{\xi+m-1}dz \qquad \begin{pmatrix}\varkappa=0,1, & \sigma,\\ i=1,2, & n\end{pmatrix}.$$

Nehmen wir z. B. $l=s_\varkappa$, betrachten also den Weg

$$s_\varkappa s_0 s_\varkappa^{-1} s_0^{-1} \qquad (\varkappa=1,2,\cdot\ \sigma),$$

so ist das über denselben hin erstreckte Integral (17) jedenfalls eine Lösung von ($\mathfrak{A}$); einen solchen Weg bezeichnet man gewöhnlich als eine um die beiden Punkte $a_\varkappa$, z herumgelegte Doppelschleife (Fig. 10). Solche Doppelschleifen hatten wir auch schon in der Nr 114 (Bd. I, S. 410) bei Gelegenheit der Integration der Laplace'schen Differentialgleichung angewandt, wir bemerken jedoch, dass die um zwei Punkte

$$a_i,\ a_\varkappa,\quad i \neq \varkappa,$$

herum gelegte Doppelschleife

$$s_i s_\varkappa s_i^{-1} s_\varkappa^{-1}$$

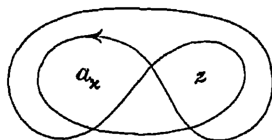


Fig 10

im Allgemeinen nicht einen Weg Λ liefert, für welchen die Bedingung (15) erfüllt ist, sondern dass dies dann und nur dann der Fall ist, wenn die Werthänderung, die das Integral w auf dem Wege $s_i s_\varkappa$ erfährt, dieselbe ist, wie die auf dem Wege $s_\varkappa s_i$.

Wir wollen allgemein die Frage so formuliren:

1. Wie müssen die constanten Coefficienten der linearen homogenen Verbindungen der Integrale (19) bestimmt werden, damit diese Verbindungen Lösungen der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) darstellen?

2. Lässt sich aus solchen Verbindungen ein Fundamentalsystem von ($\mathfrak{A}$) zusammensetzen?

234 Differentialgleichungen, deren Integrale im Unendlichen nicht unbestimmt sind. Vereinfachung der Euler'schen Transformirten und des Vertauschungssatzes.

Indem wir die allgemeine Discussion der am Schlusse der vorigen Nummer aufgestellten Probleme bei Seite lassen, beschränken wir uns auf den Fall, wo die Differentialgleichung (A) der Fuchs'schen Classe angehört.

Zunächst schliessen wir aus den in der Nr. 232 (S. 409) dargelegten Beziehungen zwischen den Differentialgleichungen (A) und ($\mathfrak{A}$), am einfachsten wohl daraus, dass die Differentialausdrücke

$$\sum_{\varkappa=0}^{m+n} \overline{P}_\varkappa(x) \frac{d^\varkappa y}{dx^\varkappa} \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{D}}_x(u)$$

einander adjungirt sind, dass eine singuläre Stelle, die für die eine der beiden Differentialgleichungen (A) und ($\mathfrak{A}$) eine Stelle der Bestimmtheit ist, auch für die andere denselben Charakter besitzen muss Insbesondere folgt also hieraus der Satz:

Wenn von den beiden Differentialgleichungen (A), ($\mathfrak{A}$) die eine der Fuchs'schen Classe angehört, so ist dasselbe auch für die andere der Fall.

Wir machen vorläufig nur die allgemeinere Voraussetzung, dass der *unendlich ferne Punkt $x = \infty$ eine Stelle der Bestimmtheit für die Differentialgleichung (A) sein möge*; es werden dann die oben abgeleiteten Formeln einer wesentlichen Vereinfachung fähig, *indem sich nämlich die Differentialgleichung $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung ($\mathfrak{A}$) durch eine solche von der m^{ten} Ordnung ersetzen lässt.*

In der That ist, damit sich die sämmtlichen Lösungen der Differentialgleichung (A) im Punkte $x = \infty$ bestimmt verhalten, nach den Ergebnissen der Nr 110 (Bd I, S 394) nothwendig und hinreichend, dass die Grade der Coefficienten

$$P_n, \; P_{n-1}, \cdot \; \cdot P_0$$

abnehmen. Wenn also m der wirkliche Grad von $P_n(x)$ ist, so kann man $m \geqq n$ voraussetzen, und $P_\varkappa(x)$ darf höchstens vom Grade $m-n+\varkappa$ sein. Also ist für $\nu < n$

$$P_\varkappa^{(m+\varkappa-\nu)}(x) = 0,$$

d. h. es sind nach Gleichung (4) (Nr. 231, S. 408) die

$$\varphi_0(z), \quad \varphi_1(z), \quad \cdots \quad \varphi_{n-1}(z)$$

sämmtlich gleich Null, so dass sich die Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) in der Form

$$\mathfrak{D}_z(u) = \sum_{\nu=0}^{m} \varphi_{n+\nu}(z) \frac{d^\nu}{dz^\nu}\left(\frac{d^n u}{dz^n}\right) = 0$$

als Differentialgleichung m^{ter} Ordnung für die n^{te} Ableitung von u schreiben lässt.

Setzen wir also

$$(20)\left\{\begin{aligned} Q_\nu(z) &= \sum_{\varkappa=0}^{n} (-1)^{m-n-\nu} \frac{(\xi-1)(\xi-2)\quad(\xi-\varkappa)}{(\xi+m-n-1)\quad\cdot(\xi+m-n-\nu)} \frac{P_\varkappa^{(m+\varkappa-n-\nu)}(z)}{(m+\varkappa-n-\nu)!} \\ &= (\xi+m-1)(\xi+m-2)\cdots(\xi+m-n)\,\varphi_{n+\nu}(z), \end{aligned}\right.$$

woraus sich gemäss den Gleichungen (4), (5) umgekehrt

$$(21)\quad \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\varkappa \frac{(\xi+m-n-1)\quad(\xi+m-n-\nu)}{(\xi-1)(\xi-2)\cdot\quad(\xi-\varkappa)} \frac{Q_\nu^{(\nu-m+n-\varkappa)}(x)}{(\nu-m+n-\varkappa)!}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{für } \varkappa < 0, \\ P_\varkappa(x) & \text{für } \varkappa \gtreqqless 0 \end{cases}$$

ergiebt, so kann die Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$(\mathrm{E})\qquad E_z(u) = \sum_{\nu=0}^{m} Q_\nu(z) \frac{d^\nu u}{dz^\nu} = 0$$

an die Stelle von ($\mathfrak{A}$) treten.

Denn aus den Formeln der Nummern 231, 232 (S. 408 ff.) ergiebt sich zunächst die Gleichung

$$(\mathrm{C}')\qquad D_x\left((z-x)^{\xi-1}\right) = E_z\left((z-x)^{\xi+m-n-1}\right),$$

und wenn

$$E_z'(v), \quad E_z(f, g)$$

den adjungirten linearen, beziehungsweise den begleitenden bilinearen Differentialausdruck von $E_z(u)$ bedeuten, so haben wir

$$(22)\qquad D_x\left(\int v(z-x)^{\xi-1}dz\right) = E_z\left((z-x)^{\xi+m-n-1}, v\right) + \int (z-x)^{\xi+m-n-1} E_z'(v)\,dz,$$

(23) $$E_z\left(\int w(z-x)^{\xi+m-n-1}dx\right) = D_x((z-x)^{\xi-1}, w) + \int (z-x)^{\xi-1} D_x'(w)\,dx.$$

Es stellt folglich

(24) $$y = \int_{(L)} v(z-x)^{\xi-1} dz$$

eine Lösung von (A) dar, wenn

(E′) $$E_z'(v) = 0$$

und

(25) $$\int_{(L)} \frac{d}{dz} \dot{E}_z((z-x)^{\xi+m-n-1}, v)\,dz = 0$$

ist, und umgekehrt haben wir in

(26) $$u = \int_{(A)} w(z-x)^{\xi+m-n-1} dx$$

eine Lösung von (E), wenn

(A′) $$D_x'(w) = 0$$

und

(27) $$\int_{(A)} \frac{d}{dx} D_x((z-x)^{\xi-1}, w)\,dx = 0$$

ist.

Wir können dann (E′) als die Euler'sche Transformirte von (A) und umgekehrt (A′) als die Euler'sche Transformirte von (E) bezeichnen.

Die Differentialgleichung (E) hat die besondere Eigenschaft, dass ihre Ordnung mit dem Grade des Coefficienten der höchsten Ableitung übereinstimmt.

Die Form der Gleichungen (20) bis (27) lässt erkennen, dass der Fall eine besondere Beachtung verdient, wo auch in der Differentialgleichung (A) die Ordnungszahl n dieselbe ist, wie die Gradzahl m des Coefficienten der höchsten Ableitung, denn alsdann ist die Reciprocität zwischen den Differentialgleichungen (A) und (E) eine vollkommene. Es ist nämlich für

$$m = n$$

der Coefficient $P_\varkappa(x)$ der $\varkappa^{\text{ten}}$ Ableitung von y in $D_x(y)$ vom $\varkappa^{\text{ten}}$ Grade, und wir können demnach die Beziehung zwischen den Differentialgleichungen (A) und (E) in elegantester Weise dadurch zum Ausdrucke bringen, dass wir sagen: Wenn

$$\left.\begin{aligned}\overline{P}_\varkappa(x) &= (-1)^\varkappa \frac{(\xi-1)\quad(\xi-\varkappa)}{\varkappa!}\,P_\varkappa(x),\\ \overline{Q}_\nu(x) &= (-1)^\nu \frac{(\xi-1)\quad(\xi-\nu)}{\nu!}\,Q_\nu(x)\end{aligned}\right\}\qquad (\varkappa,\nu=0,1,\quad m)$$

gesetzt wird, so ist

$$\overline{Q}_\nu(x) = \sum_{\varkappa=0}^{m} (-1)^\varkappa \varkappa_\nu\, \overline{P}_\varkappa^{(\varkappa-\nu)}(x),$$

$$\overline{P}_\varkappa(x) = \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu \nu_\varkappa\, \overline{Q}_\nu^{(\nu-\varkappa)}(x),$$

d. h. die beiden Differentialgleichungen

$$\sum_{\varkappa=0}^{m} \overline{P}_\varkappa(x)\,\frac{d^\varkappa y}{dx^\varkappa} = 0,$$

$$\sum_{\nu=0}^{m} \overline{Q}_\nu(x)\,\frac{d^\nu u}{dx^\nu} = 0$$

sind einander adjungirt.

Der durch die Gleichung (C′) dargestellte Vertauschungssatz nimmt die einfache Form an

(C″) $$D_x((z-x)^{\xi-1}) = E_z((z-x)^{\xi-1}).$$

Falls in der gegebenen Differentialgleichung (A) m grösser wie n sein sollte, so können wir z. B. dadurch, dass wir y gleich der $(m-n)^{\text{ten}}$ Ableitung einer neuen unabhängigen Variabeln setzen, eine Differentialgleichung herstellen, deren Ordnungszahl gleich m ist und die nebst einer ganzen rationalen Function $(m-n)^{\text{ten}}$ Grades von x mit willkürlichen Coefficienten noch n Lösungen besitzt, deren $(m-n)^{\text{te}}$ Ableitungen ein Fundamentalsystem der gegebenen Differentialgleichung bilden. Wir wollen darum im Folgenden voraussetzen, dass für die Differentialgleichung (A)

$$m = n$$

sei und dann nachher besonders auf den Fall eingehen, wo in der gegebenen Differentialgleichung (A) die Coefficienten gewisser erster Ableitungen verschwinden.

235. Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe, deren Ordnung mit dem Grade des Coefficienten der höchsten Ableitung übereinstimmt.

Wir gehen also von einer Differentialgleichung (A) aus, deren Ordnung mit dem Grade m des Coefficienten der höchsten Ableitung

übereinstimmt und setzen jetzt überdies voraus, dass (A) zur Fuchsschen Classe gehört.

Sei dann der Coefficient $P_m(x)$ der höchsten Ableitung in seine linearen Factoren zerlegt:

$$(1) \qquad P_m(x) = (x - a_1)^{\alpha_1}(x - a_2)^{\alpha_2} \cdots (x - a_\sigma)^{\alpha_\sigma},$$

$$\sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i = m,$$

so muss, damit der singuläre Punkt $x = a_i$ eine Stelle der Bestimmtheit für die Lösungen von (A) sei, der Factor $x - a_i$ in $P_{m-1}(x)$ mindestens zur $(\alpha_i - 1)^{\text{ten}}$, in $P_{m-2}(x)$ mindestens zur $(\alpha_i - 2)^{\text{ten}}$ u s w., in $P_{m-\alpha_i+1}(x)$ mindestens zur ersten Potenz enthalten sein Bezeichnen wir durch

$$\varrho_{i1}, \ \varrho_{i2}, \cdots \varrho_{im}$$

die Wurzeln der zu $x = a_i$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, so sind (vergl. für diese Verhältnisse Nr 112, Bd. I, S. 405) $m - \alpha_i$ derselben mit den Zahlen

$$0, 1, 2, \cdot m - \alpha_i - 1$$

identisch, und die zu diesen Wurzeln als Exponenten gehörigen Elemente des canonischen Fundamentalsystems verhalten sich in der Umgebung von $x = a_i$ regulär, wenn keine der α_i übrigen Wurzeln eine positive ganze Zahl und grösser als $m - \alpha_i - 1$ ist. Um Complicationen aus dem Wege zu gehen, die das Wesen der hier anzustellenden Untersuchung nicht berühren, wollen wir überhaupt annehmen, dass für alle singulären Punkte a_i die Grössen

$$\varrho_{i1}, \ \varrho_{i2}, \ \cdot \varrho_{i\alpha_i}$$

weder ganzzahlig noch auch um ganze Zahlen von einander verschieden seien. Dann enthalten die Entwickelungen der Elemente

$$y_{i1}, \ y_{i2}, \cdot\cdot \ y_{im}$$

des zu $x = a_i$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems in der Umgebung von $x = a_i$ keinen Logarithmus und haben also die Form

$$(2) \qquad y_{i\alpha} = (x - a_i)^{\varrho_{i\alpha}} \mathfrak{P}_{i\alpha}(x \,|\, a_i), \quad \mathfrak{P}_{i\alpha}(a_i \,|\, a_i) \neq 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ m),$$

wo die $\mathfrak{P}_{i\alpha}(x \,|\, a_i)$ nach positiven ganzen Potenzen von $x - a_i$ fortschreitende Reihen bedeuten. Die Bezeichnung ist dabei so gewählt worden, dass

$$(3) \qquad \varrho_{i,\alpha_i+1} = 0, \ \ \varrho_{i,\alpha_i+2} = 1, \ \cdot \varrho_{im} = m - \alpha_i - 1$$

ist.

Multipliciren wir die linke Seite von (A) mit dem Factor

(4) $$\chi(x) = \prod_{\iota=1}^{\sigma} (x - a_\iota)^{m-\alpha_\iota},$$

so lauten die Wurzeln der zu $x = a_\iota$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung für die adjungirte Differentialgleichung von

(5) $$\chi(x) D_x(y) = 0,$$

nach den Ergebnissen der Nr 109 (Bd. I, S. 391),

$$-\varrho_{\iota\alpha} - 1 \qquad (\alpha = 1, 2, \quad m)$$

Die adjungirte Differentialgleichung von (5) lautet aber nach dem Reciprocitätssatze (Nr. 21, Bd. I, S. 59)

(6) $$D_x'(\chi(x)\mathfrak{w}) = 0,$$

die zu $x = a_\iota$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung der zu (A) adjungirten Differentialgleichung (A′) hat also die Wurzeln

(7) $$\sigma_{i\alpha} = m - \alpha_\iota - \varrho_{\iota\alpha} - 1 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdot\ m),$$

und die zugehörigen Elemente des canonischen Fundamentalsystems haben die Form

(8) $$w_{\iota\alpha} = (x - a_\iota)^{\sigma_{\iota\alpha}} \overline{\mathfrak{P}}_{i\alpha}(x \mid a_\iota), \quad \overline{\mathfrak{P}}_{\iota\alpha}(a_i \mid a_i) \neq 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdot m),$$

wo die $\overline{\mathfrak{P}}_{\iota\alpha}(x \mid a_i)$ nach $x - a_i$ fortschreitende gewöhnliche Potenzreihen bedeuten. Insbesondere sind die

$$w_{\iota, \alpha_\iota + \varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \quad m - \alpha_\iota)$$

in der Umgebung von $x = a_i$ regulär und gehören zu den Exponenten

$$\sigma_{i, \alpha_i + \varkappa} = m - \alpha_i - \varkappa.$$

Es sei nun w das allgemeine Integral der Differentialgleichung (A′) Wir betrachten, wie in der vorhergehenden Nummer, die über die von $x = \zeta$ ausgehenden Schleifen

$$s_0, \ s_1, \ s_2, \cdot\cdot \ s_\sigma$$

erstreckten Integrale

$$\int_{(s_i)} w(z - x)^{\xi - 1} dx \qquad (\iota = 0, 1, 2, \quad \sigma)$$

Bedeute b_i einen Punkt in der Umgebung von a_i, d h. einen Punkt, für welchen die Entwickelungen der Integrale unserer Differentialgleichungen nach Potenzen von $x - a_\iota$ convergiren, und bezeichnen wir mit $\tilde{s}_\iota$ die von b_ι aus um a_ι herumgelegte Schleife, dann ist

$$\int\limits_{(s_i)} w(z-x)^{\xi-1}dx = \int\limits_{\xi}^{b_i}(w-\Theta_i w)(z-x)^{\xi-1}dx + \int\limits_{(\bar{s}_i)} w(z-x)^{\xi-1}dx,$$

wo wir durch $\Theta_i w$ dasjenige Integral von (A') bezeichnet haben, in welches sich w verwandelt, wenn x einen einfachen Umlauf im positiven Sinne um a_ι vollzogen (d. h. den Schnitt l_i einmal in positiver Richtung überschritten) hat, und wo das Integral von ξ nach b_ι in der durch die Linien $l_1, l_2, \cdot\cdot l_\sigma$ zerschnittenen x-Ebene, d. h. auf directem Wege, zu nehmen ist.

Sei das Integral w durch die Elemente des zu $x = a_i$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems dargestellt

(9) $$w = \sum_{\alpha=1}^{m} c_\alpha^{(i)} w_{i\alpha},$$

dann ist in der Umgebung von a_i

(10) $$w = \sum_{\alpha=1}^{\alpha_\iota} c_\alpha^{(\iota)} w_{\iota\alpha} + \mathfrak{P}(x\,|\,a_\iota),$$

wo $\mathfrak{P}(x\,|\,a_\iota)$ eine gewöhnliche nach $x - a_\iota$ fortschreitende Potenzreihe bedeutet. Also haben wir

$$\int\limits_{(\bar{s}_i)} w(z-x)^{\xi-1}dx = \sum_{\alpha=1}^{\alpha_i} c_\alpha^{(i)} \int\limits_{(\bar{s}_\iota)} w_{i\alpha}(z-x)^{\xi-1}dx$$

und ferner

(11) $$w - \Theta_\iota w = \sum_{\alpha=1}^{\alpha_i} c_\alpha^{(\iota)}(w_{\iota\alpha} - \Theta_\iota w_{i\alpha}).$$

Setzen wir also

$$A_{\iota\alpha} = \int\limits_{(s_i)} w_{i\alpha}(z-x)^{\xi-1}dx,$$

so ist

(12) $$\int\limits_{(s_\iota)} w(z-x)^{\xi-1}dx = \sum_{\alpha=1}^{\alpha_\iota} c_\alpha^{(i)} A_{\iota\alpha}.$$

Wir können uns folglich, was die über die Schleifen

$$s_1,\ s_2,\ \cdot\cdot\ s_\sigma$$

erstreckten Integrale anlangt, auf die Betrachtung der Ausdrücke

$$A_{i\alpha} \qquad (\iota = 1, 2, \quad \sigma,\ \alpha = 1, 2, \quad \alpha_i),$$

deren Anzahl gleich m ist, beschränken. Beachten wir, dass

$$\Theta_\iota w_{\iota\alpha} = \varepsilon_{\iota\alpha} w_{\iota\alpha}$$

ist, wenn

$$\varepsilon_{\iota\alpha} = e^{2\pi\sigma_{\iota\alpha}\sqrt{-1}}$$

gesetzt wird, so kann $A_{\iota\alpha}$ in der Form

$$(13)\qquad A_{\iota\alpha} = (1 - \varepsilon_{\iota\alpha}) \int_{\xi}^{b_\iota} w_{\iota\alpha}(z-x)^{\xi-1}dx + \int_{(s_\iota)} w_{\iota\alpha}(z-x)^{\xi-1}dx$$

geschrieben werden.

Um die über die Schleife s_0 erstreckten Integrale darzustellen, nehmen wir irgend ein Fundamentalsystem $w_1, w_2, \cdots w_m$ der Differentialgleichung (A′) und setzen

$$Z_\beta = \int_{(s_0)} w_\beta(z-x)^{\xi-1}dx \qquad (\beta = 1, 2, \cdots m),$$

dann sind auch die m Integrale

$$Z_{\iota\alpha} = \int_{(s_0)} w_{\iota\alpha}(z-x)^{\xi-1}dx \qquad \begin{pmatrix} \iota = 1, 2, & \sigma, \\ \alpha = 1, 2, & \alpha_\iota \end{pmatrix}$$

durch $Z_1, Z_2, \cdot Z_m$ linear, homogen und mit constanten Coefficienten darstellbar.

Zweites Kapitel.

236. Die Fuchs'sche Methode der veränderlichen Integrationswege. Aenderung der Integrationsschleifen bei geschlossenen Umläufen des Parameters.

Wir fragen nunmehr nach den Aenderungen, welche die als Functionen von z aufgefassten Schleifenintegrale

$$A_{\iota\alpha}, \quad Z_\beta$$

erleiden, wenn die unabhängige Variable geschlossene Wege in ihrer Ebene beschreibt. Singuläre Stellen dieser Integrale können ausser den Punkten

$$z = a_1, \; a_2, \cdots a_\sigma$$

nur noch die Punkte $z = \zeta$ und $z = \infty$ sein; wir haben also nur das Verhalten der in Rede stehenden Integrale bei einfachen geschlossenen Umläufen von z um die Punkte

$$a_1, \; a_2, \cdots a_\sigma, \; \zeta$$

zu untersuchen.

Bei dieser Untersuchung kann man sich mit Vortheil einer von Herrn Fuchs begründeten Methode bedienen, die wir als die Methode der veränderlichen Integrationswege bezeichnen wollen und die auf der folgenden Erwägung beruht. Denkt man sich in der Ebene der Integrationsvariabeln x die Punkte

$$a_1, \; a_2, \cdots a_\sigma, \; z, \; \zeta$$

nebst den von ζ ausgehenden Integrationsschleifen

$$s_1, \; s_2, \cdots s_\sigma, \; s_0$$

fixirt, so müssen diese Schleifen so beschaffen sein, dass sie durch keinen der singulären Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\sigma, z$ des Integranden hindurchgehen. Wenn nun z sich verändert, so werden sich demzufolge auch die Integrationsschleifen verändern müssen, so wie z auf seinem Wege eine derselben trifft. Stellt man sich etwa die Integrations-

schleifen als biegsame und ausdehnbare Fäden vor, die im Punkte ξ befestigt und um die singulären Stellen $a_1, a_2, \cdots a_\sigma, z$ herumgeschlungen sind, so wird z, wenn es eine Bahn beschreibt, diese Fäden immer vor sich her treiben. Ist die Bahn von z insbesondere eine geschlossene, so währt die Veränderung jener Schleifen so lange, bis z ungehindert in seine Ausgangslage zurückkehren kann. Es darf natürlich keine der Schleifen während ihrer Aenderung einen der Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ passiren, dagegen bildet der Punkt z während seiner Bewegung nur in seiner augenblicklichen Lage ein für die Schleifen nicht passirbares Hinderniss, so dass also die Schleifen z. B. über die Ausgangslage von z hinweg ungehindert gehen können, ehe der Punkt diese Lage wieder erreicht hat.

Will man also die Aenderung untersuchen, die ein Integral

$$\int\limits_{(s_i)} w(z-x)^{\xi-1} dx$$

erfährt, wenn z eine bestimmte Bahn beschreibt, so hat man zu beachten, dass dieses Integral in zwiefacher Weise von z abhängt. Einmal dadurch, dass der Integrand eine Function von z ist, das andere Mal dadurch, dass die Curve, über welche das Integral zu erstrecken ist, sich ebenfalls mit z ändert. Nach den Principien der Integralrechnung werden wir also das veränderte Integral erhalten, wenn wir den veränderten Integranden längs des veränderten Integrationsweges integriren.

Wenn z einen geschlossenen Umlauf vollzieht, so kann eine Aenderung des Integranden nur dann eintreten, wenn sich gewisse Theile des Integrationsweges innerhalb jenes Umlaufes befinden; dann multiplicirt sich nämlich in den diesen Theilen des Integrationsweges entsprechenden Elementen des Integrales der Factor

$$(z-x)^{\xi-1}$$

des Integranden mit der Einheitswurzel

$$\varepsilon = e^{2\pi\xi\sqrt{-1}}$$

Wir untersuchen zunächst die Aenderung der Integrationsschleifen bei geschlossenen Umläufen von z

In der x-Ebene haben wir die Stellen $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ und die von denselben nach dem Unendlichen hin gelegten Querschnitte $l_1, l_2, \cdots l_\sigma$, ferner den Punkt z, von dem aus der Querschnitt l_0 und den Punkt ξ, von dem aus der Querschnitt $\overline{l}$ nach dem Unendlichen hin gelegt sein möge. Denken wir uns überdies noch die Integrationsschleifen $s_0, s_1, s_2, \cdots s_\sigma$, so zerfällt die x-Ebene in σ Parzellen, die wir der

Reihe nach durch die Zahlen 1, 2, $\cdots$ σ bezeichnen wollen, so dass die i^{te} Parzelle von den Querschnitten l_{i+1}, l_i und den Integrationsschleifen s_i, s_{i+1} begrenzt wird. Die Lage von ζ denken wir uns so, dass bei einer Umkreisung von ζ in positivem Sinne zuerst die Schleife s_σ, dann $s_{\sigma-1}$, $\cdots s_2$, s_1 und endlich der Querschnitt $\bar{l}$ getroffen werden (vergl. Fig. 11). Wir wollen ferner annehmen, dass sich der Punkt z

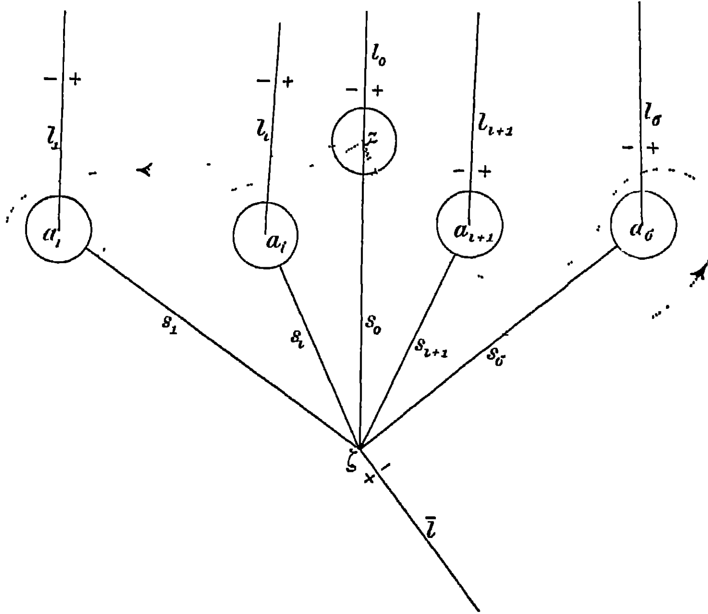


Fig 11

innerhalb der Parzelle i befinde, und lassen jetzt z einen einfachen Umlauf in positivem Sinne um einen der singulären Punkte a_1, a_2, $\cdots$ a_σ vollziehen.

Dabei unterscheiden wir nun zunächst zwei Fälle, jenachdem nämlich der Umlauf um einen Punkt a_h erfolgt, für welchen

$$h = 1, 2, \cdots i$$

ist, oder um einen Punkt $a_\varkappa$, wo

$$\varkappa = i + 1, \ i + 2, \cdots \sigma.$$

Von den Punkten a_h sagen wir, sie befänden sich in Bezug auf z und ζ in der Lage I; das Dreieck (ζ, z, a_h) wird in der durch die angegebene Reihenfolge der Ecken bestimmten Richtung so durchlaufen, dass die von demselben eingeschlossene Fläche zur Linken bleibt. Entsprechend bezeichnen wir die Lage der Punkte $a_\varkappa$ zu z und ζ als die Lage II.

Wir könnten nun die Umläufe von z um die Punkte a_h und $a_\varkappa$

so einrichten, dass die Schleifen s_ν, für welche ν weder 0 noch h beziehungsweise $\varkappa$ ist, ganz unberührt bleiben (vergl. den punktirten Umlauf von z um a_1 in der Fig. 11), es ist aber zweckmässiger, solche Umläufe von z zu betrachten, die nur einen der Querschnitte $l_1, l_2, \cdot\cdot l_\sigma, \bar{l}$ einmal in positivem Sinne überschreiten (vergl. den punktirten Umlauf um a_σ in der Fig 11).

Nehmen wir also zunächst einen Umlauf von z, der den Querschnitt l_h einmal in positivem Sinne durchkreuzt, so reisst der Punkt z auf seinem Wege die Schleifen

$$s_h, s_{h+1}, \cdots s_\iota, s_0$$

mit sich, so dass dieselben in die Endlagen

$$s_h^{(h)}, s_{h+1}^{(h)}, \cdots s_\iota^{(h)}, s_0^{(h)}$$

übergehen. Die Anzahlen, wie oft diese Endlagen die Querschnitte $l_0, l_1, \cdot\cdot\ l_\sigma$ überschreiten, und die Richtungen, in welchen diese Ueberschreitungen erfolgen, bestimmen die Aufeinanderfolge von einfachen

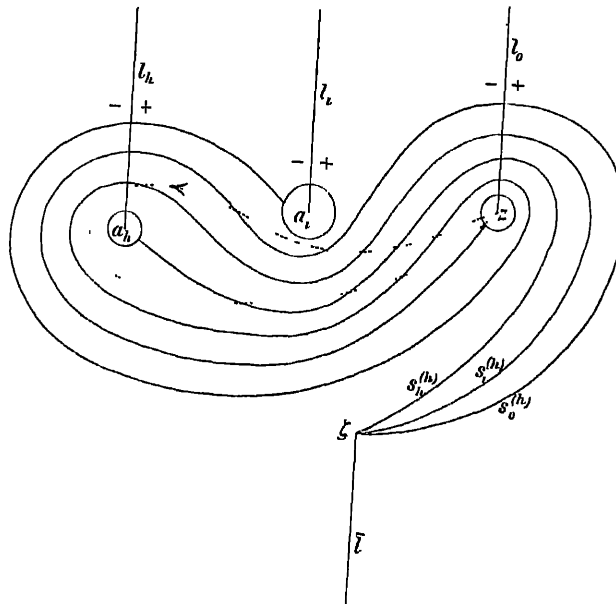


Fig 12

Schleifen, durch welche jene Endlagen ersetzt werden können. In der Fig. 12 sind die Endlagen $s_h^{(h)}$, $s_\iota^{(h)}$, $s_0^{(h)}$ der Schleifen s_h, s_ι, s_0 verzeichnet, die dem punktirten Umlaufe von z um a_h entsprechen; wir sehen, dass die folgenden Gleichungen bestehen:

$$
\text{(I)} \quad \begin{cases} s_0^{(h)} = s_0 s_h s_0 s_h^{-1} s_0^{-1}, \\ s_\nu^{(h)} = s_0 s_h s_0^{-1} s_h^{-1} s_\nu s_h s_0 s_h^{-1} s_0^{-1} \qquad (\nu = \iota, \iota - 1, \quad h+1), \\ s_h^{(h)} = s_0 s_h s_0^{-1}. \end{cases}
$$

Die übrigen Schleifen $s_1, \cdot \cdot s_{h-1}, s_{\iota+1}, \cdots s_\sigma$ bleiben ungeändert

Beschreibt dagegen z einen Umlauf, der den Querschnitt $l_\varkappa$ einmal in positivem Sinne durchkreuzt, so verwandeln sich (vergl. Fig. 13) die Schleifen $s_0, s_\nu, s_\varkappa$ beziehungsweise in

$$
\text{(II)} \quad \begin{cases} s_0^{(\varkappa)} = s_\varkappa s_0 s_\varkappa^{-1}, \\ s_\nu^{(\varkappa)} = s_\varkappa s_0 s_\varkappa^{-1} s_0^{-1} s_\nu s_0 s_\varkappa s_0^{-1} s_\varkappa^{-1} \qquad (\nu = \iota+1, \iota+2, \quad \varkappa-1), \\ s_\varkappa^{(\varkappa)} = s_\varkappa s_0 s_\varkappa s_0^{-1} s_\varkappa^{-1}, \end{cases}
$$

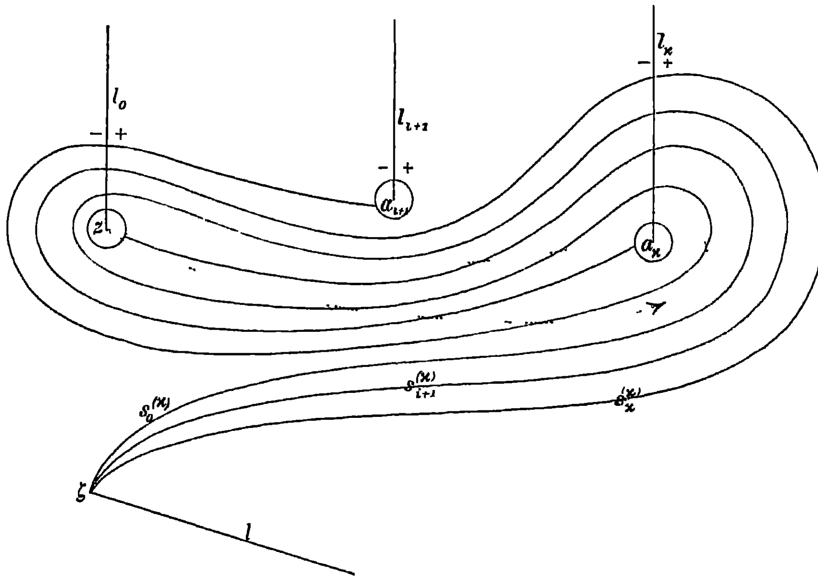


Fig 13

während die übrigen ungeändert bleiben. Bemerken wir gleich, dass wir uns den geschlossenen Weg, den z vollzieht, so gelegt denken können, dass sich nur unendlich kleine Theile der Schleifen innerhalb desselben befinden; wir werden demgemäss bei der Untersuchung der Aenderung, welche die Schleifenintegrale erleiden, wenn z Umläufe um die Punkte $a_1, a_2, \cdot \cdot a_\sigma$ vollzieht, von den Aenderungen des Integranden absehen können.

237. Aenderung der Schleifenintegrale bei geschlossenen Umläufen der im Integranden als Parameter auftretenden Variabeln. Bestimmung der Coefficienten der Substitutionen, welche die Lösungen der linearen Differentialgleichung erfahren.

Bezeichnen wir durch ein vorgesetztes Θ_i dasjenige, was aus einer Function wird, wenn die unabhängige Variable einen geschlossenen Weg beschreibt, der den Querschnitt l_i einmal in positivem Sinne überschreitet, so gelten nach den Ergebnissen der vorigen Nummer die folgenden Formeln.

Für $h \leqq i$ ist

$$\Theta_h Z_\beta = \int_{(s_0)} w_\beta (z-x)^{\xi-1} dx + \varepsilon \int_{(s_h)} w_\beta (z-x)^{\xi-1} dx + \varepsilon \int_{(s_0)} \Theta_h w_\beta (z-x)^{\xi-1} dx$$
$$+ \varepsilon^2 \int_{(s_h^{-1})} \Theta_h w_\beta (z-x)^{\xi-1} dx + \varepsilon^2 \int_{(s_0^{-1})} w_\beta (z-x)^{\xi-1} dx,$$

also mit Rücksicht auf die Gleichungen (17a) der Nr. 233 (S. 417)

$$\Theta_h Z_\beta = Z_\beta + (\varepsilon - \varepsilon^2) \int_{(s_h)} w_\beta (z-x)^{\xi-1} dx - \varepsilon \int_{(s_0)} (w_\beta - \Theta_h w_\beta)(z-x)^{\xi-1} dx.$$

Denken wir uns also das Integral w_β auf einem in der zerschnittenen x-Ebene verlaufenden Wege nach der Umgebung von a_h fortgesetzt und durch die Elemente $w_{h1}, w_{h2}, \cdot \cdot w_{hm}$ des zu a_h gehörigen canonischen Fundamentalsystems dargestellt,

$$w_\beta = \sum_{\lambda=1}^{m} c_{\beta\lambda}^{(h)} w_{h\lambda} \qquad (\beta = 1, 2, \ldots m),$$

so ist (vergl. die Gleichungen (11) und (12) Nr. 235, S. 425)

$$w_\beta - \Theta_h w_\beta = \sum_{\lambda=1}^{\alpha_h} c_{\beta\lambda}^{(h)} (1 - \varepsilon_{h\lambda}) w_{h\lambda},$$
$$\int_{(s_h)} w_\beta (z-x)^{\xi-1} dx = \sum_{\lambda=1}^{\alpha_h} c_{\beta\lambda}^{(h)} A_{h\lambda},$$

und wir haben folglich

$$\Theta_h Z_\beta = Z_\beta + \varepsilon \sum_{\lambda=1}^{\alpha_h} c_{\beta\lambda}^{(h)} [(1-\varepsilon) A_{h\lambda} - (1 - \varepsilon_{h\lambda}) Z_{h\lambda}].$$

Gemäss der Gleichung (18) Nr. 233 (S. 418) ist aber

(14) $$u_{h\lambda} = \int\limits_{(s_h s_0 s_h^{-1} s_0^{-1})} w_{h\lambda}(z-x)^{\xi-1}dx = (1-\varepsilon)A_{h\lambda} - (1-\varepsilon_{h\lambda})Z_{h\lambda},$$

es ergiebt sich also endlich

(15) $$\Theta_h Z_\beta = Z_\beta + \varepsilon \sum_{\lambda=1}^{\alpha_h} c_{\beta\lambda}^{(h)} u_{h\lambda}.$$

Ferner haben wir

(16) $$\Theta_h A_{\mu\alpha} = A_{\mu\alpha} \qquad (\mu = 1, 2, \quad h-1, i+1, \quad \sigma;\ \alpha = 1, 2, \quad \alpha_\mu),$$

$$\Theta_h A_{h\alpha} = \int\limits_{(s_0)} w_{h\alpha}(z-x)^{\xi-1}dx + \varepsilon \int\limits_{(s_h)} w_{h\alpha}(z-x)^{\xi-1}dx + \varepsilon\varepsilon_{h\alpha} \int\limits_{(s_0^{-1})} w_{h\alpha}(z-x)^{\xi-1}dx,$$

also nach einfacher Reduction

(17) $$\Theta_h A_{h\alpha} = \varepsilon A_{h\alpha} + (1-\varepsilon_{h\alpha}) Z_{h\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \quad \alpha_h)$$

Dagegen ist für $h < i$, wenn ν eine der Zahlen $h+1, h+2, \cdots i$ bedeutet,

$$\Theta_h A_{\nu\alpha} = \int\limits_{(s_0)} w_{\nu\alpha}(z-x)^{\xi-1}dx + \varepsilon \int\limits_{(s_h)} w_{\nu\alpha}(z-x)^{\xi-1}dx + \varepsilon \int\limits_{(s_0^{-1})} \Theta_h w_{\nu\alpha}(z-x)^{\xi-1}dx$$
$$+ \int\limits_{(s_h^{-1})} \Theta_h w_{\nu\alpha}(z-x)^{\xi-1}dx + \int\limits_{(s_\nu)} w_{\nu\alpha}(z-x)^{\xi-1}dx + \varepsilon_{\nu\alpha} \int\limits_{(s_h)} w_{\nu\alpha}(z-x)^{\xi-1}dx$$
$$+ \varepsilon_{\nu\alpha} \int\limits_{(s_0)} \Theta_h w_{\nu\alpha}(z-x)^{\xi-1}dx + \varepsilon_{\nu\alpha}\varepsilon \int\limits_{(s_h^{-1})} \Theta_h w_{\nu\alpha}(z-x)^{\xi-1}dx$$
$$+ \varepsilon_{\nu\alpha}\varepsilon \int\limits_{(s_0^{-1})} w_{\nu\alpha}(z-x)^{\xi-1}dx.$$

Bezeichnen wir also mit $c_{\alpha\lambda}^{(\nu h)}$ die Coefficienten der Uebergangssubstitution, die zu einem zwischen den Punkten a_ν und a_h innerhalb der zerschnittenen x-Ebene verlaufenden Wege gehört (vergl. Nr 122, Bd. I, S. 443), d. h setzen wir

(18) $$w_{\nu\alpha} = \sum_{\lambda=1}^{m} c_{\alpha\lambda}^{(\nu h)} w_{h\lambda} \qquad (\alpha = 1, 2, \quad m),$$

so folgt ähnlich wie oben für Z_β

(19) $$\Theta_h A_{\nu\alpha} = A_{\nu\alpha} - (1-\varepsilon_{\nu\alpha}) \sum_{\lambda=1}^{\alpha_h} c_{\alpha\lambda}^{(\nu h)} u_{h\lambda} \qquad (\nu = h+1, h+2, \quad i)$$

Wenn wir mit Hülfe der m Schleifenintegrale $A_{\mu\alpha}$ und der entsprechenden $Z_{\mu\alpha}$ die m Ausdrücke

$$(20) \qquad u_{\mu\alpha} = (1-\varepsilon)A_{\mu\alpha} - (1-\varepsilon_{\mu\alpha})Z_{\mu\alpha} \qquad \begin{pmatrix}\mu = 1, 2, \quad \sigma, \\ \alpha = 1, 2, \quad \alpha_\mu\end{pmatrix}$$

bilden, so sind diese nichts anderes als die Doppelschleifenintegrale

$$(20\text{a}) \qquad u_{\mu\alpha} = \int\limits_{(s_\mu s_0 s_\mu^{-1} s_0^{-1})} w_{\mu\alpha}(z-x)^{\xi-1}dx,$$

und stellen folglich nach den Ergebnissen der Nr. 234 (S. 421 ff.) Lösungen der Differentialgleichung (E) dar. Wir wollen gleich die Aenderungen zusammenstellen, welche diese Lösungen erfahren, wenn z geschlossene Wege beschreibt, die den Querschnitt l_h einmal in positivem Sinne überschreiten.

Zufolge der Gleichungen (15) ist

$$(21) \qquad \Theta_h Z_{\mu\alpha} = Z_{\mu\alpha} + \varepsilon \sum_{\lambda=1}^{\alpha_h} c_{\alpha\lambda}^{(\mu h)} u_{h\lambda} \qquad (\mu = 1, 2, \quad \sigma, \ \alpha = 1, 2, \quad \alpha_\mu),$$

wenn wir mit

$$(22) \qquad w_{\mu\alpha} = \sum_{\lambda=1}^{m} c_{\alpha\lambda}^{(\mu h)} w_{h\lambda} \qquad (\alpha = 1, 2, \quad m)$$

die Uebergangssubstitution der Differentialgleichung (A′) bezeichnen, die zu einem die Punkte a_μ, a_h verbindenden, die Querschnitte nicht überschreitenden Wege gehört. Es ist demnach mit Rücksicht auf die Gleichungen (16), (17) und (19)

$$(\alpha) \quad \begin{cases} \Theta_h u_{h\alpha} = \varepsilon\,\varepsilon_{h\alpha} u_{h\alpha} & (\alpha = 1, 2, \quad \alpha_h), \\ \Theta_h u_{\nu\alpha} = u_{\nu\alpha} - (1-\varepsilon_{\nu\alpha}) \sum_{\lambda=1}^{\alpha_h} c_{\alpha\lambda}^{(\nu h)} u_{h\lambda} & \begin{pmatrix} h < i, \ \nu = h+1, \quad i, \\ \alpha = 1, 2, \quad \alpha_\nu \end{pmatrix}, \\ \Theta_h u_{\mu\alpha} = u_{\mu\alpha} - \varepsilon(1-\varepsilon_{\mu\alpha}) \sum_{\lambda=1}^{\alpha_h} c_{\alpha\lambda}^{(\mu h)} u_{h\lambda} & \begin{pmatrix} \mu = i+1, \quad \sigma, 1, 2, \cdot \ h-1, \\ \alpha = 1, 2, \quad \alpha_\mu \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Wir wenden uns zur Aufstellung der analogen Formeln für einen geschlossenen Umlauf von z, der einen der Querschnitte $l_\varkappa$ für $\varkappa > i$ einmal in positivem Sinne überschreitet. Aus den Gleichungen (II) (S 431) ergeben sich in diesem Falle durch ganz ähnliche Rechnungen wie die, welche wir vorhin durchzuführen hatten, die folgenden Gleichungen. Zunächst ist

$$(23) \qquad \Theta_\varkappa Z_\beta = Z_\beta + \sum_{\lambda=1}^{\alpha_\varkappa} c_{\beta\lambda}^{(\varkappa)} u_{\varkappa\lambda} \qquad (\beta = 1, 2, \quad m),$$

wenn wir setzen

$$w_\beta = \sum_{\lambda=1}^{m} c_{\beta\lambda}^{(\varkappa)} w_{\varkappa\lambda},$$

und insbesondere

$$(24) \qquad \Theta_\varkappa Z_{\mu\alpha} = Z_{\mu\alpha} + \sum_{\lambda=1}^{\alpha_\varkappa} c_{\alpha\lambda}^{(\mu\varkappa)} u_{\varkappa\lambda} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots \sigma, \ \alpha = 1, 2, \ldots \alpha_\mu),$$

wenn wiederum

$$(25) \qquad w_{\mu\alpha} = \sum_{\lambda=1}^{m} c_{\alpha\lambda}^{(\mu\varkappa)} w_{\varkappa\lambda} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots m)$$

die zwischen den Punkten a_μ, $a_\varkappa$ vermittelnde Uebergangssubstitution der Differentialgleichung (A′) bedeutet. Dabei möge gleich bemerkt werden, dass die beiden Substitutionen

$$\left(c_{\alpha\lambda}^{(h\varkappa)}\right) \text{ und } \left(c_{\alpha\lambda}^{(\varkappa h)}\right) \qquad (\alpha, \lambda = 1, 2, \ldots m)$$

zu einander invers sind.

Ferner haben wir

$$(26) \begin{cases} \Theta_\varkappa A_{\varkappa\alpha} = (1 - \varepsilon_{\varkappa\alpha} + \varepsilon\varepsilon_{\varkappa\alpha}) A_{\varkappa\alpha} + (\varepsilon_{\varkappa\alpha} - \varepsilon_{\varkappa\alpha}^2) Z_{\varkappa\alpha} & (\alpha = 1, 2, \ldots \alpha_\varkappa), \\ \Theta_\varkappa A_{\nu\alpha} = A_{\nu\alpha} + (1 - \varepsilon_{\nu\alpha}) \sum_{\lambda=1}^{\alpha_\varkappa} c_{\alpha\lambda}^{(\nu\varkappa)} u_{\varkappa\lambda} & \left(\begin{smallmatrix} \varkappa > \iota + 1, \ \nu = \iota + 1, \iota + 2, \ldots \varkappa - 1, \\ \alpha = 1, 2, \ldots \alpha_\nu \end{smallmatrix}\right), \\ \Theta_\varkappa A_{\mu\alpha} = A_{\mu\alpha} & \left(\begin{smallmatrix} \mu = \varkappa + 1, \ldots \sigma, 1, 2, \ldots \iota, \\ \alpha = 1, 2, \ldots \alpha_\mu \end{smallmatrix}\right), \end{cases}$$

und für die m Lösungen $u_{\mu\alpha}$ von (E) ergiebt sich endlich

$$(\beta) \begin{cases} \Theta_\varkappa u_{\varkappa\alpha} = \varepsilon\varepsilon_{\varkappa\alpha} u_{\varkappa\alpha} & (\alpha = 1, 2, \ldots \alpha_\varkappa), \\ \Theta_\varkappa u_{\mu\alpha} = u_{\mu\alpha} - (1 - \varepsilon_{\mu\alpha}) \sum_{\lambda=1}^{\alpha_\varkappa} c_{\alpha\lambda}^{(\mu\varkappa)} u_{\varkappa\lambda} & \left(\begin{smallmatrix} \mu = \varkappa + 1, \ldots \sigma, 1, 2, \ldots \iota, \\ \alpha = 1, 2, \ldots \alpha_\mu \end{smallmatrix}\right), \\ \Theta_\varkappa u_{\nu\alpha} = u_{\nu\alpha} - \varepsilon(1 - \varepsilon_{\nu\alpha}) \sum_{\lambda=1}^{\alpha_\varkappa} c_{\alpha\lambda}^{(\nu\varkappa)} u_{\varkappa\lambda} & \left(\begin{smallmatrix} \varkappa > \iota + 1, \ \nu = \iota + 1, \ldots \varkappa - 1, \\ \alpha = 1, 2, \ldots \alpha_\nu \end{smallmatrix}\right). \end{cases}$$

Es erübrigt nun noch, die Aenderungen der Schleifenintegrale anzugeben, die einem Umlaufe von z um den Punkt ζ entsprechen, d. h einem Umlaufe (dem punktirten in der Fig. 14, S. 436), der den Querschnitt $\bar{l}$ einmal in positiver Richtung durchkreuzt. In der Fig. 14 sind die Endlagen der Schleifen s_h, $s_\varkappa$ und s_0 nach einem solchen Umlaufe verzeichnet; man erkennt, dass s_h übergeht in

$$\bar{s}_h = s_0^{-1} s_h s_0 \qquad (h = 1, 2, \cdot \sigma),$$

dass dagegen s_0 in seine Ausgangslage zurückkehrt. Ueberdies ist aber noch zu beachten, dass der Integrand der Schleifenintegrale den Factor ε bekommt, weil der Ausgangspunkt ζ der Schleifen innerhalb des

von z beschriebenen Umlaufes liegt. Bezeichnen wir also durch ein vorgesetztes $\overline{\Theta}$ die Aenderung, die unsere Schleifenintegrale erfahren haben, so ist

$$\overline{\Theta} A_{h\alpha}$$
$$= \varepsilon \Big\{ \int\limits_{(s_0^{-1})} w_{h\alpha}(z-x)^{\xi-1} dx + \varepsilon^{-1} \int\limits_{(s_h)} w_{h\alpha}(z-x)^{\xi-1} dx + \varepsilon^{-1} \varepsilon_{h\alpha} \int\limits_{(s_0)} w_{h\alpha}(z-x)^{\xi-1} dx$$

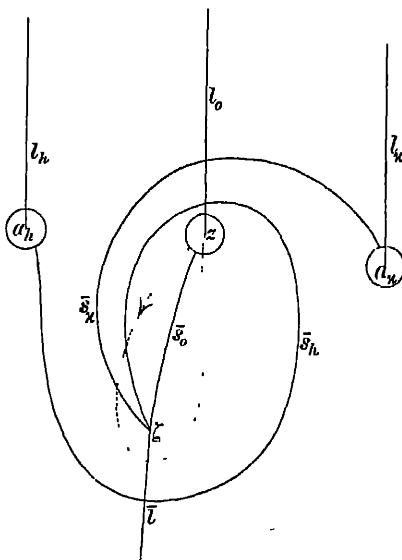


Fig 14

oder nach einfacher Reduction

(27) $\quad \overline{\Theta} A_{h\alpha} = A_{h\alpha} - (1 - \varepsilon_{h\alpha}) Z_{h\alpha} \qquad (h = 1, 2, \ldots \sigma, \; \alpha = 1, 2, \ldots \alpha_h),$

und ferner

(28) $\quad \overline{\Theta} Z_{h\alpha} = \varepsilon Z_{h\alpha} \qquad (h = 1, 2, \ldots \sigma, \; \alpha = 1, 2, \ldots \alpha_h)$

Die Integrale $u_{h\alpha}$ von (E) bleiben bei diesem Umlaufe natürlich ungeändert, wie man auch mit Hülfe der Gleichungen (20), (27), (28) direct verificiren kann.

238. Lineare Combinationen der Schleifenintegrale, die Lösungen der Differentialgleichung liefern. Herstellung eines Fundamentalsystems.

Wir haben in den m Ausdrücken (20) (S. 434) Integrale unserer Differentialgleichung (E) kennen gelernt, die als homogene lineare Verbindungen der Schleifenintegrale

$$A_{i\alpha}, \quad Z_\beta \qquad (i = 1, 2, \ldots \sigma; \; \alpha = 1, 2, \ldots \alpha_i, \; \beta = 1, 2, \ldots m)$$

dargestellt sind. Wir wollen nun allgemein die Aufgabe behandeln, Systeme von $2m$ Constanten $\gamma_{i\alpha}, \gamma_\beta$ zu bestimmen, für welche die Summe

$$(29)\qquad u = \sum_{i=1}^{\sigma} \sum_{\alpha=1}^{\alpha_i} A_{i\alpha}\gamma_{i\alpha} + \sum_{\beta=1}^{m} Z_\beta \gamma_\beta$$

eine Lösung der Differentialgleichung (E) darstellt.

Zu dem Ende beachten wir, dass zufolge der Gleichung (23) (Nr. 234, S. 421), wenn w eine Lösung der zu (A) adjungirten Differentialgleichung (A′) bedeutet,

$$(30)\qquad E_z\left(\int w(z-x)^{\xi-1}dx\right) = \int d D_x((z-x)^{\xi-1}, w)$$

ist. Der auf der rechten Seite dieser Gleichung auftretende bilineare Differentialausdruck

$$D_x((z-x)^{\xi-1}, w) = \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} (-1)^\lambda \frac{d^\lambda(P_\lambda w)}{dx^\lambda} \frac{d^{\nu-\lambda-1}(z-x)^{\xi-1}}{dx^{\nu-\lambda-1}}$$

hat die Gestalt

$$D_x((z-x)^{\xi-1}, w) = (z-x)^{\xi-m} \sum_{\nu=0}^{m} (z-x)^\nu \sum_{\lambda=0}^{\nu} P_{\nu\lambda}(x) w^{(\lambda)}(x),$$

wo die $P_{\nu\lambda}(x)$ ganze rationale Functionen von x bedeuten, die sich aus den Coefficienten $P_\varkappa(x)$ der Differentialgleichung (A) und aus deren Ableitungen zusammensetzen, und $w^{(\lambda)}(x)$ den Werth der λ^{ten} Ableitung des Integrals w im Punkte x darstellt. Es ist folglich nach (30)

$$E_z(A_{i\alpha}) = \int_{(s_i)} d D_x((z-x)^{\xi-1}, w_{i\alpha})$$
$$= (z-\zeta)^{\xi-m} \sum_{\nu=0}^{m-1} (z-\zeta)^\nu \sum_{\lambda=0}^{\nu} P_{\nu\lambda}(\zeta)(\varepsilon_{i\alpha}-1) w_{i\alpha}^{(\lambda)}(\zeta),$$

$$E_z(Z_\beta) = \int_{(s_0)} d D_x((z-x)^{\xi-1}, w_\beta)$$
$$= (z-\zeta)^{\xi-m} \sum_{\nu=0}^{m-1} (\varepsilon-1)(z-\zeta)^\nu \sum_{\lambda=0}^{\nu} P_{\nu\lambda}(\zeta) w_\beta^{(\lambda)}(\zeta),$$

und daher

$$E_z(u) = (z-\zeta)^{\xi-m} \sum_{\nu=0}^{m-1} (z-\zeta)^\nu \sum_{\lambda=0}^{\nu} P_{\nu\lambda}(\zeta)$$
$$\cdot \left\{ \sum_{i=1}^{\sigma} \sum_{\alpha=1}^{\alpha_i} \gamma_{i\alpha}(\varepsilon_{i\alpha}-1) w_{i\alpha}^{(\lambda)}(\zeta) + (\varepsilon-1) \sum_{\beta=1}^{m} \gamma_\beta w_\beta^{(\lambda)}(\zeta) \right\}.$$

Soll dieser Ausdruck identisch, d. h für jeden Werth von z verschwinden, so muss

$$(31)\qquad \sum_{i=1}^{\sigma}\sum_{\alpha=1}^{\alpha_i}\gamma_{i\alpha}(\varepsilon_{i\alpha}-1)w_{i\alpha}^{(\lambda)}(\zeta)+(\varepsilon-1)\sum_{\beta=1}^{m}\gamma_\beta w_\beta^{(\lambda)}(\zeta)=0 \qquad (\lambda=0,1,2,\ldots m-1)$$

sein. Dieses System von m linearen homogenen Gleichungen für die $2m$ Unbekannten $\gamma_{i\alpha}$, γ_β ist vom Range m, weil die Determinante

$$\left|(\varepsilon-1)w_\beta^{(\lambda)}(\zeta)\right| \qquad (\beta=1,2,\ldots m;\ \lambda=0,1,\ldots m-1)$$

als Determinante eines Fundamentalsystems in dem regulären Punkte $x=\zeta$ einen von Null verschiedenen Werth hat, sofern ξ keine ganze Zahl, also $\varepsilon \neq 1$ ist. Das System (31) besitzt also (vergl. Nr 34, Bd I, S. 113) genau m linear unabhängige Lösungssysteme; die mittelst derselben gebildeten Ausdrücke u stellen folglich ein System linear unabhängiger Lösungen der Differentialgleichung (E) dar (vergl. die analoge Betrachtung in der Nr. 115, Bd. I, S. 416), wenn die $2m$ Schleifenintegrale

$$A_{i\alpha},\ Z_\beta$$

von einander linear unabhängig sind Dies ist im Allgemeinen (nämlich allemal, wenn die Differentialgleichung (E) irreductibel ist) der Fall, wie wir hier nicht näher ausführen wollen; wir haben also in der That aus den gedachten Schleifenintegralen ein Fundamentalsystem von (E) zusammengesetzt.

Denken wir uns die Integrale $w_{i\alpha}$ durch das Fundamentalsystem

$$w_1,\ w_2,\ \cdots w_m$$

von (A') dargestellt,

$$w_{i\alpha}=\sum_{\beta=1}^{m}\delta_\beta^{(i\alpha)}w_\beta \qquad (i=1,2,\ldots\sigma,\ \alpha=1,2,\ldots\alpha_i)$$

und nehmen in den Gleichungen (31)

$$\gamma_\beta=\gamma\,\delta_\beta^{(\varkappa\nu)} \qquad (\beta=1,2,\ldots m),$$

wo $\varkappa$ eine bestimmte der Zahlen $1, 2, \cdots \sigma$, ν eine bestimmte der Zahlen $1, 2, \cdots \alpha_\varkappa$, γ eine Constante bedeutet, dann erhält das System (31) die Form

$$\sum_{i=1}^{\sigma}\sum_{\alpha=1}^{\alpha_i}\gamma_{i\alpha}(\varepsilon_{i\alpha}-1)w_{i\alpha}^{(\lambda)}(\zeta)+\gamma(\varepsilon-1)w_{\varkappa\nu}^{(\lambda)}(\zeta)=0,$$

und diese Gleichungen werden offenbar durch die Werthe

$$\gamma_{\iota\alpha} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq \varkappa, \quad \alpha \neq \nu,$$
$$\gamma_{\varkappa\nu} = 1 - \varepsilon; \quad \gamma = -(1 - \varepsilon_{\varkappa\nu})$$

erfüllt, denen das Integral

$$u_{\varkappa\nu} = (1 - \varepsilon)A_{\varkappa\nu} - (1 - \varepsilon_{\varkappa\nu})Z_{\varkappa\nu}$$

der Differentialgleichung (E) entspricht. Es kommen also auf diese Weise für

$$\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma; \quad \nu = 1, 2, \cdots \alpha_\varkappa$$

die über die σ Doppelschleifen

$$(a_\varkappa, z) = s_\varkappa s_0 s_\varkappa^{-1} s_0^{-1}$$

erstreckten Integrale zum Vorschein.

Wenn $\varepsilon \neq 1$, d. h. ξ keine ganze Zahl ist, so sind diese m Integrale $u_{\varkappa\nu}$ auch linear unabhängig Es bilden nämlich die m Coefficientensysteme $\gamma_{\iota\alpha}, \gamma_\beta$, die zu denselben führen, ein System von $m \cdot 2m$ Grössen, in welchem die aus den m^2 Grössen $\gamma_{\iota\alpha}$ gebildete Determinante den Werth

$$(\varepsilon - 1)^m$$

hat; diese m Systeme $\gamma_{\iota\alpha}, \gamma_\beta$ sind also (vergl. Nr. 34, Bd. I, S. 113) für $\varepsilon \neq 1$ linear unabhängig.

Ist $\varepsilon = 1$ und ξ eine negative ganze Zahl oder Null, so sind in (31) die $\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_m$ willkürlich, d. h. wir haben in

$$Z_1, \; Z_2, \cdots Z_m$$

ein Fundamentalsystem von (E). Für $\xi = 0$ ist (E) nichts anderes als die mit der unabhängigen Variabeln z geschriebene adjungirte Differentialgleichung von (A) (Nr. 234, S. 422) In diesem Falle sind die Z_β einfach die Darstellungen der $w_\beta(z)$ durch das Cauchy'sche Integral

$$w_\beta(z) = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} Z_\beta = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{(s_0)} w_\beta(x)(z - x)^{-1} dx.$$

Wenn ξ gleich der negativen ganzen Zahl $-\nu$ ist, so haben wir

$$\frac{d^\nu w_\beta(z)}{dz^\nu} = \frac{(-1)^{\nu+1}\nu!}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{(s_0)} w_\beta(x)(z - x)^{-\nu-1} dx,$$

und (E) ist demnach die mit der unabhängigen Variabeln z geschriebene Differentialgleichung, der die ν^{ten} Ableitungen der Integrale der zu (A) adjungirten Differentialgleichung genügen.

Die letztere Bemerkung ist noch einer wesentlichen Verallgemeinerung fähig, die uns zu wichtigen Folgerungen Veranlassung geben wird.

Bedeutet A einen Integrationsweg, für welchen die Gleichung (27) der Nr 234 (S 421) erfüllt ist, und w eine Lösung der Differentialgleichung (A′), so ist

$$u = \int_{(A)} w(z - x)^{\xi - 1} dx$$

eine Lösung von (E) Differentiiren wir dieselbe ν-mal nach z, indem wir unter dem Integralzeichen differentiiren, so kommt

$$\frac{d^\nu u}{dz^\nu} = \int_{(A)} w(\xi - 1)(\xi - 2) \cdots (\xi - \nu)(z - x)^{\xi - \nu - 1} dx;$$

es ist folglich die ν^{te} Ableitung der Lösung u von (E) eine Lösung derjenigen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung, die wir erhalten, wenn wir in (E) an die Stelle von ξ setzen $\xi - \nu$.

Wir wollen im Folgenden, wenn es sich als nöthig erweist, den Coefficienten der Differentialgleichung (E) noch das zweite Argument ξ hinzufügen und statt (E) auch (E_ξ) schreiben, so dass also die Bezeichnung

$$(E_\xi) \qquad E_z(u;\xi) = Q_m(z,\xi)\frac{d^m u}{dz^m} + \cdots + Q_0(z,\xi)u = 0$$

zu gelten hat. Es lässt sich dann direct zeigen, dass die Differentialgleichung

$$(E_{\xi+1}) \quad E_z(U;\xi+1) = Q_m(z,\xi+1)\frac{d^m U}{dz^m} + \cdots + Q_0(z,\xi+1)U = 0$$

so beschaffen ist, dass die Ableitungen ihrer Lösungen

$$(32) \qquad u = \frac{dU}{dz}$$

die Differentialgleichung (E_ξ) befriedigen. In der That folgt, wenn wir (E_ξ) nach z differentiiren und beachten, dass $Q_0(z, \xi)$ eine von z unabhängige Grösse ist, für U die Gleichung

$$Q_m(z,\xi)\frac{d^m U}{dz^m} + \sum_{\nu=0}^{m-1}[Q'_{\nu+1}(z,\xi) + Q_\nu(z,\xi)]\frac{d^\nu U}{dz^\nu} = 0,$$

und diese ist mit $(E_{\xi+1})$ identisch, wie man mit Hülfe der Formeln

$$(\gamma) \qquad Q_\nu(x,\xi) = (-1)^\nu \sum_{\varkappa=\nu}^{m} \frac{(\xi-1)(\xi-2) \cdots (\xi-\varkappa)}{(\xi-1)(\xi-2) \cdots (\xi-\nu)} \frac{P_\varkappa^{(\varkappa-\nu)}(x)}{(\varkappa-\nu)!}$$

sofort erkennt.

239. Differentialgleichungen, die zu derselben Classe gehören.

Betrachtet man allgemein die Differentialgleichung

$$(\mathrm{E}_{\xi+\nu}) \qquad E_z(\mathfrak{U}, \xi+\nu) = 0,$$

wo ν eine positive ganze Zahl bedeutet, so sind ihre Lösungen in der Form

$$\mathfrak{U} = \int_{(\varDelta)} w(z-x)^{\xi+\nu-1} dx$$

darstellbar, und die ν^{ten} Ableitungen dieser Lösungen genügen der Differentialgleichung (E_ξ), d. h. es ist

$$u = \frac{d^\nu \mathfrak{U}}{dz^\nu}.$$

Daraus folgt, dass alle Differentialgleichungen (E_ξ), (E_η), in denen sich ξ und η nur durch ganze Zahlen unterscheiden, nothwendig zur selben Classe gehören.

Von der Thatsache ausgehend, dass die m Integrale $u_{i\alpha}$ ein Fundamentalsystem von (E_ξ) darstellen, kann man dies auch aus den Formeln (α) und (β) der Nr. 237 (S. 434, 435) erschliessen. In der That hat die Differentialgleichung (E_ξ) für jedes ξ die singulären Stellen $a_1, a_2, \cdots a_\sigma, \infty$. Die Formeln (α), (β), welche die Substitutionen darstellen, die ein Fundamentalsystem von (E_ξ) erfährt, wenn z Umläufe um diese singulären Stellen beschreibt, bleiben ungeändert, wenn man ξ um ganze Zahlen vermehrt oder vermindert, da sie das ξ nur in der Form

$$\varepsilon = e^{2\pi\xi\sqrt{-1}}$$

enthalten. Da (E_ξ) überdies zur Fuchs'schen Classe gehört, so folgt hieraus gemäss den Sätzen der Nr. 222 (S. 366) die Richtigkeit unserer Behauptung.

Die Beziehung zwischen den abhängigen Variabeln der Differentialgleichungen (E_ξ) und $(\mathrm{E}_{\xi+1})$ kann man auch leicht in der Form darstellen, dass U durch u und seine Ableitungen ausgedrückt erscheint. Es ist nämlich nach (32)

$$\frac{d^{m-1}u}{dz^{m-1}} = \frac{d^m U}{dz^m},$$

also mit Benutzung der Differentialgleichung $(\mathrm{E}_{\xi+1})$

$$\frac{d^{m-1}u}{dz^{m-1}} = -\left\{\frac{Q_{m-1}(z,\xi+1)}{Q_m(z,\xi+1)}\frac{d^{m-2}u}{dz^{m-2}} + \cdots + \frac{Q_1(z,\xi+1)}{Q_m(z,\xi+1)}u + \frac{Q_0(z,\xi+1)}{Q_m(z,\xi+1)}U\right\},$$

und hieraus folgt, wenn wir den constanten Factor $Q_0(z, \xi + 1)$ unterdrücken,

$$(33) \qquad -U = Q_m(z, \xi+1)\frac{d^{m-1}u}{dz^{m-1}} + Q_{m-1}(z, \xi+1)\frac{d^{m-2}u}{dz^{m-2}} + \cdots + Q_1(z, \xi+1)u.$$

Gehen wir statt von der Differentialgleichung (A) von einer mit (A) zur selben Art gehörigen Differentialgleichung (B) aus, so gehören (Nr. 174, S. 154) auch die adjungirten Differentialgleichungen (A′) und (B′) zu einer und derselben Art. Die abhängige Variable $\mathfrak{w}$ der Differentialgleichung (B′) wird also durch w und dessen Ableitungen in der Form

$$(34) \qquad \mathfrak{w} = g_0 w + g_1 \frac{dw}{dx} + \cdot\cdot + g_{m-1}\frac{d^{m-1}w}{dx^{m-1}}$$

dargestellt, wo die $g_0, g_1, \cdots g_{m-1}$ (von z unabhängige) rationale Functionen von x bedeuten. Wir fragen nun: wie müssen diese rationalen Functionen beschaffen sein, damit auch die Differentialgleichung (E), deren Euler'sche Transformirte (A′) ist, mit der Differentialgleichung

$$(\mathrm{F}) \qquad F_z(\mathfrak{u}) = 0,$$

deren Euler'sche Transformirte durch (B′) dargestellt wird, zur selben Art gehöre? Es handelt sich dann um die Untersuchung der Ausdrücke

$$\int\limits_{(\mathcal{A})} \mathfrak{w}(z-x)^{\eta-1}dx,$$

wo $\mathfrak{w}$ durch die Gleichung (34) gegeben und die Differenz $\eta - \xi$ eine positive ganze Zahl ist.

Bezeichnen wir die den $w_{\iota\alpha}, w_\beta$ entsprechenden Integrale von (B′) durch $\mathfrak{w}_{\iota\alpha}, \mathfrak{w}_\beta$ und setzen

$$\mathfrak{u}_{\iota\alpha} = \int\limits_{(s_\iota s_0 s_\iota^{-1} s_0^{-1})} \mathfrak{w}_{\iota\alpha}(z-x)^{\eta-1}dx,$$

so befriedigen diese Ausdrücke bei geeigneter Wahl von η die Differentialgleichung (F), und es werden die Substitutionen, welche die $\mathfrak{u}_{\iota\alpha}$ bei Umläufen von z um die Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ erleiden, mit den entsprechenden Substitutionen der $u_{\iota\alpha}$ übereinstimmen, wenn

1) die Differentialgleichungen (A′) und (B′) nicht nur zur selben Art, sondern zur selben Classe gehören,

2) die den Integralen

$$w_{\iota\alpha} \qquad (\alpha = \alpha_\iota + 1, \ldots m, \; \iota = 1, 2, \ldots \sigma)$$

von (A′) entsprechenden Integrale $\mathfrak{w}_{\iota\alpha}$ von (B′) in der Umgebung von $x = a_\iota$ auch regulär sind.

In diesem Falle lässt sich nämlich zunächst jedes über einen beliebigen geschlossenen Weg $\varDelta$ erstreckte Integral

$$\int_{(\varDelta)} \mathfrak{w}(z-x)^{\eta-1}dx$$

aus Integralen von der Form

$$\int_{(s_i)} \mathfrak{w}_{i\alpha}(z-x)^{\eta-1}dx, \quad \int_{(s_0)} \mathfrak{w}_{\beta}(z-x)^{\eta-1}dx \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \cdots \alpha_i \\ i = 1, 2, \cdots \sigma \\ \beta = 1, 2, \cdots m \end{pmatrix}$$

zusammensetzen. Wir bemerken gleich, dass dies im Allgemeinen nicht möglich wäre, wenn die Differentialgleichung (B′) ausser den $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ noch singuläre Stellen enthielte, in deren Umgebung die Integrale $\mathfrak{w}$ zwar eindeutig wären, aber wie rationale Functionen unendlich würden, denn dann wäre das über einen geschlossenen Weg, der einen solchen Unendlichkeitspunkt umschliesst, erstreckte Integral

$$\int \mathfrak{w}(z-x)^{\eta-1}dx$$

im Allgemeinen von Null verschieden. Es würde nur dann verschwinden, wenn das Cauchy'sche Résidu von

$$\mathfrak{w}(z-x)^{\eta-1}$$

in Bezug auf jene Unendlichkeitsstelle gleich Null wäre. Dann könnte aber im Allgemeinen $\mathfrak{w}$ nicht mehr von z unabhängig sein; wir beschränken uns deshalb auf den Fall, wo (B′) und (A′) zur selben Classe gehören

Ferner sind, wenn die Bedingungen 1), 2) erfüllt sind, die Uebergangssubstitutionen, welche die Integralsysteme

$$\mathfrak{w}_{i\alpha}, \quad \mathfrak{w}_{\varkappa\alpha} \qquad (i \neq \varkappa, \ \alpha = 1, 2, \cdots m)$$

mit einander verbinden, dieselben, wie die für die entsprechenden Lösungen von (A′) bestehenden, so dass also in der That die Formeln (α), (β) der Nr. 237 (S 434, 435) die Aenderungen der $\mathfrak{u}_{i\alpha}$ bei Umläufen von z wiedergeben. Da endlich die wesentlich singulären Stellen von (F) keine anderen sein können wie eben die $a_1, a_2, \cdots a_\sigma, \infty$, so gehören, wenn die Bedingungen 1), 2) erfüllt sind, (E) und (F) zur selben Classe.

Dazu ist jedoch noch Folgendes zu bemerken

Im Allgemeinen wird die Differentialgleichung (B′) ausser den wesentlich singulären Stellen $a_1, a_2, \cdots a_\sigma, \infty$ noch gewisse ausserwesentlich singuläre Punkte $b_1, b_2, \cdots b_\varrho$ enthalten Für (A) und (A′) hatten wir durch die den singulären Punkten $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ auferlegten Bedingungen das Auftreten von ausserwesentlichen singulären Stellen

ausgeschlossen. Der Coefficient der m^{ten} Ableitung in (B′) wird also im Allgemeinen von höherem als dem m^{ten} Grade, etwa vom Grade

$$\overline{m} > m$$

sein; entsprechend wird also die Differentialgleichung (F), deren Euler'sche Transformirte (B′) ist, nicht von der m^{ten}, sondern von der $\overline{m}^{ten}$ Ordnung und in den $\mathfrak{u}_{i\alpha}$ für η der Werth $\xi + \overline{m} - m$ zu nehmen sein.

Aber die m Integrale $\mathfrak{u}_{i\alpha}$ von (F) sind so beschaffen, dass sie sich bei allen Umläufen von z in lineare homogene Functionen ihrer selbst verwandeln; sie genügen folglich nach einem wiederholt angewandten Principe einer homogenen linearen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung der Fuchs'schen Classe

$$(\overline{\mathrm{F}}) \qquad \overline{F}_z(\mathfrak{u}) = 0,$$

die ihre sämmtlichen Integrale mit (F) gemein hat. Die linke Seite von (F) ist demnach in der Form

$$F_z(\mathfrak{u}) = G\,\overline{F}_z(\mathfrak{u})$$

darstellbar, wo G einen homogenen linearen Differentialausdruck von der Ordnung $\overline{m} - m$ mit rationalen Coefficienten bedeutet; in diesem Falle ist also (F) reductibel.

Aehnliches gilt offenbar, wenn die Differentialgleichung (A), von der wir ausgingen, so beschaffen ist, dass ihre adjungirte (A′) ausserwesentliche singuläre Stellen besitzt. In diesen Fällen werden wir dann nicht (F) selbst, sondern die Differentialgleichung m^{ter} Ordnung $(\overline{\mathrm{F}})$ als diejenige ansehen, deren Euler'sche Transformirte durch (B′) gegeben wird. Man erkennt auch leicht, dass die Art und Weise, wie wir in dem Falle, wo der unendlich ferne Punkt keine Unbestimmtheitsstelle der Differentialgleichung (A) war, die Differentialgleichung (𝔄) der Nr. 233 (S. 415) durch (E) ersetzten, sich in den hier dargelegten Gedankengang einfügt. Unter Festhaltung der bisherigen Annahmen über die Beschaffenheit von (A) wird stets, wenn die Bedingungen 1), 2) erfüllt sind, $(\overline{\mathrm{F}})$ mit (E) zur selben Classe gehören.

240. Besondere Fälle von Differentialgleichungen derselben Classe.

Die Bedingungen 1), 2) sind offenbar erfüllt, wenn in der Beziehung (34) die $g_0, g_1, \cdots g_{n-1}$ ganze rationale Functionen bedeuten; wir wollen uns die Aufgabe stellen, in diesem besonderen Falle aus der als gegeben zu betrachtenden Beziehung (34) die Beziehung zwischen den abhängigen Variabeln u und $\mathfrak{u}$ von (E) und $(\overline{\mathrm{F}})$ herzuleiten.

Sei $\nu_\varkappa$ der Grad der ganzen Function $g_\varkappa$, dann ist, wenn wir nach Potenzen von $x - z$ entwickeln,

$$g_\varkappa(x) = \sum_{\iota=0}^{\nu_\varkappa} \frac{g_\varkappa^{(\iota)}(z)}{\iota!}(x-z)^\iota \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots m-1),$$

also ergiebt sich, indem wir beide Seiten der Gleichung (34) mit

$$(z-x)^{\eta-1}dx$$

multipliciren und auf einem Wege $\varDelta$, für den die Gleichung (27) der Nr. 234 (S. 421) erfüllt ist, integriren,

$$\int\limits_{(\varDelta)} \mathfrak{w}(z-x)^{\eta-1}dx = \sum_{\varkappa=0}^{m-1}\sum_{\iota=0}^{\nu_\varkappa} \frac{g_\varkappa^{(\iota)}(z)}{\iota!}(-1)^\iota \int\limits_{(\varDelta)} \frac{d^\varkappa w}{dx^\varkappa}(z-x)^{\eta+\iota-1}dx.$$

Nun folgt aber aus der partiellen Integrationsformel (Nr. 20, Bd. I, S. 54) für ein beliebiges ζ

$$\int\limits_{(\varDelta)} \frac{d^\varkappa w}{dx^\varkappa}(z-x)^{\zeta-1}dx = \int\limits_{(\varDelta)} d\sum_{h=0}^{\varkappa-1}(-1)^h \frac{d^h(z-x)^{\zeta-1}}{dx^h}\,\frac{d^{\varkappa-h-1}w}{dx^{\varkappa-h-1}}$$
$$+ (-1)^\varkappa \int\limits_{(\varDelta)} w\,\frac{d^\varkappa}{dx^\varkappa}[(z-x)^{\zeta-1}]\,dx;$$

wenn also, wie wir voraussetzen können, der Integrationsweg $\varDelta$ so gewählt ist, dass längs desselben fortgesetzt sowohl w als auch

$$(z-x)^{\zeta-1}$$

zu ihren Ausgangswerthen zurückkehren (dies ist z. B. für die Doppelschleifen

$$s_\iota s_0 s_\iota^{-1} s_0^{-1} \qquad (\iota = 1, 2, \ldots \sigma)$$

stets der Fall), so fällt das erste Integral auf der rechten Seite weg, und wir erhalten

$$\int\limits_{(\varDelta)} \frac{d^\varkappa w}{dx^\varkappa}(z-x)^{\zeta-1}dx = (\zeta-1)(\zeta-2)\cdots(\zeta-\varkappa)\int\limits_{(\varDelta)} w(z-x)^{\zeta-\varkappa-1}dx.$$

Es ist folglich

$$(35)\qquad \int\limits_{(\varDelta)} \mathfrak{w}(z-x)^{\eta-1}dx$$
$$= \sum_{\varkappa=0}^{m-1}\sum_{\iota=0}^{\nu_\varkappa}(-1)^\iota \frac{(\eta+\iota-1)\ldots(\eta+\iota-\varkappa)}{1\cdot 2\ldots\iota}\, g_\varkappa^{(\iota)}(z)\int\limits_{(\varDelta)} w(z-x)^{\eta+\iota-\varkappa-1}dx;$$

bezeichnen wir also den grössten Werth, den die ganze Zahl

$$\eta - \xi + \iota - \varkappa \qquad (\iota = 0, 1, \ldots \nu_\varkappa,\ \varkappa = 0, 1, \ldots m-1)$$

anzunehmen vermag, durch ν und setzen wie oben (S. 441)

$$\int\limits_{(\varDelta)} w(z-x)^{\xi+\nu-1}dx = \mathfrak{U},$$

so erhalten wir aus (35), wenn wir rechter Hand zusammenziehen und mit Hülfe der Differentialgleichung ($E_{\xi+\nu}$), der $\mathfrak{U}$ genügt, die Ableitungen höherer als $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung wegschaffen,

$$(36) \qquad \int\limits_{(\varDelta)} \mathfrak{w}(z-x)^{\eta-1}dx = R_0\,\mathfrak{U} + R_1\frac{d\mathfrak{U}}{dz} + \cdots + R_{m-1}\frac{d^{m-1}\mathfrak{U}}{dz^{m-1}},$$

wo $R_0, R_1, \cdots R_{m-1}$ rationale Functionen von z bedeuten, deren Nenner nur für $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ verschwinden können, und die sich aus den $g_\varkappa^{(i)}(z)$, aus den Coefficienten

$$Q_\iota(z, \xi+\nu) \qquad (\iota=0, 1, \ldots m)$$

der Differentialgleichung ($E_{\xi+\nu}$) und deren Ableitungen in einfacher Weise zusammensetzen; besonders zu bemerken ist, dass diese $R_0, R_1, \cdots R_{m-1}$ von der speciellen Wahl des Integrationsweges $\varDelta$ unabhängig sind.

Nun können wir durch wiederholte Anwendung der Formel (33) $\mathfrak{U}$ und seine Ableitungen durch das entsprechende Integral

$$u = \int\limits_{(\varDelta)} w(z-x)^{\xi-1}dx$$

von (E) darstellen; dies in (36) eingesetzt giebt dann die explicite Darstellung von

$$\mathfrak{u} = \int\limits_{(\varDelta)} \mathfrak{w}(z-x)^{\eta-1}dx$$

durch u und dessen $m-1$ erste Ableitungen, und damit zugleich die gesuchte Beziehung, die den Uebergang von (E) zu $(\overline{\text{F}})$ vermittelt.

Die eben angedeutete Rechnung kann in genau derselben Weise durchgeführt werden, wenn η gleich einer von ξ um eine beliebige ganze Zahl verschiedenen Grösse genommen wird. Die Ausdrücke $\mathfrak{u}$ befriedigen dann eine mit $(\overline{\text{F}})$ zu derselben Classe gehörige Differentialgleichung m^{ter} Ordnung.

Mit Rücksicht auf eine spätere Anwendung betrachten wir noch den besonderen Fall

$$(37) \qquad \mathfrak{w} = g_0(x)w,$$

wo $g_0(x)$ eine ganze rationale Function von höchstens $(\sigma-1)^{\text{tem}}$ Grade ist. Setzen wir

(38) $$\int\limits_{(A)} w(z-x)^{\xi+\sigma-2}dx = \mathfrak{U}^{(\sigma-1)},$$

so ist

$$\int\limits_{(A)} w(z-x)^{\xi+\sigma-\iota-2}dx = \frac{1}{(\xi+\sigma-2)\cdots(\xi+\sigma-\iota-1)}\frac{d^{\iota}\mathfrak{U}^{(\sigma-1)}}{dz^{\iota}};$$

also haben wir, wenn wir in $\mathfrak{u}$ einfach ξ an die Stelle von η setzen,

(39) $$\mathfrak{u} = \int\limits_{(A)} g_0(x)w(z-x)^{\xi-1}dx = (-1)^{\sigma-1}\frac{g_0^{(\sigma-1)}(z)}{(\sigma-1)!}\mathfrak{U}^{(\sigma-1)}$$
$$+(-1)^{\sigma-2}\frac{g_0^{(\sigma-2)}(z)}{(\sigma-2)!}\frac{\frac{d\mathfrak{U}^{(\sigma-1)}}{dz}}{\xi+\sigma-2}+\cdots+g_0(z)u;$$

hierin sind dann noch für $\mathfrak{U}^{(\sigma-1)}$ und seine Ableitungen die Ausdrücke derselben durch u und dessen Ableitungen zu setzen.

Drittes Kapitel.

241. Behandlung einer beliebigen Differentialgleichung der Fuchs-schen Classe. Die Coefficienten der Uebergangssubstitutionen. Reihenentwickelungen der Integrale.

Wir wollen jetzt von einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit ganzen rationalen Coefficienten

$$\partial_x(\mathfrak{y}) = \sum_{\varkappa=0}^{n} p_\varkappa(x) \frac{d^\varkappa \mathfrak{y}}{dx^\varkappa} = 0 \tag{1}$$

ausgehen, in welcher der Coefficient der n^{ten} Ableitung $p_n(x)$ eine ganze rationale Function vom Grade $m > n$ sein möge Wir gehen von derselben zu einer Differentialgleichung m^{ter} Ordnung über, indem wir z B. setzen

$$\mathfrak{y} = \frac{d^{m-n} y}{dx^{m-n}}, \quad D_x(y) = \partial_x(\mathfrak{y}), \tag{2}$$

dann sei

$$D_x(y) = \sum_{\varkappa=0}^{m} P_\varkappa(x) \frac{d^\varkappa y}{dx^\varkappa} = 0 \tag{A}$$

eine Differentialgleichung von der in den vorhergehenden Nummern vorausgesetzten Beschaffenheit. Wir haben jetzt

$$P_{\varkappa+m-n}(x) = p_\varkappa(x) \qquad (\varkappa = 0, 1, \quad n),$$
$$P_\lambda(x) = 0 \qquad (\lambda < m-n)$$

Die Differentialgleichungen (1) und (A) gehören offenbar gleichzeitig zur Fuchs'schen Classe; wir nehmen an, dass dies der Fall sei.

Zufolge des Reciprocitätssatzes (Nr. 21, Bd I, S. 59) hat man dann zwischen den adjungirten Differentialausdrücken von $\partial_x(\mathfrak{y})$ und $D_x(y)$ die Beziehung

$$D_x'(w) = (-1)^{m-n} \frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}} \partial_x'(w), \tag{3}$$

und die Beziehung von Lagrange nimmt die Gestalt an

$$f \partial_x\left(\frac{d^{m-n} g}{dx^{m-n}}\right) - (-1)^{m-n} g \frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}} \partial_x'(f) = \frac{d}{dx} D_x(g, f).$$

Da nun direct, wenn der zu $\partial_x(\mathfrak{y})$ gehörige begleitende bilineare Differentialausdruck durch $\partial_x(g, f)$ bezeichnet wird,

$$f\partial_x\left(\frac{d^{m-n}g}{dx^{m-n}}\right) - \frac{d^{m-n}g}{dx^{m-n}}\partial_x'(f) = \frac{d}{dx}\partial_x\left(\frac{d^{m-n}g}{dx^{m-n}}, f\right)$$

ist, so haben wir, wenn wir f durch eine willkürliche Lösung w der Differentialgleichung

$$(\mathrm{A}') \qquad D_x'(w) = 0$$

ersetzen,

$$(4) \qquad \frac{d}{dx}D_x(g, w) = \frac{d}{dx}\partial_x\left(\frac{d^{m-n}g}{dx^{m-n}}, w\right) + \frac{d^{m-n}g}{dx^{m-n}}(c_0 + c_1 x + \cdots + c_{m-n-1}x^{m-n-1}),$$

wo $c_0, c_1, \cdots c_{m-n-1}$ Integrationsconstanten bedeuten, die sämmtlich gleich Null zu nehmen sind, wenn die Function w auch der Differentialgleichung

$$(5) \qquad \partial_x'(w) = 0$$

Genüge leistet.

Sei wie in den vorhergehenden Nummern

$$p_n(x) = P_m(x) = \prod_{i=1}^{\sigma}(x - a_i)^{\alpha_i}, \qquad \sum_{i=1}^{\sigma}\alpha_i = m,$$

und mögen

$$r_{i1}, r_{i2}, \cdots r_{i\alpha_i}, 0, 1, \cdots n - \alpha_i - 1$$

die Wurzeln der zu $x = a_i$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung von (1) bedeuten; dann sind die nicht nothwendig ganzzahligen Wurzeln der entsprechenden determinirenden Fundamentalgleichung für die adjungirten Differentialgleichungen von (1) und (A)

$$\sigma_{i\alpha} = -r_{i\alpha} + n - \alpha_i - 1 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots \alpha_i),$$

zu denen für die Differentialgleichung (5) noch die ganzzahligen Wurzeln

$$0, 1, \cdots n - \alpha_i - 1,$$

für die Differentialgleichung (A') ausser diesen noch

$$n - \alpha_i, \cdots m - \alpha_i - 1$$

hinzutreten. Diejenigen Elemente

$$w_{i\alpha} = (x - a_i)^{\sigma_{i\alpha}}\mathfrak{P}_{i\alpha}(x \mid a_i) \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots \alpha_i)$$

des zum Punkte $x = a_i$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems, die zu den Wurzeln

$$\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \cdots \sigma_{i\alpha_i}$$

der determinirenden Fundamentalgleichung als Exponenten gehören, sind für die Differentialgleichungen (A') und (5) dieselben.

Diese Bemerkungen in Verbindung mit der aus der Gleichung (2) und aus dem Satze von der Vertauschung von Parameter und Argument folgenden Gleichung

$$D_x((z-x)^{\xi-1}) = (\xi-1)\cdots(\xi+n-m)(-1)^{n-m}\partial_x((z-x)^{\xi+n-m-1})$$
$$= E_z((z-x)^{\xi-1})$$

genügen, um zu zeigen, dass die Differentialgleichungen (1) und (A) im Wesentlichen auf dieselbe Differentialgleichung (E) führen, d. h also, dass (5) und (A') beide die Integration von (E) nach der Methode von Euler bewirken.

Die Uebergangssubstitution, die zu einem die Punkte a_μ, $a_\varkappa$ verbindenden ganz in der zerschnittenen x-Ebene verlaufenden Wege in Bezug auf die Differentialgleichung (A') gehört, sei (vergl. Nr. 237, Gleichung (25), S. 435)

$$(6) \qquad w_{\mu\alpha} = \sum_{\lambda=1}^{m} c_{\alpha\lambda}^{(\mu\nu)} w_{\varkappa\lambda} \qquad (\alpha = 1, 2, \quad m),$$

dann müssen die den Werthen $\alpha = 1, 2, \cdot n$ entsprechenden Gleichungen des Systems (6) die zu demselben Wege gehörige Uebergangssubstitution von (5) darstellen. Es sind folglich für $\alpha \leqq n$ die

$$c_{\alpha, n+1}^{(\mu\varkappa)}, c_{\alpha, n+2}^{(\mu\varkappa)}, \cdots c_{\alpha, m}^{(\mu\varkappa)}$$

gleich Null. In den Formeln (α), (β) der Nr 237 (S. 434, 435), die uns die Fundamentalsubstitutionen des Fundamentalsystems $u_{i\alpha}$ von (E) liefern, kommen nur diejenigen Coefficienten der Uebergangssubstitutionen vor, für welche $\alpha \leqq \alpha_\mu$, $\lambda \leqq \alpha_\varkappa$ ist, d. h. nur die

$$c_{\alpha\lambda}^{(\mu\varkappa)} \qquad (\alpha = 1, 2, \quad \alpha_\mu, \lambda = 1, 2, \quad \alpha_\varkappa),$$

diese sind also als bekannt anzusehen, wenn man die Uebergangssubstitutionen der Differentialgleichung (5) kennt.

Da zufolge der Formeln (α), (β)

$$\Theta_\varkappa u_{\varkappa\alpha} = \varepsilon\varepsilon_{\varkappa\alpha} u_{\varkappa\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \cdot \alpha_\varkappa)$$

ist, so sind die

$$u_{\varkappa 1}, u_{\varkappa 2}, \cdots u_{\varkappa\alpha_\varkappa}$$

Elemente des zum singulären Punkte $z = a_\varkappa$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems der Differentialgleichung (E). Nehmen wir für ξ die in der Umgebung von $a_\varkappa$ gelegene Stelle $b_\varkappa$ und beschränken z ebenfalls auf die Umgebung des Punktes $a_\varkappa$, bezeichnen wir ferner durch

$$(a_\varkappa, z) = s_\varkappa s_0 s_\varkappa^{-1} s_0^{-1}$$

die von $b_\varkappa$ aus um die Punkte $a_\varkappa$ und z herum gelegte Doppelschleife, so können wir in

$$u_{\varkappa\alpha} = \int\limits_{(a_\varkappa, z)} w_{\varkappa\alpha} (z - x)^{\xi - 1} dx$$

für $w_{\varkappa\alpha}$ seine in der Umgebung von $x = a_\varkappa$ gültige Entwickelung einsetzen und gliedweise integriren. Wenn

$$(7) \qquad w_{\varkappa\alpha} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu (x - a_\varkappa)^{\nu + \sigma_{\varkappa\alpha}}, \qquad \delta_0 \neq 0$$

ist, so finden wir demgemäss

$$(8) \qquad u_{\varkappa\alpha} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu \int\limits_{(a_\varkappa, z)} (x - a_\varkappa)^{\nu + \sigma_{\varkappa\alpha}} (z - x)^{\xi - 1} dx.$$

Machen wir in dem unter dem Summenzeichen auftretenden Integrale die Substitution

$$x - a_\varkappa = (z - a_\varkappa) t,$$

so ergiebt sich, da für $x = a_\varkappa$, $t = 0$ und für $x = z$, $t = 1$ wird,

$$(9) \qquad \int\limits_{(a_\varkappa, z)} (x - a_\varkappa)^{\nu + \sigma_{\varkappa\alpha}} (z - x)^{\xi - 1} dx = (z - a_\varkappa)^{\nu + \sigma_{\varkappa\alpha} + \xi} \int\limits_{(0, 1)} t^{\nu + \sigma_{\varkappa\alpha}} (1 - t)^{\xi - 1} dt,$$

wo (0, 1) eine um die Punkte 0, 1 der t-Ebene herum gelegte Doppelschleife bedeutet.

242. Euler'sche Integrale erster Gattung. Die determinirenden Fundamentalgleichungen der Differentialgleichung (E). Beziehungen zwischen den Coefficienten der Uebergangssubstitutionen.

Als wir in der Nr 116 (Bd. I, S 420 ff.) die analoge Betrachtung für die Laplace'sche Transformirte einer linearen Differentialgleichung durchführten, ergab sich an Stelle des hier auftretenden Integrales

$$(10) \qquad \int\limits_{(0, 1)} t^{\nu + \sigma_{\varkappa\alpha}} (1 - t)^{\xi - 1} dt$$

das Integral (a a. O Gleichung (53))

$$\int t^{\varrho_\varkappa + \nu} e^{-t} dt,$$

erstreckt über eine von $t = \infty$ ausgehende, längs der realen t-Axe verlaufende, um $t = 0$ herum gelegte Schleife, und wir sahen, dass sich dieses Integral durch das sogenannte Euler'sche Integral zweiter Gattung, welches für Werthe von ϱ, deren realer Theil positiv ist, durch die Formel

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\varrho-1} dt = \Gamma(\varrho)$$

definirt wird, darstellen lässt in der Form

$$\int t^{\varrho_x+\nu} e^{-t} dt = (e^{2\pi i \varrho_x} - 1)\, \Gamma(\varrho_x + \nu + 1), \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Aehnlich können wir hier das Integral (10) darstellen durch das Euler'sche Integral erster Gattung

$$\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt = \mathrm{B}(p, q).$$

In dieser Formel muss, damit das Integral einen Sinn habe, sowohl p als auch q einen positiven realen Theil besitzen. Unter dieser Voraussetzung lässt sich nämlich das Integral über die Doppelschleife (0, 1)

$$\int_{(0,1)} t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt$$

als ein Aggregat von geradlinigen, zwischen den Punkten 0 und 1 erstreckten Integralen darstellen, wenn wir uns den Punkt τ, von welchem aus die um die Punkte 0, 1 herum zu legenden Schleifen ausgehen, auf der realen Axe der t-Ebene zwischen 0 und 1 angenommen und die Schleifenwege selbst längs der realen Axe verlaufend denken. Es ist dann offenbar

$$\int_{(0,1)} t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt = \int_1^0 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt + e^{2\pi i p} \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt$$
$$+ e^{2\pi i(p+q)} \int_1^0 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt + e^{2\pi i q} \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt,$$

d. h. also, wenn wir zusammenziehen und voraussetzen, dass in dem ersten Integrale auf der rechten Seite der Integrand real positiv angenommen werde,

$$(11) \qquad \int_{(0,1)} t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt = -(1 - e^{2\pi i p})(1 - e^{2\pi i q})\, \mathrm{B}(p, q).$$

Diese Gleichung kann dann als Definition der Function $\mathrm{B}(p, q)$ für willkürliche Werthenpaare p, q angesehen werden.

Das Integral (10) erhält also den Werth

$$(1-\varepsilon_{\varkappa\alpha})(\varepsilon-1)\mathrm{B}(\sigma_{\varkappa\alpha}+\nu+1,\xi),$$

und wir finden demnach mit Rücksicht auf die Gleichungen (8) und (9) für $u_{\varkappa\alpha}$ die Entwickelung

$$(12)\qquad u_{\varkappa\alpha}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\delta_\nu(1-\varepsilon_{\varkappa\alpha})(\varepsilon-1)\mathrm{B}(\sigma_{\varkappa\alpha}+\nu+1,\xi)(z-a_\varkappa)^{\sigma_{\varkappa\alpha}+\xi+\nu}.$$

Hieraus folgt, dass $u_{\varkappa\alpha}$ zum Exponenten $\sigma_{\varkappa\alpha}+\xi$ gehört; die zum Punkte $z=a_\varkappa$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (E) besitzt demnach die Wurzeln

$$(13)\qquad \sigma_{\varkappa\alpha}+\xi \qquad (\alpha=1,2,\cdots\alpha_\varkappa)$$

Ferner muss diese Gleichung durch die ganzen Zahlen

$$0,\ 1,\ \cdots m-\alpha_\varkappa-1$$

befriedigt werden, da der Coefficient der m^{ten} Ableitung in (E) den linearen Factor $z-a_\varkappa$ nur zur $\alpha_\varkappa^{\text{ten}}$ Potenz enthält; es sind also auf diese Weise die sämmtlichen Lösungen der determinirenden Fundamentalgleichungen von (E), soweit dieselben sich auf die im Endlichen gelegenen singulären Punkte beziehen, bekannt.

Wir bezeichnen mit

$$u_{\varkappa,\alpha_\varkappa+1},\ \cdots u_{\varkappa m}$$

die zu den Exponenten $0, 1, \cdots m-\alpha_\varkappa-1$ gehörigen Elemente des dem Punkte $z=a_\varkappa$ entsprechenden canonischen Fundamentalsystems, und es möge

$$(14)\qquad u_{\varkappa\alpha}=\sum_{\lambda=1}^{m}\gamma_{\alpha\lambda}^{(\varkappa h)}u_{h\lambda}\qquad (\alpha=1,2,\cdots m,\ \varkappa\neq h)$$

die Uebergangssubstitution darstellen, welche einem zwischen den singulären Punkten $a_\varkappa$, a_h ganz innerhalb der durch die Querschnitte $l_1, l_2, \cdots l_\sigma$ zerschnittenen z-Ebene verlaufenden Wege entspricht. Dann ist

$$\Theta_h u_{h\alpha}=\varepsilon\varepsilon_{h\alpha}u_{h\alpha}\qquad (\alpha=1,2,\cdots\alpha_h),$$

$$\Theta_h u_{h\beta}=u_{h\beta}\qquad (\beta=\alpha_h+1,\cdots m),$$

also haben wir

$$(15)\qquad u_{\varkappa\alpha}-\Theta_h u_{\varkappa\alpha}=\sum_{\lambda=1}^{\alpha_h}\gamma_{\alpha\lambda}^{(\varkappa h)}(1-\varepsilon\varepsilon_{h\lambda})u_{h\lambda}\qquad (\varkappa\neq h)$$

Vergleichen wir diese Gleichungen für $\alpha=1,2,\cdots\alpha_\varkappa$ mit den aus den Umlaufssubstitutionen (α), (β) der Nr. 237 (S. 434, 435) sich ergebenden Formeln.

Um die Vorstellung zu fixiren, wollen wir annehmen, der Punkt z befinde sich bei der durch die Fig. 11 (S. 429) dargestellten Lage ausserhalb des durch l_1, s_1, s_σ, l_σ begrenzten Ebenentheiles, so dass also $i = \sigma$ zu nehmen ist. Dann ist zufolge der Formeln (α)

$$
(16)\quad \begin{cases}
\Theta_h u_{h\alpha} = \varepsilon\varepsilon_{h\alpha} u_{h\alpha} & (\alpha = 1, 2, \cdots \alpha_h), \\
\Theta_h u_{\varkappa\alpha} = u_{\varkappa\alpha} - (1 - \varepsilon_{\varkappa\alpha}) \sum_{\lambda=1}^{\alpha_h} c_{\alpha\lambda}^{(\varkappa h)} u_{h\lambda} & (\varkappa = h+1, \cdots \sigma,\ \alpha = 1, 2, \cdots \alpha_\varkappa), \\
\Theta_h u_{\varkappa\alpha} = u_{\varkappa\alpha} - \varepsilon(1 - \varepsilon_{\varkappa\alpha}) \sum_{\lambda=1}^{\alpha_h} c_{\alpha\lambda}^{(\varkappa h)} u_{h\lambda} & (\varkappa = 1, 2, \cdots h-1,\ \alpha = 1, 2, \cdots \alpha_\varkappa)
\end{cases}
$$

und folglich

$$
(17)\quad \begin{cases}
u_{\varkappa\alpha} - \Theta_h u_{\varkappa\alpha} = (1 - \varepsilon_{\varkappa\alpha}) \sum_{\lambda=1}^{\alpha_h} c_{\alpha\lambda}^{(\varkappa h)} u_{h\lambda} & (\varkappa > h), \\
u_{\varkappa\alpha} - \Theta_h u_{\varkappa\alpha} = \varepsilon(1 - \varepsilon_{\varkappa\alpha}) \sum_{\lambda=1}^{\alpha_h} c_{\alpha\lambda}^{(\varkappa h)} u_{h\lambda} & (\varkappa < h)
\end{cases}
$$

Wir finden also durch Vergleichung mit (15), wenn wir beachten, dass die

$$u_{h\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots \alpha_h)$$

linear unabhängig sind,

$$
(18)\quad \begin{cases}
(1 - \varepsilon_{\varkappa\alpha}) c_{\alpha\lambda}^{(\varkappa h)} = (1 - \varepsilon\varepsilon_{h\lambda}) \gamma_{\alpha\lambda}^{(\varkappa h)} & (\varkappa > h), \\
\varepsilon(1 - \varepsilon_{\varkappa\alpha}) c_{\alpha\lambda}^{(\varkappa h)} = (1 - \varepsilon\varepsilon_{h\lambda}) \gamma_{\alpha\lambda}^{(\varkappa h)} & (\varkappa < h) \\
(\alpha = 1, 2, \cdots \alpha_\varkappa,\ \lambda = 1, 2, \cdots \alpha_h)
\end{cases}
$$

Aus diesen Formeln lassen sich diejenigen Coefficienten der Uebergangssubstitution (14) berechnen, für welche

$$\alpha = 1, 2, \cdots \alpha_\varkappa; \quad \lambda = 1, 2, \cdots \alpha_h$$

ist; die Anzahl derselben ist also $\alpha_h \alpha_\varkappa$.

Betrachtet man die zur Substitution (14) inverse

$$u_{h\lambda} = \sum_{\alpha=1}^{m} \gamma_{\lambda\alpha}^{(h\varkappa)} u_{\varkappa\alpha} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots m),$$

so ergiebt sich genau ebenso

$$
(19)\quad \begin{cases}
(1 - \varepsilon_{h\lambda}) c_{\lambda\alpha}^{(h\varkappa)} = (1 - \varepsilon\varepsilon_{\varkappa\alpha}) \gamma_{\lambda\alpha}^{(h\varkappa)} & (h > \varkappa), \\
\varepsilon(1 - \varepsilon_{h\lambda}) c_{\lambda\alpha}^{(h\varkappa)} = (1 - \varepsilon\varepsilon_{\varkappa\alpha}) \gamma_{\lambda\alpha}^{(h\varkappa)} & (h < \varkappa) \\
(\lambda = 1, 2, \cdots \alpha_h;\ \alpha = 1, 2, \cdots \alpha_\varkappa),
\end{cases}
$$

beachtet man dann, dass ebenso wie die Systeme

$$\left(\gamma_{\alpha\lambda}^{(\varkappa h)}\right), \quad \left(\gamma_{\lambda\alpha}^{(h\varkappa)}\right) \qquad (\alpha, \lambda = 1, 2, \cdots m)$$

auch die Systeme

$$\left(c_{\alpha\lambda}^{(\varkappa h)}\right), \quad \left(c_{\lambda\alpha}^{(h\varkappa)}\right) \qquad (\alpha, \lambda = 1, 2, \quad m)$$

zu einander inverse Substitutionen darstellen, so erkennt man, dass die Gleichungssysteme (18), (19) eigenthümliche Relationen zwischen den Coefficienten der Uebergangssubstitutionen liefern. Wir werden auf diese Relationen in einem sogleich näher zu bezeichnenden speciellen Falle zurückzukommen haben.

243 Die Tissot-Pochhammer'sche Differentialgleichung. Substitutionen, die Umläufen um die singulären Punkte entsprechen. Differentialgleichungen, die zur selben Classe gehören. Die Fundamentalsubstitutionen sind von den singulären Punkten unabhängig.

Der besondere Fall, auf dessen genauere Discussion wir jetzt eingehen wollen, steht zu den hier durchgeführten allgemeinen Betrachtungen in einer ähnlichen Beziehung, wie die in der Nr. 114 (Bd. I, S. 409 ff.) behandelte Laplace'sche Differentialgleichung zu der allgemeinen Theorie der Laplace'schen Transformirten.

Wir nehmen nämlich die Ordnung n der Differentialgleichung (1) (Nr. 241, S. 448) gleich Eins, dann muss, damit diese Gleichung

$$\text{(I)} \qquad p_1(x)\frac{d\mathfrak{y}}{dx} + p_0(x)\mathfrak{y} = 0$$

der Fuchs'schen Classe angehört, die ganze Function $p_1(x)$ lauter einfache lineare Factoren enthalten Wir haben also

$$\sigma = m, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \quad \cdot = \alpha_m = 1$$

und folglich

$$\text{(1)} \qquad P_m(x) = p_1(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_m).$$

Die ganze Function

$$P_{m-1}(x) = p_0(x)$$

ist vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade; sei in Partialbrüche zerlegt

$$\text{(2)} \qquad \frac{P_{m-1}(x)}{P_m(x)} = \sum_{\varkappa=1}^{m} \frac{\beta_\varkappa}{x - a_\varkappa},$$

dann lautet die allgemeine Lösung der zu (I) adjungirten Differentialgleichung

$$\text{(I')} \qquad -\frac{d}{dx}(P_m w) + P_{m-1} w = 0,$$

wenn wir von einer multiplicativen willkürlichen Constanten absehen,

$$\text{(3)} \quad w_{i1} = (x - a_1)^{\beta_1 - 1}(x - a_2)^{\beta_2 - 1} \cdot\cdot (x - a_m)^{\beta_m - 1} = w_1 \quad (i = 1, 2, \quad m),$$

und es ist folglich

$$(4) \qquad \sigma_{\iota 1} = \beta_\iota - 1, \quad \varepsilon_{\iota 1} = \varepsilon_\iota = e^{2\pi\beta_i\sqrt{-1}}.$$

Die Coefficienten der Differentialgleichung (E), deren Euler'sche Transformirte durch (I′) dargestellt wird, ergeben sich aus den Formeln (γ) der Nr 238 (S 440) nach leichten Umformungen in der Gestalt

$$(5) \qquad Q_\nu(z) = \frac{(-1)^{m-\nu-1}}{(\xi-1)\cdot\ (\xi-m+1)}$$
$$\cdot\left\{(\xi-\nu-1)_{m-\nu} P_m^{(m-\nu)}(z) + (\xi-\nu-1)_{m-\nu-1} P_{m-1}^{(m-\nu-1)}(z)\right\};$$

wir nennen die Differentialgleichung (E), deren Coefficienten durch diese Ausdrücke gegeben werden, die Tissot-Pochhammer'sche Differentialgleichung, weil sie zuerst von Herrn Pochhammer aufgestellt worden ist, nachdem Tissot bereits früher eine Differentialgleichung von ähnlicher Gestalt untersucht hatte.

Auf Grund der vorhergehenden allgemeinen Betrachtungen können wir die Integration der Tissot-Pochhammer'schen Differentialgleichung als vollzogen ansehen; wir stellen zunächst die Resultate für dieselbe zusammen.

Jeder der im Endlichen gelegenen singulären Punkte $a_1, a_2, \cdots a_m$ von (E) ist ein einfacher singulärer Punkt im Sinne der Nr. 112 (Bd. I, S. 401); die zu $z = a_\varkappa$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung hat die Wurzeln

$$\beta_\varkappa + \xi - 1,\ 0,\ 1,\ \cdots\ m-2.$$

Wir setzen der Einfachheit wegen voraus, dass weder die $\beta_\varkappa$ noch ξ ganze Zahlen sind. Dann ist

$$u_{\varkappa 1} = u_\varkappa = \int\limits_{(s_\varkappa s_0 s_\varkappa^{-1} s_0^{-1})} w_1 (z-x)^{\xi-1}\,dx$$

das zum Exponenten $\beta_\varkappa + \xi - 1$ gehörige Element des zu $z = a_\varkappa$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems, und die

$$u_1,\ u_2,\ \cdots\ u_m$$

constituiren ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung (E).

Wenn wir die Fundamentalsubstitutionen der Integrale

$$u_1,\ u_2,\ \cdots\ u_m$$

aufstellen wollen, so müssen wir die Uebergangssubstitutionen von (I′) kennen. Diese sind aber in unserem Falle die denkbar einfachsten; wir haben nämlich

$$c_{11}^{(\varkappa h)} = c_{11}^{(h\varkappa)} = 1 \qquad (h, \varkappa = 1, 2, \cdots m,\ h \neq \varkappa)$$

Demnach lautet zufolge der Gleichungen (16) der Nr. 242 (S. 454) die dem Umlaufe um a_h entsprechende Substitution

$$(6)\qquad \begin{cases} \Theta_h u_h = \varepsilon\varepsilon_h u_h, \\ \Theta_h u_\varkappa = u_\varkappa - (1-\varepsilon_\varkappa) u_h & (\varkappa = h+1, \quad m), \\ \Theta_h u_\varkappa = u_\varkappa - \varepsilon(1-\varepsilon_\varkappa) u_h & (\varkappa = 1, 2, \quad h-1) \end{cases}$$

Bezeichnet wie im allgemeinen Falle

$$\left(\gamma_{\alpha\lambda}^{(\varkappa h)}\right)$$

die zwischen den singulären Punkten $a_\varkappa$ und a_h vermittelnde Uebergangssubstitution von (E), so ist zufolge der Gleichungen (18), (19) der Nr 242 (S 454)

$$(7)\qquad \gamma_{11}^{(\varkappa h)}\gamma_{11}^{(h\varkappa)} = \frac{\varepsilon(1-\varepsilon_\varkappa)(1-\varepsilon_h)}{(1-\varepsilon\varepsilon_\varkappa)(1-\varepsilon\varepsilon_h)} \qquad (\varkappa \neq h),$$

dies sind in unserem besonderen Falle die a. a. O. erwähnten Relationen.

Aus den allgemeinen Erörterungen der Nr 239 (S 442 ff.) folgt ebenso wie aus dem blossen Anblicke der Umlaufssubstitutionen (6), dass wir Differentialgleichungen (E) erhalten, die zu einer und derselben Classe gehören, wenn wir die

$$\beta_1, \ \beta_2, \cdots \beta_m, \ \xi$$

um ganze Zahlen vermehren oder vermindern. Multipliciren wir ferner w_1 mit einer willkürlichen (von z unabhängigen) ganzen rationalen Function $g_0(x)$, so genügen die

$$\int\limits_{(s_\varkappa s_0 s_\varkappa^{-1} s_0^{-1})} g_0(x) w_1 (z-x)^{\xi-1} dx \qquad (\varkappa = 1, 2, \quad m)$$

ebenfalls einer Differentialgleichung m^{ter} Ordnung, die mit der zu w_1 gehörigen Differentialgleichung (E) zur selben Classe gehört.

Mit anderen Worten: Bedeutet $r(x)$ irgend eine rationale Function, die, abgesehen von einer ganzzahligen Potenz von $z-x$ als Factor, von z unabhängig ist und nur für Punkte aus der Reihe $a_1, a_2, \cdot \quad a_m, z, \infty$ unendlich wird, so befriedigen die Ausdrücke

$$\mathfrak{u}_\varkappa = \int\limits_{(s_\varkappa s_0 s_\varkappa^{-1} s_0^{-1})} r(x) w_1 (z-x)^{\xi-1} dx \qquad (\varkappa = 1, 2, \quad m)$$

eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung, die mit der Differentialgleichung (E), deren Lösungen die $u_1, u_2, \cdots u_m$ sind, zur selben Classe gehört

Bedeutet $r(x)$ eine beliebige rationale Function, die, abgesehen von einer ganzzahligen Potenz von $(z-x)$ als Factor von z unabhängig ist und noch in den von $a_1, a_2, \cdots a_m, z, \infty$ verschiedenen Punkten $b_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots \tau)$ unendlich wird, so ist die entsprechende Tissot-Pochhammer'sche Differentialgleichung von höherer als der m^{ten} Ordnung aber reductibel, denn sie besitzt neben den $u_1, \cdots u_m$ noch die Integrale zu Lösungen, welche über einfache die $b_\varkappa$ umschliessende Schleifen erstreckt, also in der Form

$$(z-b_\varkappa)^{\xi-\gamma_\varkappa} g_\varkappa(z) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \tau),$$

wo die $\gamma_\varkappa$ ganze positive Zahlen, die $g_\varkappa(z)$ ganze rationale Functionen bedeuten, darstellbar sind.

Die Gleichungen (6) lehren ferner, dass das Fundamentalsystem $u_1, u_2, \cdots u_m$ der Differentialgleichung (E) so beschaffen ist, dass seine Fundamentalsubstitutionen von den in den Coefficienten von (E) auftretenden Parametern $a_1, a_2, \cdots a_m$ unabhängig sind. Nach den Fuchs-schen Sätzen der Nr 228 (S 397) müssen sich folglich die Ableitungen der $u_1, u_2, \cdots u_m$ nach irgend einem der $a_\varkappa$ in der Form

$$\frac{\partial u_i}{\partial a_\varkappa} = \overset{(\varkappa)}{R}_0 u_i + \overset{(\varkappa)}{R}_1 \frac{du_i}{dz} + \cdots + \overset{(\varkappa)}{R}_{m-1} \frac{d^{m-1} u_i}{dz^{m-1}} \qquad (i = 1, 2, \cdots m)$$

darstellen lassen, wo die $\overset{(\varkappa)}{R}_0, \overset{(\varkappa)}{R}_1, \cdots \overset{(\varkappa)}{R}_{m-1}$ rationale Functionen von z bedeuten. Dies lässt sich nach den oben gemachten Bemerkungen sofort bestätigen, wenn man bedenkt, dass

$$(8) \qquad \frac{\partial}{\partial a_\varkappa} \int\limits_{(\mathsf{A})} \prod_{\lambda=1}^{m} (x-a_\lambda)^{\beta_\lambda - 1} (z-x)^{\xi-1} dx$$
$$= (1-\beta_\varkappa) \int\limits_{(\mathsf{A})} \prod_{\lambda=1}^{m} (x-a_\lambda)^{\bar\beta_\lambda - 1} (z-x)^{\xi-1} dx$$

ist, wo (A) irgend eine der Doppelschleifen

$$s_i s_0 s_i^{-1} s_0^{-1} = (a_i, z)$$

bedeutet und

$$\bar\beta_\lambda = \beta_\lambda \quad \text{für} \quad \lambda \neq \varkappa, \quad \bar\beta_\varkappa = \beta_\varkappa - 1$$

gesetzt wurde. Aus (8) folgt nämlich, dass die

$$\frac{\partial u_i}{\partial a_\varkappa} \qquad (i = 1, 2, \cdots m)$$

eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung befriedigen, die mit (E) zur

selben Classe gehört. Wir werden aus dieser Eigenschaft von (E) in einem wichtigen Specialfalle, der uns sehr bald beschäftigen wird, weitere Folgerungen zu ziehen haben.

244. Besondere Fälle der Tissot-Pochhammer'schen Differentialgleichung. Gauss'sche Differentialgleichung. Darstellung ihrer Lösungen durch bestimmte Integrale. Beziehungen zu der Darstellung durch Gauss'sche Reihen.

Wenn die Grössen

$$\beta_1, \; \beta_2, \cdot\cdot \; \beta_m, \; \xi$$

positive reale Theile haben, so ist

$$\int w_1 (z - x)^{\xi - 1} dx$$

in den Punkten $a_1, a_2, \cdot \cdot a_m, z$ endlich. Wir können dann die über die Doppelschleifen erstreckten Integrale durch andere Integrale darstellen, die zwischen den Punkten $a_\varkappa$ und z auf directem Wege erstreckt sind; wir verstehen dabei unter einem „directen Wege" einen Weg, der in der durch die Querschnitte

$$l_0, \; l_1, \; \cdot\cdot \; l_m$$

zerschnittenen x-Ebene verläuft. Es ist nämlich

$$\int\limits_{(a_\iota,\, z)} w_1(z-x)^{\xi-1} dx = \int\limits_z^{a_\iota} w_1(z-x)^{\xi-1} dx + \varepsilon_\iota \int\limits_{a_\iota}^{z} w_1(z-x)^{\xi-1} dx$$

$$+ \varepsilon\varepsilon_\iota \int\limits_z^{a_\iota} w_1(z-x)^{\xi-1} dx + \varepsilon \int\limits_{a_\iota}^{z} w_1(z-x)^{\xi-1} dx,$$

also haben wir

$$(9) \qquad \int\limits_{(a_\iota,\, z)} w_1(z-x)^{\xi-1} dx = (1-\varepsilon)(1-\varepsilon_\iota) \int\limits_z^{a_\iota} w_1(z-x)^{\xi-1} dx.$$

Diese Umformung ist derjenigen ganz analog, die wir in der Nr. 242 (S. 452) für das Euler'sche Integral erster Gattung ausgeführt haben; in der That geht ja auch das Euler'sche Integral erster Gattung aus unserem allgemeinen Integrale

$$\int\limits_{(a_\iota,\, z)} w_1(z-x)^{\xi-1} dx$$

hervor, wenn wir $m = 1$, $a_1 = 0$ und $z = 1$ wählen.

Wir können also, wenn die realen Theile der $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_m, \xi$ positiv sind, die m directen Integrale

(10) $$\int_z^{a_\varkappa} w_1 (z - x)^{\xi - 1} dx = [z, a_\varkappa] \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots m)$$

als ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (E) ansehen. Die diesem Fundamentalsysteme entsprechenden Fundamentalsubstitutionen lauten dann

(11) $$\begin{cases} \Theta_h [z, a_h] = \varepsilon \varepsilon_h [z, a_h], \\ \Theta_h [z, a_\varkappa] = [z, a_\varkappa] - (1 - \varepsilon_h)[z, a_h] & (\varkappa > h), \\ \Theta_h [z, a_\varkappa] = [z, a_\varkappa] - \varepsilon(1 - \varepsilon_h)[z, a_h] & (\varkappa < h) \end{cases}$$

Es mögen nun einige besonders wichtige Specialfälle der Tissot-Pochhammer'schen Differentialgleichung genauer betrachtet werden.

Der Fall $m = 1$ bietet kein weiteres Interesse dar; dagegen führt der Fall $m = 2$ auf eine uns wohlbekannte Gleichung, nämlich auf die Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe.

Setzen wir nämlich für $m = 2$

(12) $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ \alpha = 1 - \xi,\ \beta = 2 - \xi - \beta_1 - \beta_2,\ \gamma = 2 - \xi - \beta_1,$

so liefern die Formeln (5) (S. 456) nach Unterdrückung des constanten Factors $(\xi - 1)^{-1}$,

(13) $$Q_2 = z(1 - z), \quad Q_1 = \gamma - (\alpha + \beta + 1)z, \quad Q_0 = -\alpha\beta,$$

so dass sich also in der That die Differentialgleichung (G) der Nr. 70 (Bd I, S. 252) ergiebt; nur haben wir hier z als unabhängige und u als abhängige Variable.

Wir gewinnen hierdurch sofort ein für die Theorie der Differentialgleichung (G) bedeutsames Resultat. Es stellen nämlich die beiden bestimmten Integrale

$$u_1 = \int_{(0, z)} x^{\alpha - \gamma}(x - 1)^{\gamma - \beta - 1}(z - x)^{-\alpha} dx,$$
$$u_2 = \int_{(1, z)} x^{\alpha - \gamma}(x - 1)^{\gamma - \beta - 1}(z - x)^{-\alpha} dx$$

ein Fundamentalsystem von

(G) $$z(1 - z)\frac{d^2 u}{dz^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]\frac{du}{dz} - \alpha\beta u = 0$$

dar.

Wenn die realen Theile von $\alpha - \gamma + 1$ und $1 - \alpha$ positiv sind, so ist

(14) $$u_1 = (1-\varepsilon)(1-\varepsilon_1)\int_z^0 x^{\alpha-\gamma}(x-1)^{\gamma-\beta-1}(x-z)^{-\alpha}dx,$$

und wenn die realen Theile von $\gamma-\beta$ und $1-\alpha$ positiv sind, so haben wir

(15) $$u_2 = (1-\varepsilon)(1-\varepsilon_2)\int_z^1 x^{\alpha-\gamma}(x-1)^{\gamma-\beta-1}(z-x)^{-\alpha}dx,$$

dabei ist jetzt

$$\varepsilon = e^{-2\pi\alpha\sqrt{-1}}, \quad \varepsilon_1 = e^{2\pi(\alpha-\gamma)\sqrt{-1}}, \quad \varepsilon_2 = e^{2\pi(\gamma-\beta)\sqrt{-1}}.$$

Machen wir in diesen directen Integralen noch die Substitution

(16) $$x = \frac{1}{t},$$

so erhalten wir dieselben in der gewöhnlichen Form

$$\int_z^0 x^{\alpha-\gamma}(x-1)^{\gamma-\beta-1}(z-x)^{-\alpha}dx = \int_\infty^{\frac{1}{z}} t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(zt-1)^{-\alpha}dt,$$

$$\int_z^1 x^{\alpha-\gamma}(x-1)^{\gamma-\beta-1}(z-x)^{-\alpha}dx = \int_1^{\frac{1}{z}} t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(zt-1)^{-\alpha}dt,$$

wie sie im Wesentlichen schon von Euler aufgestellt worden sind.

Da das Integral u_1 in der Umgebung von $z=0$ zum Exponenten

$$\beta_1 + \xi - 1 = 1 - \gamma$$

und das Integral u_2 in der Umgebung von $z=1$ zum Exponenten

$$\beta_2 + \xi - 1 = \gamma - \beta - \alpha$$

gehört, so schliessen wir, dass u_1 mit dem zum Exponenten $1-\gamma$ gehörigen Elemente (Nr. 71, Bd. I, S. 255, Gleich. (19))

$$u_{02} = z^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, z),$$

des canonischen Fundamentalsystems für $z=0$ und u_2 mit dem zum Exponenten $\gamma-\alpha-\beta$ gehörigen Elemente (Nr. 72, Bd. I, S 259)

$$u_{12} = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\beta, \gamma-\alpha, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-z)$$

des canonischen Fundamentalsystems für $z=1$, abgesehen von je einem constanten Factor, übereinstimmen muss, vorausgesetzt natürlich, dass die Reihen, welche die Integrale u_{02}, u_{12} in der Umgebung von $z=0$ beziehungsweise $z=1$ darstellen, einen Sinn haben. Um diese constanten Factoren zu bestimmen, bilden wir nach Nr 242 (S. 453)

die Reihenentwickelungen von u_1 beziehungsweise u_2 in der Umgebung von $z = 0$ beziehungsweise $z = 1$.

Es ist in der Umgebung von $x = 0$

$$x^{\alpha-\gamma}(x-1)^{\gamma-\beta-1} = (-1)^{\gamma-\beta-1}x^{\alpha-\gamma}(1-(\gamma-\beta-1)x+\cdots),$$

also haben wir nach Gleichung (12) der Nr. 242 (S. 453)

$$u_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\gamma-\beta+\nu-1}(\gamma-\beta-1)_\nu(1-\varepsilon_1)(\varepsilon-1)$$
$$\mathrm{B}(\alpha-\gamma+\nu+1, 1-\alpha)z^{1-\gamma+\nu},$$

und da nach einer bekannten Formel

$$(17)\qquad \mathrm{B}(p+\nu, q) = \frac{p(p+1)\cdots(p+\nu-1)}{(p+q)(p+q+1)\cdots(p+q+\nu-1)}\mathrm{B}(p, q)$$

ist, so folgt mit Rücksicht auf die Definition von $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ (Nr. 71, Bd. I, S. 254),

$$u_1 = (-1)^{\gamma-\beta-1}(1-\varepsilon_1)(\varepsilon-1)\mathrm{B}(\alpha-\gamma+1, 1-\alpha)$$
$$\cdot F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, z)z^{1-\gamma},$$

d. h. es ist

$$(18)\qquad u_1 = (-1)^{\gamma-\beta-1}(1-\varepsilon_1)(\varepsilon-1)\mathrm{B}(\alpha-\gamma+1, 1-\alpha)u_{02}.$$

Analog ergiebt sich

$$(19)\qquad u_2 = (1-\varepsilon_2)(\varepsilon-1)\mathrm{B}(\gamma-\beta, 1-\alpha)u_{12}.$$

245. **Euler's Darstellung der Gauss'schen Reihe durch ein bestimmtes Integral. Uebergangssubstitutionen für die Gauss'sche Differentialgleichung; Relationen zwischen den Coefficienten dieser Substitutionen.**

Aus den Integralen u_1, u_2 lassen sich andere Integrale zusammensetzen, welche die übrigen der in der Nr. 74 (Bd I, S. 265 ff.) angegebenen vierundzwanzig Lösungen der Differentialgleichung (G) darstellen. Wir wollen des historischen Interesses wegen dasjenige bestimmte Integral aufzufinden suchen, welches die in der Umgebung von $z = 0$ durch die Gauss'sche Reihe

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z)$$

dargestellte Lösung liefert.

Die Lage der Punkte

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = \infty, \; z$$

in der x-Ebene werde durch die Fig. 15 veranschaulicht; dann lauten

die Fundamentalsubstitutionen, welche das Integralsystem u_1, u_2 erfährt, wenn z die Querschnitte l_1, l_2 je einmal in positivem Sinne überschreitet,

(20) $\begin{cases} \Theta_1 u_1 = \varepsilon\varepsilon_1 u_1, \\ \Theta_1 u_2 = u_2 - (1-\varepsilon_2)u_1; \end{cases}$

(21) $\begin{cases} \Theta_2 u_1 = u_1 - \varepsilon(1-\varepsilon_1)u_2, \\ \Theta_2 u_2 = \varepsilon\varepsilon_2 u_2. \end{cases}$

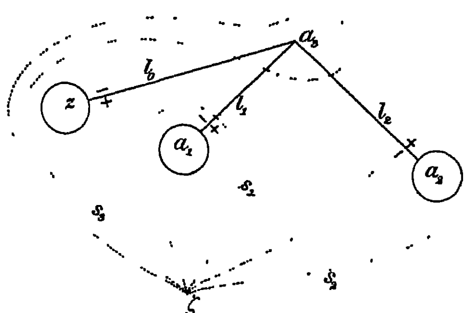


Fig 15

Es handelt sich um die Aufstellung eines Integrals

$$\bar{u} = c_1 u_1 + c_2 u_2,$$

für welches, wie für

$$u_{01} = F(\alpha, \beta, \gamma, z),$$

die Gleichung

$$\Theta_1 \bar{u} = \bar{u}$$

besteht. Es muss also nach (20)

$$c_1 \varepsilon\varepsilon_1 u_1 + c_2 u_2 - c_2(1-\varepsilon_2)u_1 = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

sein, und hieraus folgt, da u_1, u_2 ein Fundamentalsystem constituiren,

$$c_1 : c_2 = \varepsilon_2 - 1 : 1 - \varepsilon\varepsilon_1,$$

d. h. wenn wir durch c eine willkürliche Constante bezeichnen,

(21a) $$\bar{u} = c((\varepsilon_2 - 1)u_1 + (1 - \varepsilon\varepsilon_1)u_2).$$

Um diese Lösung in der Form eines bestimmten Integrals zu erhalten, müssen wir ausser den von einem Punkte ζ um a_1, a_2 herum gelegten Schleifen s_1, s_2 noch die von ζ aus um $a_3 = \infty$ herum gelegte Schleife s_3 betrachten (in der Figur punktirt). Es ist dann

(22) $$\int_{(s_3)} w_1(z-x)^{\xi-1}dx = \int_{(s_3)} W dx$$
$$= -\left\{\varepsilon^{-1}\int_{(s_0)} W dx + \varepsilon^{-1}\varepsilon_1^{-1}\int_{(s_1)} W dx + \varepsilon^{-1}\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{-1}\int_{(s_2)} W dx\right\},$$

wenn wir setzen

(23) $$W = w_1(z-x)^{\xi-1} = x^{\alpha-\gamma}(x-1)^{\gamma-\beta-1}(z-x)^{-\alpha}.$$

Ferner ist das über die Doppelschleife

$$s_3 s_2 s_3^{-1} s_2^{-1},$$

die in unserem Falle, wo die Fundamentalsubstitutionen von w_1 mit einander vertauschbar sind (vergl. Nr. 233, S 418), einen brauchbaren Integrationsweg darstellt, erstreckte Integral

(24) $$\int\limits_{(s_3 s_2 s_3^{-1} s_2^{-1})} W dx = (1 - \varepsilon_2)\int\limits_{(s_3)} W dx - (1 - \varepsilon^{-1}\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{-1})\int\limits_{(s_2)} W dx,$$

denn wir haben offenbar für einen Umlauf um $a_3 = \infty$

$$\Theta_3 W = \varepsilon^{-1}\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{-1} W.$$

Setzt man in (24) für das über s_3 erstreckte Integral seinen Wert aus (22) ein, so folgt nach einfacher Reduction mit Rücksicht auf d Definition von u_1, u_2

$$\int\limits_{(s_3 s_2 s_3^{-1} s_2^{-1})} W dx = \frac{1}{(1-\varepsilon)\varepsilon\varepsilon_1}\left((1 - \varepsilon\varepsilon_1)u_2 - (1 - \varepsilon_2)u_1\right),$$

wir können folglich nach (21a)

(25) $$\int\limits_{(s_3 s_2 s_3^{-1} s_2^{-1})} W dx = \bar{u}$$

setzen. Unter der Voraussetzung, dass die realen Theile der Gröss β und $\gamma - \beta$ positiv sind, besitzt das Integral

$$\int W dx$$

in den Punkten $x = \infty$ und $x = 1$ endliche Werthe; es ist also diesem Falle

$$\bar{u} = (1 - \varepsilon^{-1}\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{-1})(\varepsilon_2 - 1)\int\limits_{\infty}^{1} W dx,$$

und wenn wir wieder durch die Gleichung (16) eine neue Integratio variable einführen,

(26) $$\bar{u} = (1 - \varepsilon^{-1}\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{-1})(\varepsilon_2 - 1)\int\limits_{0}^{1} t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(zt-1)^{-\alpha}($$

Dieses Integral kann sich von u_{01} nur durch einen constanten Fact unterscheiden; um diesen zu bestimmen, bilden wir den Werth von für $z = 0$. Es ist

$$(\bar{u})_{z=0} = (1 - \varepsilon^{-1}\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{-1})(\varepsilon_2 - 1)(-1)^{\alpha}\mathrm{B}(\beta, \gamma - \beta),$$

und da u_{01} für $z = 0$ den Werth 1 annimmt, haben wir folglich der Umgebung von $z = 0$

(27) $$\int\limits_{0}^{1} t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-zt)^{-\alpha}dt = \mathrm{B}(\beta, \gamma-\beta)F(\alpha, \beta, \gamma, z).$$

Diese Gleichung ist bereits von Euler (in den Institutiones calculi integralis) gegeben worden (vergl. Nr. 233, S. 415), und gewöhnlich wird auch das auf der linken Seite stehende bestimmte Integral zum Ausgangspunkte für die Integration der Differentialgleichung (G) durch Quadraturen gewählt. Auf die Darstellung der übrigen Lösungen von (G) durch bestimmte Integrale gehen wir nicht näher ein, sie kann auf ähnlichem Wege erhalten werden, wie die von u_{01}, u_{02}, u_{12}, die wir kennen gelernt haben.

Die Integrale u_1, u_2 und die durch die Formeln (20), (21) gegebenen Fundamentalsubstitutionen derselben haben unbeschränkte Gültigkeit auch in allen denjenigen Fällen, wo einzelne der Reihenentwickelungen der Nr. 74 versagen. Mit Hülfe derselben lassen sich die Uebergangssubstitutionen, die in der Nr. 129 (Bd. I) nur unter der Annahme, dass keine der Grössen

$$1-\gamma, \quad \gamma-\alpha-\beta, \quad \alpha-\beta$$

eine ganze Zahl sei, aufgestellt worden sind, auch in diesen Ausnahmefällen bestimmen. Um die Formeln der Nr 129 zu verificiren, hat man die Darstellung der Function $\mathrm{B}(p, q)$ durch das Euler'sche Integral zweiter Gattung

$$\Gamma(p) = \Pi(p-1)$$

zu berücksichtigen; es ist nämlich

$$\mathrm{B}(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{28}$$

Wir begnügen uns damit, auf die Bedeutung der Relation (7) (Nr. 243, S. 457) dadurch hinzuweisen, dass wir dieselbe mit Hülfe jener Formeln in dem Falle der Differentialgleichung (G) in expliciter Form aufschreiben.

Es kommen dabei die zwischen den Punkten $z=0$ und $z=1$ vermittelnden Uebergangssubstitutionen in Betracht, die in der Nr 129 (Bd. I, S. 481, Gleich (6), (7) und S 483) aufgestellt worden sind Es ist zufolge derselben

$$\begin{aligned} u_{12} &= f(1-\alpha, 1-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1)u_{02} + \mathfrak{P}_1(z-1), \\ u_{02} &= f(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma)u_{12} + \mathfrak{P}(z), \end{aligned}$$

wo $\mathfrak{P}_1(z-1)$, $\mathfrak{P}(z)$ in der Umgebung von $z=1$ beziehungsweise $z=0$ reguläre Functionen bedeuten. Also ist in der Bezeichnung der vorhergehenden Nummern

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma_{11}^{(12)} &= c f(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma), \\ \gamma_{11}^{(21)} &= \frac{1}{c} f(1-\alpha, 1-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1), \end{aligned} \right. \tag{29}$$

wo gemäss den Gleichungen (18), (19)

$$c = (-1)^{\gamma-\beta-1} \frac{(1-\varepsilon_2)\,\mathrm{B}(\gamma-\beta,\, 1-\alpha)}{(1-\varepsilon_1)\,\mathrm{B}(\alpha-\gamma+1,\, 1-\alpha)}$$

zu nehmen ist. Zufolge der Relation (7) (S. 457) muss sein

$$\gamma_{11}^{(12)}\gamma_{11}^{(21)} = \frac{\varepsilon(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)}{(1-\varepsilon\varepsilon_1)(1-\varepsilon\varepsilon_2)},$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$\varepsilon = e^{-2\pi\alpha\sqrt{-1}}, \quad \varepsilon_1 = e^{2\pi(\alpha-\gamma)\sqrt{-1}}, \quad \varepsilon_2 = e^{2\pi(\gamma-\beta)\sqrt{-1}}$$

ausgerechnet,

(30) $$\gamma_{11}^{(12)}\gamma_{11}^{(21)} = -\frac{\sin\pi(\gamma-\alpha)\ \sin\pi(\gamma-\beta)}{\sin\pi(1-\gamma)\ \sin\pi(\gamma-\alpha-\beta)}$$

Zufolge der Definitionsgleichung (Nr 129, Bd. I, S. 479)

$$f(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}$$

ist aber nach (29)

$$\gamma_{11}^{(12)}\gamma_{11}^{(21)} = \frac{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\gamma-1)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+1)\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\,\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\beta-\gamma+1)\,\Gamma(\gamma-\beta)},$$

und dies mit (30) verglichen führt auf die bekannte Relation

(31) $$\Gamma(1-p)\,\Gamma(p) = \frac{\pi}{\sin\pi p}.$$

Die Beziehungen (7) (S. 457) und allgemein die sich aus den Gleichungen (18), (19) der Nr. 242 (S. 454) ergebenden Relationen können also gleichsam als eine Verallgemeinerung der Relation (31) angesehen werden.

Viertes Kapitel.

246 **Fälle, wo die Euler'sche Transformirte der Tissot-Pochhammer'schen Differentialgleichung ein algebraisches Integral besitzt. Differentialgleichung für die Periodicitätsmoduln gewisser specieller und der allgemeinen Abel'schen Integrale.**

Schon Euler selbst, nach ihm besonders Pfaff und ebenso fast alle Analysten, die sich mit dem Studium der Differentialgleichung (G) und ihrer Lösungen beschäftigt haben, wandten der Frage ein besonderes Interesse zu, in welchen Fällen sich die Integrale von (G) auf „bekannte Functionen" reduciren lassen Seit der Zeit Euler's und Pfaff's hat sich der Kreis der als bekannt anzusehenden Functionen wesentlich erweitert, insbesondere sind wir, Dank der Arbeiten Abel's und seiner Nachfolger, in der Lage, die Integrale algebraischer Functionen in gewissem Sinne als bekannte Functionen ansehen zu dürfen. Nun soll es sich nicht etwa darum handeln, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen sich die Lösungen der Differentialgleichung (G) durch Abel'sche Integrale darstellen lassen, sondern vielmehr darum, einen anderen Zusammenhang zwischen der Theorie dieser Integrale und der Differentialgleichung (G), beziehungsweise der allgemeinen Tissot-Pochhammer'schen Differentialgleichung zu erörtern.

Die Form des Integrals w_1 der Euler'schen Transformirten der Tissot-Pochhammer'schen Differentialgleichung legt es nahe, diejenigen Fälle genauer zu betrachten, in welchen der Ausdruck

$$(1) \qquad \int w_1 (z-x)^{\xi-1} dx = \int (z-x)^{\xi-1} \prod_{\varkappa=1}^{m} (x-a_\varkappa)^{\beta_\varkappa - 1} dx$$

ein Abel'sches Integral wird. Dies ist offenbar stets der Fall, wenn die Grössen

$$\beta_1, \; \beta_2, \; \cdots \; \beta_m, \; \xi$$

reale rationale Zahlen sind, denn dann genügt

$$(2) \qquad W = (z-x)^{\xi-1} (x-a_1)^{\beta_1 - 1} \cdots (x-a_m)^{\beta_m - 1}$$

einer algebraischen Gleichung von der Form

30*

(3) $$W^n = R(x),$$

wo n das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner der Zahlen $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_m, \xi$ und $R(x)$ eine rationale Function von x bedeutet. Der Punkt z spielt die Rolle eines Verzweigungspunktes für die durch die Gleichung (3) definirte algebraische Function W von x, wenn wir wie immer voraussetzen, dass ξ keine ganze Zahl sei.

Wir können uns W in die Form gesetzt denken

$$W = \psi(x)(z-x)^{\frac{r_0}{n}}(x-a_1)^{\frac{r_1}{n}}(x-a_2)^{\frac{r_2}{n}} \cdot \quad (x-a_m)^{\frac{r_m}{n}},$$

wo $\psi(x)$ eine rationale Function von x und die

$$r_0, \; r_1, \; r_2, \; \cdot \; r_m$$

positive ganze Zahlen bedeuten, die kleiner sind als n. Sei

$$\frac{r_\nu}{n} = \frac{\bar{r}_\nu}{n_\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdot m),$$

wo die ganzen Zahlen $\bar{r}_\nu$ und n_ν keinen gemeinsamen Theiler besitzen, dann ist der Punkt z ein Verzweigungspunkt von der Ordnung

$$n\left(1 - \frac{1}{n_0}\right),$$

der Punkt $a_\varkappa$ ein solcher von der Ordnung

$$n\left(1 - \frac{1}{n_\varkappa}\right) \qquad (\varkappa = 1, 2, \quad m),$$

und der Punkt $x = \infty$ ein Verzweigungspunkt von der Ordnung

$$n\left(1 - \frac{1}{n_{m+1}}\right),$$

wenn n_{m+1} den Nenner des auf seine reducirte Form gebrachten echten Bruches

$$\sum_{\nu=0}^{m} \frac{r_\nu}{n} - \left[\sum_{\nu=0}^{m} \frac{r_\nu}{n}\right]$$

bedeutet, wo durch die eckige Klammer die grösste ganze Zahl angedeutet wird, die in der eingeklammerten Grösse enthalten ist. Die Gesammtzahl v der einfachen Verzweigungspunkte unserer algebraischen Function ist demnach

$$v = n \sum_{\nu=0}^{m+1} \left(1 - \frac{1}{n_\nu}\right);$$

die bekannte Riemann'sche Beziehung

$$v - 2n = 2p - 2$$

giebt also für den Rang p (das Geschlecht nach Clebsch) der algebraischen Gleichung (3) den schon von Abel aufgestellten Ausdruck

$$p = \frac{1}{2} n \sum_{\nu=0}^{m+1} \left(1 - \frac{1}{n_\nu}\right) - (n - 1). \tag{4}$$

Denken wir uns nun die n-blättrige Riemann'sche Fläche F construirt, in welcher W eine eindeutige Function des Ortes ist, so ist dieselbe $(2p + 1)$-fach zusammenhängend und kann durch ein System von $2p$ Querschnitten (vergl. z. B. Nr. 187, S. 213) in eine einfach zusammenhängende zerlegt werden. Die $2p$ über diese Querschnitte hin erstreckten Integrale

$$\int W dx$$

liefern dann die Periodicitätsmoduln des Abel'schen Integrals (1), und es ist leicht einzusehen, dass diese $2p$ bestimmten Integrale sich als lineare homogene Functionen der m über die Doppelschleifen

$$s_\varkappa s_0 s_\varkappa^{-1} s_0^{-1}$$

erstreckten Integrale

$$u_\varkappa = \int\limits_{(s_\varkappa s_0 s_\varkappa^{-1} s_0^{-1})} W dx$$

darstellen lassen mit Coefficienten, die rational mit ganzzahligen Coefficienten aus den Grössen

$$\varepsilon, \ \varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_m$$

zusammengesetzt sind. Die Doppelschleifen sind geschlossene Wege in der Riemann'schen Fläche F. Wir haben also den Satz:

Wenn das Integral der Euler'schen Transformirten der zu einem rationalen Werthe von ξ gehörigen Tissot-Pochhammer'schen Differentialgleichung (E) eine algebraische Function von x ist, so befriedigen die Periodicitätsmoduln des Abel'schen Integrals (1), als Functionen des Verzweigungspunktes z aufgefasst, die Differentialgleichung (E).

Aus dem Satze der Nr. 243 (S. 457) folgt ferner:

Bedeutet $r(x)$ irgend eine rationale Function von x, die, abgesehen von einer Potenz von $z - x$ als Factor, von z unabhängig ist und nur für Punkte aus der Reihe

$$a_1, \ a_2, \cdots a_m, \ z, \ \infty$$

unendlich wird, so befriedigen die Periodicitätsmoduln des Abel'schen Integrals

$$\int r(x)\, W\, dx$$

als Functionen von z eine Differentialgleichung, die mit (E) zur selben Classe gehört.

Wenn die rationalen Zahlen $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_m, \xi$ wesentlich positive Werthe haben, so können wir nach den Ergebnissen der Nr. 244 (S. 459 ff.) an Stelle der über die Doppelschleifen erstreckten Integrale $u_\varkappa$ die auf directem Wege genommenen Integrale

$$\int_z^{a_\nu} W\, dx = [z, a_\varkappa]$$

einführen. Aus diesen setzen sich dann die auf directem Wege zwischen irgend zweien der Verzweigungspunkte $a_1, a_2, \cdots a_m, z$ erstreckten Integrale zusammen; z. B. hat man

$$[a_\varkappa, a_{\varkappa+1}] = \int_{a_\varkappa}^{a_{\varkappa+1}} W\, dx = [z, a_\varkappa] - [z, a_{\varkappa+1}].$$

Die Fundamentalsubstitutionen, welche die Integrale $[z, a_\varkappa]$ erfahren, wenn z die Querschnitte $l_1, l_2, \cdot\, l_m$ überschreitet, werden durch die Formeln (11) der Nr. 244 (S. 460) gegeben. Dieselben sind zuerst von Herrn Broecker aufgestellt worden.

Die an der binomischen Gleichung (3) beobachtete Erscheinung, dass die Periodicitätsmoduln gewisser zu derselben gehöriger Abel-scher Integrale als Functionen eines Verzweigungspunktes eine lineare Differentialgleichung befriedigen, ist ein besonderer Fall eines allgemeinen von Herrn Fuchs aufgestellten Satzes über die Periodicitätsmoduln der zu einem beliebigen algebraischen Gebilde

(I) $$F(s, x) = 0$$

gehörigen Integrale.

Bedeute nämlich

$$U = \int \frac{\varphi(s, x)}{\frac{\partial F}{\partial s}}\, dx$$

etwa ein zu dem algebraischen Gebilde (I) gehöriges Integral erster Gattung, so kann man dasselbe als Function eines Verzweigungspunktes z der durch (I) definirten algebraischen Function s von x studiren. Bei geeigneter Wahl der rationalen Function $\varphi(s, x)$ des Ortes der zu (I) gehörigen Riemann'schen Fläche T lässt sich dann, wie Herr Fuchs gezeigt hat, jede Ableitung von U nach z in der Form

$$(\text{II}) \qquad \frac{\partial^\lambda U}{\partial z^\lambda} = \chi_\lambda(s, x) + \delta_{\lambda 1} t_1 + \delta_{\lambda 2} t_2 + \cdots + \delta_{\lambda p} t_p + \gamma_{\lambda 1} U_1 + \gamma_{\lambda 2} U_2 + \cdots + \gamma_{\lambda p} U_p \qquad (\lambda = 1, 2, \quad)$$

darstellen, wo p den Rang des algebraischen Gebildes (I),

$$U_1, \; U_2, \cdots U_p$$

ein System linear unabhängiger Integrale erster Gattung,

$$t_1, \; t_2, \cdots t_p$$

gewisse Integrale zweiter Gattung, $\chi_\lambda(s, x)$ eine rationale Function des Ortes auf der Fläche T und die $\delta_{\lambda x}$, $\gamma_{\lambda x}$ Constanten bedeuten, die sich rational zusammensetzen lassen aus den Coefficienten von

$$\varphi(s, x), \quad F(s, x)$$

und deren Ableitungen nach z, ferner aus z und dem zu $x = z$ gehörigen Werthe s_z von s, sowie endlich aus den Coefficienten der Integranden der $U_1, U_2, \cdot \cdot U_p$ und den Unendlichkeitsstellen der $t_1, t_2, \cdot\cdot\; t_p$.

Denken wir uns nun die $(2p + 1)$-fach zusammenhängende Fläche T durch $2p$ Querschnitte in eine einfach zusammenhängende zerschnitten und mögen

$$K_1, \; K_2, \; \cdot\cdot K_{2p}$$

die Periodicitätsmoduln von U an jenen $2p$ Querschnitten sein. Ebenso sollen

$$T_{i1}, \; T_{i2}, \cdots T_{i,2p}$$

die entsprechenden Periodicitätsmoduln von t_i und

$$K_{i1}, \; K_{i2}, \; \cdot\cdot K_{i,2p}$$

die analogen Grössen für U_i bedeuten. Dann ist nach (II), da das über eine geschlossene Curve in der Fläche T erstreckte Integral

$$\int d\chi_\lambda(s, x)$$

verschwindet,

$$(\text{III}) \qquad \frac{\partial^\lambda K_\nu}{\partial z^\lambda} = \sum_{i=1}^{p} \delta_{\lambda i} T_{i\nu} + \sum_{i=1}^{p} \gamma_{\lambda i} K_{i\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \quad 2p)$$

Bildet man diese Gleichungen für $\lambda = 0, 1, \cdots 2p$ und eliminirt für jeden Werth von ν die Grössen

$$T_{1\nu}, \cdot\cdot\; T_{p\nu}, \; K_{1\nu}, \; \cdot\cdot K_{p\nu},$$

so erhält man eine Gleichung von der Form

$$\beta_{2p} \frac{d^{2p} K}{dz^{2p}} + \beta_{2p-1} \frac{d^{2p-1} K}{dz^{2p-1}} + \cdots + \beta_0 K = 0,$$

die durch die $2p$ Grössen

$$K_1, \ K_2, \cdots K_{2p}$$

befriedigt wird Die Coefficienten dieser linearen homogenen Differentialgleichung $2p^{\text{ter}}$ Ordnung setzen sich rational zusammen aus den Coefficienten von

$$\varphi(s, x), \quad F(s, x)$$

und deren Ableitungen nach z.

Für besondere Formen der algebraischen Gleichung (I) sind die sich aus (III) für $\lambda = 0, 1, \cdots 2p$ ergebenden Gleichungen nicht sämmtlich von einander unabhängig; dann ergiebt sich eine lineare Differentialgleichung von niedrigerer als der $2p^{\text{ten}}$ Ordnung, die durch die $2p$ Periodicitätsmoduln der Integrale erster Gattung U befriedigt wird. Dies ist z. B. stets der Fall, wenn die Gleichung (I) eine binomische ist.

247. **Differentialgleichung für die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale. Fundamentalsubstitutionen. Differentialgleichungen, die zu derselben Classe gehören. Unabhängigkeit der Fundamentalsubstitutionen von den singulären Punkten.**

In dem besonderen Falle, wo die Gleichung (I) ein hyperelliptisches Gebilde darstellt, hat Herr Fuchs die lineare Differentialgleichung, der die Periodicitätsmoduln der Integrale erster Gattung als Functionen eines Verzweigungspunktes genügen, explicite aufgestellt und die Fundamentalsubstitutionen derselben angegeben. Wir wollen diese Differentialgleichung herleiten, indem wir die für die allgemeine binomische Gleichung (3) erlangten Resultate specialisiren.

Wir nehmen zu dem Ende in der Differentialgleichung (I′) der Nr. 243 (S. 455)

$$\beta_1 = \frac{1}{2}, \quad \beta_2 = \frac{1}{2}, \cdots \quad \beta_m = \frac{1}{2},$$

während wir ξ vorläufig noch beliebig lassen, dabei aber im Auge behalten, dass, wenn ξ gleich einem ungeraden Vielfachen von $\frac{1}{2}$ genommen wird, der Ausdruck

$$(z - x)^{\xi-1} w_1 = (x - a_1)^{-\frac{1}{2}} (x - a_2)^{-\frac{1}{2}} \cdots (x - a_m)^{-\frac{1}{2}} (z - x)^{\xi-1}$$

einer quadratischen Gleichung mit dem Verzweigungspunkte z genügt und somit zu einem hyperelliptischen Gebilde Veranlassung giebt.

Es ist in diesem Falle (vergl. die Gleichungen (1), (2) der Nr. 243, S. 455)

$$P_m(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdot \quad \cdot (x - a_m),$$

$$\frac{P_{m-1}(x)}{P_m(x)} = \frac{1}{2} \sum_{\varkappa=1}^{m} \frac{1}{x - a_\varkappa},$$

wir haben also

$$P_{m-1}(x) = \frac{1}{2} P'_m(x).$$

Die Coefficienten der Differentialgleichung (E_ξ), die durch die Ausdrücke

$$(5) \qquad \int\limits_{(A)} \frac{(z-x)^{\xi-1}\, dx}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)\cdot\cdot \quad (x-a_m)}}$$

befriedigt wird, lauten demnach (Gleichung (5), Nr. 243, S 456)

$$(6) \qquad Q_\nu(z, \xi) = \frac{(-1)^{m-\nu-1}\left(\xi - \frac{m}{2} - \frac{\nu}{2}\right)}{(\xi-1)(\xi-2) \quad (\xi-\nu)\, 1 \quad 2 \quad (m-\nu)} P_m^{(m-\nu)}(z)$$

$$(\nu = 0, 1, \quad m).$$

Insbesondere ergeben sich für $\xi = \frac{1}{2}$ die Coefficienten der Differentialgleichung

$$\left(E_{\frac{1}{2}}\right) = (E)$$

in der Form

$$(7) \qquad Q_\nu\left(z, \frac{1}{2}\right) = Q_\nu(z) = \frac{2^{\nu-1}(-1)^m(1-m-\nu)}{1 \quad 3 \quad (2\nu-1) \quad 1\cdot 2 \quad (m-\nu)} P_m^{(m-\nu)}(z),$$

und diese Differentialgleichung (E) wird befriedigt durch die Periodicitätsmoduln

$$(8) \qquad \int\limits_{(A)} \frac{dx}{\sqrt{(x-a_1) \quad (x-a_m)(z-x)}}$$

des zu dem hyperelliptischen Gebilde

$$(9) \qquad s^2 = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m)(z-x)$$

gehörigen Integrales erster Gattung

$$(10) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a_1) \quad (x-a_m)(z-x)}}.$$

Dabei ist (wie auch stets bisher) vorausgesetzt, dass die Verzweigungspunkte

$$a_1, \; a_2, \cdots a_m$$

des hyperelliptischen Gebildes (9) von z unabhängige Grössen sind; ferner wollen wir annehmen, dass der Punkt $x = \infty$ eine Verzweigungsstelle der algebraischen Function s von x, d. h. dass m eine **gerade** Zahl sei. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so könnten wir z. B. den Ausdruck

$$\bar{x} = \frac{1}{x - a_1}$$

als neue unabhängige Variable einführen und erhielten dann für die Periodicitätsmoduln (8) eine lineare Differentialgleichung von der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung.

Als Fundamentalsystem von (E) können wir die auf directem Wege erstreckten Integrale

$$(11) \qquad v_\varkappa = [z, a_\varkappa] = \int_z^{a_\varkappa} \frac{dx}{\sqrt{(x-a_1) \quad (x-a_m)(z-x)}} \qquad (\varkappa = 1, 2, \quad m)$$

nehmen. Die Fundamentalsubstitutionen derselben lauten dann zufolge der Gleichungen (11) der Nr 244 (S. 460)

$$(12) \qquad \begin{cases} \Theta_h v_h = v_h, \\ \Theta_h v_\varkappa = v_\varkappa - 2v_h & (\varkappa > h), \\ \Theta_h v_\varkappa = v_\varkappa + 2v_h & (\varkappa < h) \end{cases}$$

Wir sehen, dass die Substitutionen, die das Fundamentalsystem

$$v_1, \; v_2, \cdots v_m$$

bei Umläufen der Variabeln z erfährt, ganzzahlige Coefficienten und die Determinante Eins besitzen.

Betrachten wir neben dem Integrale (10) irgend ein zu dem hyperelliptischen Gebilde (8) gehöriges Integral

$$(13) \qquad \int \frac{R(x)\,dx}{s},$$

wo $R(x)$ eine rationale Function von x bedeutet, welches keine logarithmische Unendlichkeitsstelle hat, und folglich in der durch die

$$2p = m$$

canonischen Querschnitte zerschnittenen Riemann'schen Fläche des Gebildes (9) eindeutig ist, so sind die Résidus von

$$\frac{R(x)}{s}$$

für diejenigen Unendlichkeitsstellen von $R(x)$, die nicht zu den Verzweigungspunkten von s gehören, gleich Null, und die Coefficienten von $R(x)$ hängen folglich im Allgemeinen noch von z ab. Wenn insbesondere $R(x)$, abgesehen von einer ganzzahligen Potenz von $z - x$ als Factor, von z unabhängig ist und für keinen von den Verzweigungsstellen von s verschiedenen Punkt unendlich wird, so genügen nach dem Satze der Nr. 246 (S. 469) die Periodicitätsmoduln des Integrals

(13) einer Differentialgleichung m^{ter} Ordnung, die mit der Differentialgleichung (E) zur selben Classe gehört. Es ist dann

$$\frac{R(x)}{s} = g(x)(x-a_1)^{\beta_1-1}(x-a_2)^{\beta_2-1}\cdots(x-a_m)^{\beta_m-1}(z-x)^{\xi-1},$$

wo $g(x)$ eine von z unabhängige ganze Function, $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_m, \xi$ Zahlen bedeuten, die sich von $\frac{1}{2}$ nur durch ganze Zahlen unterscheiden. Wir können in diesem Falle nach der in der Nr. 240 (S. 446) dargelegten Methode die Differentialgleichung, der die Periodicitätsmoduln des Integrals (13) genügen, ohne Schwierigkeit herstellen, und den Ausdruck der abhängigen Variabeln dieser Differentialgleichung durch die abhängige Variable von (E) und deren Ableitungen angeben.

Wir können also sagen: Die Periodicitätsmoduln eines Integrals erster Gattung

$$\int \frac{g(x)\,dx}{s},$$

wo $g(x)$ eine ganze rationale Function vom Grade $p-1$ mit willkürlichen (aber von z unabhängigen) Coefficienten bedeutet, genügen einer Differentialgleichung, die mit (E) zur selben Classe gehört. Die Differentialgleichung, der die Periodicitätsmoduln eines Integrals zweiter Gattung genügen, gehört mit (E) zur selben Classe, wenn der Integrand, abgesehen von einer Potenz von $z-x$ als Factor, von z unabhängig ist und die Unendlichkeitsstellen des Integrals mit Punkten aus der Reihe

$$a_1,\ a_2,\ \cdots\ a_m,\ z,\ \infty$$

übereinstimmen.

Wenn wir in dem hyperelliptischen Integrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a_1)\cdots(x-a_m)(x-a_{m+1})}}, \quad m = 2p$$

die Verzweigungspunkte $a_1, a_2, \cdots a_m, a_{m+1}$ als von einander unabhängige Variable auffassen, so befriedigen die Periodicitätsmoduln desselben, oder wie wir lieber sagen wollen, m linear unabhängige der über die Doppelschleifen

$$(a_\iota, a_\varkappa) = s_\iota s_\nu s_\iota^{-1} s_\varkappa^{-1} \qquad (\iota, \nu = 1, 2, \cdots m+1,\ \iota \neq \varkappa)$$

erstreckten Integrale

$$u_1,\ u_2,\ \cdots\ u_m,$$

als Functionen irgend eines a_ν aufgefasst, eine lineare homogene Differentialgleichung (E_ν) von der Form (E). Die Coefficienten von (E_ν) hängen von den singulären Punkten

$$a_1, \cdots a_{\nu-1}, a_{\nu+1}, \cdots a_{m+1}$$

als Parameter ab, dagegen sind die Fundamentalsubstitutionen, die da Fundamentalsystem

$$u_1, u_2, \cdots u_m$$

erleidet, wenn a_ν Umläufe um diese singulären Punkte vollzieht, voı diesen Parametern unabhängig, sie haben nämlich ganzzahlige Coeffi cienten.

Auf Grund der Fuchs'schen Sätze der Nr. 228 (S. 397) folg hieraus, wie wir bereits in der Nr. 243 (S. 458) für die allgemein Tissot-Pochhammer'sche Differentialgleichung hervorgehoben haben dass die $u_\varkappa$ ein System von Gleichungen

$$(14) \qquad \frac{\partial u_\varkappa}{\partial a_\lambda} = R_{\lambda 0} u_\varkappa + R_{\lambda 1} \frac{\partial u_\varkappa}{\partial a_\nu} + \cdots + R_{\lambda, m-1} \frac{\partial^{m-1} u_\varkappa}{\partial a_\nu^{m-1}} \qquad (\lambda \neq \nu)$$

befriedigen, wo die $R_{\lambda 0}, R_{\lambda 1}, \cdot\ R_{\lambda, m-1}$ rationale Functionen von a bedeuten. Da aber die Substitutionen, welche die $u_1, u_2, \cdot \cdot u_m$ er fahren, wenn irgend ein $a_\varkappa$ einen geschlossenen Umlauf vollzieht, vo allen übrigen $a_1, a_2, \cdot \cdot a_{m+1}$ unabhängig sind, so folgt, wenn wir au den Gleichungen (14) für $\varkappa = 1, 2, \cdot\cdot m$ die

$$(15) \qquad R_{\lambda 0}, R_{\lambda 1}, \cdot\ R_{\lambda, m-1}$$

ausrechnen, mit Rücksicht auf den Umstand, dass die $u_1, u_2, \cdot\cdot u$ und ihre sämmtlichen Ableitungen nach den $a_1, a_2, \cdot\cdot a_{m+1}$ kein Stellen der Unbestimmtheit besitzen können, dass die Coefficienten (15 rationale Functionen aller

$$a_1, a_2, \cdots a_{m+1}$$

sein müssen (vergl. Nr. 230, S. 403 ff.).

Die Gleichungen (14) stellen folglich ein System linearer homo gener partieller Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten daı denen die $u_1, u_2, \cdots u_m$ Genüge leisten. Mit speciellen Fällen solche partieller Differentialgleichungen haben sich die Herren Appell, Picar und Horn beschäftigt, auf die allgemeine Theorie derselben bezieh sich eine Abhandlung von Herrn Fuchs in den Sitzungsberichten de Berliner Akademie vom Jahre 1891.

248. Legendre'sche Differentialgleichung für die Periodicitätsmodul des elliptischen Integrals erster Gattung. Darstellung der Periodicitätsmoduln.

Ehe wir auf eine weitere Untersuchung der Periodicitätsmodul des allgemeinen hyperelliptischen Integrals eingehen, beschäftigen wi

uns mit dem einfachsten und auch vom historischen Standpunkte aus besonders interessanten Falle $m = 2$, d. h mit dem Falle des elliptischen Integrals.

Wir werden alsdann $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ setzen, so dass also zunächst die Periodicitätsmoduln des elliptischen Integrals erster Gattung

$$\text{(I)} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}}$$

zu behandeln sind. Da $m = 2$ ist, haben wir es mit einem besonderen Falle der Differentialgleichung (G) der Gauss'schen Reihe zu thun, und zwar ist (vergl. Nr. 244, S. 460)

$$\alpha = 1 - \xi = \frac{1}{2}, \quad \beta = 2 - \xi - \beta_1 - \beta_2 = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 2 - \xi - \beta_1 = 1,$$

also lauten die Coefficienten

$$Q_2 = z(1-z), \quad Q_1 = 1 - 2z, \quad Q_0 = -\frac{1}{4},$$

d. h. wir haben die zuerst von Legendre aufgestellte Differentialgleichung

$$\text{(L)} \qquad z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + (1-2z)\frac{du}{dz} - \frac{1}{4}u = 0,$$

die durch die bestimmten Integrale

$$u_1 = \int\limits_{(0,z)} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}}, \quad u_2 = \int\limits_{(1,z)} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}}$$

befriedigt wird Die Fundamentalsubstitutionen, welche u_1, u_2, beziehungsweise die auf directem Wege erstreckten Integrale (vergl. Nr. 244, S. 461)

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} [z, 0] = \frac{1}{4}u_1 = \int\limits_z^0 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}}, \\ [z, 1] = \frac{1}{4}u_2 = \int\limits_z^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}} \end{cases}$$

erfahren, wenn z einfache Umläufe um die Punkte 0, 1 vollzieht, lauten (Nr. 245, S. 463)

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} \Theta_1 u_1 = u_1, & \Theta_1 u_2 = u_2 - 2u_1, \\ \Theta_2 u_1 = u_1 + 2u_2, & \Theta_2 u_2 = u_2. \end{cases}$$

Es möge zunächst der Zusammenhang der u_1, u_2 mit den Periodicitätsmoduln des elliptischen Integrals erster Gattung genau festgestellt werden.

Sei ein elliptisches Integral erster Gattung mit dem Modul

(3) $$z = \varkappa^2$$

in der Legendre-Jacobi'schen Normalform

(4) $$\int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-zy^2)}}$$

vorgelegt; setzt man mit Jacobi die beiden „completten Integrale"

(5) $$\begin{cases} \int\limits_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-zy^2)}} = K, \\ \int\limits_1^{\frac{1}{\sqrt{z}}} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-zy^2)}} = K'i \qquad (i = \sqrt{-1}), \end{cases}$$

so sind $4K$ und $2K'i$ die Periodicitätsmoduln des Integrals (4). Di Substitution

$$y^2 = t$$

verwandelt das Integral (4) in

$$\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-zt)}}$$

und die Integrale (5) in

(6) $$\begin{cases} K = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-zt)}}, \\ K'i = \frac{1}{2} \int\limits_1^{\frac{1}{z}} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-zt)}}. \end{cases}$$

Setzt man hierin ferner

$$t = \frac{1}{x},$$

so kommt

(7) $$\begin{cases} K = \frac{1}{2} \int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-z)}}, \\ K'i = \frac{1}{2} \int\limits_z^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-z)}}. \end{cases}$$

Bei der durch die Fig. 15 (Nr. 245, S. 463) angedeuteten Lag besteht zwischen dem in der Nr. 245 (S. 464) definirten Integrale

$$\bar{u} = -4 \int\limits_{\infty}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}}$$

und u_1 die Beziehung

$$\bar{u} = -u_1,$$

so dass also mit Rücksicht auf (1)

$$u_1 = 4\int_{\infty}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}}, \quad u_2 = 4\int_{z}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}}$$

gefunden wird Wir haben demnach

$$(8) \qquad u_1 = \pm 8iK, \quad u_2 = \pm 8K',$$

wo jetzt noch die Vorzeichen $\pm$ in geeigneter Weise zu fixiren sind.

In der Theorie der elliptischen Functionen werden die Functionen K und $K'i$ so definirt, dass für Werthe des Moduls z, die zwischen 0 und 1 liegen, K sowohl wie K' real positiv sind; dann ist nämlich der rein imaginäre Quotient

$$\tau = \frac{K'i}{K}$$

so beschaffen, dass sein Coefficient von i einen positiven Werth hat Es ist für unsere Zwecke am nützlichsten, wenn wir die Definition der K und $K'i$ dadurch geben, dass wir diese Functionen durch die zu den singulären Punkten $0, 1, \infty$ gehörigen canonischen Fundamentalsysteme darstellen.

Da für die Differentialgleichung (L) die Grössen

$$1-\gamma, \quad \gamma-\alpha-\beta, \quad \alpha-\beta$$

gleich Null sind, treten in den Entwickelungen der Integrale in der Umgebung der Stellen $0, 1, \infty$ nothwendig Logarithmen auf. Nach den Formeln der Nummern 71, 72 (Bd. I, S 253 ff, 259 ff) haben wir für $z=0$ die Integrale

$$u_{01} = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z\right),$$

$$u_{02} = F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z\right) + F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z\right)\log z,$$

woselbst

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z\right) = 1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty}\left\{\frac{1\cdot 3\ 5\ \ \cdot 2\lambda-1}{2\ 4\ \ \ 2\lambda}\right\}^2 z^\lambda$$

und (vergl Nr. 71, Bd. I, S. 257)

$$F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z\right) = 4\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left\{\frac{1\ 3\ 5\ \ 2\lambda-1}{2\cdot 4\cdot\ \cdot 2\lambda}\right\}^2 \sum_{\nu=1}^{2\lambda}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\, z^\lambda$$

zu nehmen ist.

Analog ist für $z = 1$

$$u_{11} = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1-z\right),$$

$$u_{12} = F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1-z\right) + F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1-z\right)\log(1-z),$$

und für $z = \infty$

$$u_{\infty 1} = z^{-\frac{1}{2}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{z}\right),$$

$$u_{\infty 2} = z^{-\frac{1}{2}}\left\{F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{z}\right) + F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{z}\right)\log\frac{1}{z}\right\}.$$

Zufolge der Formeln (2) und (8) kann sich K von u_{01} und von u_{11} nur durch einen constanten Factor unterscheiden. Um di Factoren zu bestimmen, setzen wir zuvörderst in K für z den We Null ein; dann reducirt sich K auf

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \pm\frac{\pi}{2}$$

Wir wählen das positive Vorzeichen, so dass also

$$\lim_{z=0} K(z) = K(0) = \frac{\pi}{2}$$

wird Dann ist

$$K(z) = \frac{\pi}{2}u_{01} = \frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z\right), \tag{9}$$

und wir sehen, dass die so definirte Function wirklich für reale Wer von z, die zwischen 0 und 1 liegen, real positiv ist.

Da sich die Differentialgleichung (L) nicht verändert, wenn an Stelle von z setzen $1 - z$, oder in der Sprache der Theorie elliptischen Functionen, wenn wir an Stelle des Moduls $\varkappa^2$ den co plementären Modul

$$\varkappa'^2 = 1 - \varkappa^2$$

nehmen, so schliessen wir, dass K' sich von dem Integrale

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-(1-z)t)}}$$

nur durch einen constanten Factor unterscheiden kann. In der T ergiebt sich aus der zweiten der Gleichungen (6) durch die Substitut

$$t' = \frac{1-zt}{1-z},$$

$$2K'i = \int_0^1 \frac{dt'}{\sqrt{t'(t'-1)(1-(1-z)t')}}.$$

Vir wählen die Vorzeichen so, dass

10) $$2K'(z) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-(1-z)t)}} = 2K(1-z)$$

st, dann haben wir also

$$\lim_{z=1} K'(z) = K(0) = \frac{\pi}{2},$$

nd folglich

11) $$K'(z) = K(1-z) = \frac{\pi}{2} u_{11} = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1-z\right),$$

s ist demnach, wie wir verlangten, für ein reales zwischen 0 und 1 elegenes z auch K' real positiv.

49. Fundamentalsubstitutionen der Legendre'schen Differentialgleichung. Darstellung von K und $K'i$ durch die canonischen Fundamentalsysteme.

Wenn wir uns $K'(z)$ durch das Fundamentalsystem u_{01}, u_{02} darestellt denken

12) $$2K'(z) = c_1 u_{01} + c_2 u_{02},$$

gelangen wir zu einer interessanten, zuerst von Legendre gegebenen ntwickelung dieses Integrals in der Umgebung von $z = 0$. Es ist

.3) $$2K'(z) = -\int_1^z \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(x-z)}} = -\int_1^z \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}},$$

tzen wir also

$$A = \int_1^z \frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}}\, dx, \quad B = \int_1^z \frac{dx}{\sqrt{x(x-z)}},$$

ist

4) $$2K'(z) = -(A+B).$$

urch elementare Rechnung ergiebt sich

$$B = \log\left(1-\sqrt{1-z}\right) - \log\left(1+\sqrt{1-z}\right),$$

id wenn wir in der Umgebung von $z = 0$ entwickeln,

$$B = -2\log 2 + \mathfrak{P}(z) + \log z,$$

o $\mathfrak{P}(z)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von z fortschreitende eihe bedeutet, die für $z = 0$ verschwindet. Das Integral A reducirt ch für $z = 0$ auf

$$\int_1^0 \frac{dx}{(1+\sqrt{1-x})\sqrt{1-x}} = -2\log 2,$$

so dass sich also

$$\lim_{z=0} (A + B - \log z) = -4 \log 2$$

und demnach mit Rücksicht auf (14)

(14a) $$\lim_{z=0} (2K'(z) + \log z) = 4 \log 2$$

ergiebt. Addiren wir nun auf beiden Seiten der Gleichung (12) $\log z$ hinzu und setzen dann $z = 0$, so erhalten wir zufolge der Darstellung von u_{01}, u_{02}

(15) $$4 \log 2 = c_1 + (c_2 + 1) \lim_{z=0} \log z,$$

wenn wir in dem Ausdrucke von u_{02} den Werth von $\log z$ so wählen, dass derselbe für positives z zwischen 0 und 1 real ist. Aus (15) folgt

$$c_1 = 4 \log 2, \quad c_2 = -1,$$

wir haben also die Darstellung

(16) $$2K'(z) = 4 \log 2 \cdot u_{01} - u_{02},$$

worin jetzt auch u_{02} eine eindeutig festgelegte Bedeutung besitzt.

Zufolge der Gleichung (10) ist

$$K(z) = K'(1 - z),$$

wir können also der Gleichung (16) die daraus durch Vertauschung von z mit $1 - z$ hervorgehende Gleichung

(16a) $$2K(z) = 4 \log 2 \cdot u_{11} - u_{12}$$

an die Seite stellen.

Nun ist für einen Umlauf von z, der den Querschnitt l_1 einmal in positivem Sinne überschreitet,

$$\Theta_1 u_{02} = u_{02} + 2\pi i u_{01},$$

folglich haben wir nach (9) und (16)

$$\Theta_1 (K'i) = K'i + 2K,$$

und daraus folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (2), dass wir in (8)

$$u_1 = 8iK$$

zu setzen haben, da nach (13)

$$u_2 = 8K'$$

zu nehmen ist. Die Gleichungen (2) liefern dann sofort die dem Umlaufe um $z = 1$ entsprechende Fundamentalsubstitution von K und $K'i$; wir stellen beide Substitutionen zusammen:

$$(17)\quad \begin{cases} \Theta_1 K = K, \\ \Theta_1(K'i) = K'i + 2K, \end{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} \Theta_2 K = K - 2Ki, \\ \Theta_2(K'i) = K'i, \end{cases} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir geben nun noch die Darstellung von K und K' durch die Integrale $u_{\infty 1}$, $u_{\infty 2}$.

Sei

$$K(z) = \alpha u_{\infty 1} + \beta u_{\infty 2},$$
$$K'(z) i = \gamma u_{\infty 1} + \delta u_{\infty 2},$$

dann wissen wir zunächst, dass bei einem einfachen positiven Umlaufe um $z = \infty$ die Integrale K, $K'i$ die Substitution

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

erfahren müssen. Andererseits verwandeln sich $u_{\infty 1}$, $u_{\infty 2}$ bei einem solchen Umlaufe in

$$-u_{\infty 1}, \quad -(u_{\infty 2} + 2\pi i u_{\infty 1});$$

wir erhalten demgemäss die Gleichungen

$$(18)\quad \begin{cases} \alpha + \gamma + \pi i \beta = 0, \\ \beta + \delta = 0. \end{cases}$$

Führen wir in den Integralen

$$K(z) = \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-z)}}, \quad K'(z) = \frac{1}{2} \int_z^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}}$$

die Grösse $\frac{1}{x}$ als neue Integrationsvariable ein, so ergiebt sich

$$K(z) = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^{\frac{1}{z}} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)\left(x-\frac{1}{z}\right)}} + \int_{\frac{1}{z}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)\left(x-\frac{1}{z}\right)}} \right\},$$

$$K'(z) = -\frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{z}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)\left(\frac{1}{z}-x\right)}}.$$

Nun ist aber (vergl. die Gleichungen (1), (8) und (9)) offenbar

$$\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\int\limits_0^{\frac{1}{z}}\frac{dx}{\sqrt{x(x-1)\left(x-\frac{1}{z}\right)}}=\varepsilon_1\frac{\pi}{2}u_{\infty 1},\quad \varepsilon_1=\pm 1,$$

und ebenso folgt, wenn wir in (13) und (16) an Stelle von z setzen $\frac{1}{z}$,

$$\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\int\limits_{\frac{1}{z}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x(x-1)\left(\frac{1}{z}-x\right)}}=2\log 2\cdot u_{\infty 1}-\frac{1}{2}u_{\infty 2},$$

also

$$\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\int\limits_{\frac{1}{z}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x(x-1)\left(x-\frac{1}{z}\right)}}=\varepsilon_2 i\left(2\log 2\cdot u_{\infty 1}-\frac{1}{2}u_{\infty 2}\right),\quad \varepsilon_2=\pm 1.$$

Wir finden folglich

$$K(z)=\left(\varepsilon_1\frac{\pi}{2}+\varepsilon_2 2i\log 2\right)u_{\infty 1}-\frac{\varepsilon_2 i}{2}u_{\infty 2},$$

$$K'(z)i=-2i\log 2\cdot u_{\infty 1}+\frac{i}{2}u_{\infty 2},$$

d. h. es ist

$$\gamma=-2i\log 2,\quad \delta=\frac{i}{2},$$

und da die Gleichungen (18) hiernach

$$\beta=-\frac{i}{2},\quad \alpha=-\frac{\pi}{2}+2i\log 2,$$

also für die zu bestimmenden Vorzeichen

$$\varepsilon_1=-1,\quad \varepsilon_2=1$$

ergeben, so haben wir die gesuchte Darstellung

$$\text{(19)}\qquad \begin{cases} K(z)=\left(-\frac{\pi}{2}+2i\log 2\right)u_{\infty 1}-\frac{i}{2}u_{\infty 2},\\ K'(z)i=-2i\log 2\cdot u_{\infty 1}+\frac{i}{2}u_{\infty 2}.\end{cases}$$

250. Differentialgleichung für die Periodicitätsmoduln des elliptischen Integrals zweiter Gattung. Darstellung der Classenbeziehung zu der Differentialgleichung für die Periodicitätsmoduln des Integrals erster Gattung. Die Legendre'sche Relation.

Indem wir nun dazu übergehen, die Differentialgleichung für die Periodicitätsmoduln des elliptischen Integrals zweiter Gattung als Functionen des Moduls $\varkappa^2=z$ aufzustellen, bemerken wir, dass in der

Litteratur verschiedene Normalintegrale zweiter Gattung betrachtet worden sind.

Legendre hat das Normalintegral

$$\int \frac{(1 - z y^2)\, dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - z y^2)}} = \int \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - z y^2)}} - z \int \frac{y^2\, dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - z y^2)}}$$

und dem entsprechend als Periodicitätsmoduln die Integrale

$$\int_0^1 \frac{(1 - z y^2)\, dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - z y^2)}}, \quad \int_1^{\frac{1}{\sqrt{z}}} \frac{(1 - z y^2)\, dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - z y^2)}},$$

die sich durch die Substitution

$$y^2 = \frac{1}{x}$$

in Integrale von der Form

$$v = -\frac{1}{2} \int_{(A)} x^{-\frac{3}{2}} (x - 1)^{-\frac{1}{2}} (x - z)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

verwandeln. Für dieselben ist also

$$\beta_1 = -\frac{1}{2}, \quad \beta_2 = \frac{1}{2}, \quad \xi = \frac{3}{2},$$

und die entsprechende Differentialgleichung, wie sie von Legendre aufgestellt worden ist, lautet demnach

$$z(1 - z) \frac{d^2 v}{dz^2} + (1 - z) \frac{dv}{dz} + \frac{1}{4} v = 0.$$

Nur hat Legendre hier ebenso wie für (L) die unabhängige Variable

$$\varkappa = \sqrt{z},$$

so dass bei ihm die Gleichungen die Form haben

$$(1 - \varkappa^2) \frac{d^2 u}{d\varkappa^2} + \frac{1 - 3\varkappa^2}{\varkappa} \frac{du}{d\varkappa} - u = 0,$$

$$(1 - \varkappa^2) \frac{d^2 v}{d\varkappa^2} + \frac{1 - \varkappa^2}{\varkappa} \frac{dv}{d\varkappa} + v = 0.$$

Spätere Autoren pflegten

$$\int \frac{y^2\, dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - z y^2)}}$$

als Normalintegral zweiter Gattung zu nehmen; die Periodicitätsmoduln desselben sind in der Form

$$\bar{v} = \int\limits_{(A)} x^{-\frac{3}{2}}(x-1)^{-\frac{1}{2}}(x-z)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

enthalten. Man hat also

$$\beta_1 = -\frac{1}{2}, \quad \beta_2 = \frac{1}{2}, \quad \xi = \frac{1}{2}$$

und somit die Differentialgleichung

$$z(1-z)\frac{d^2\bar{v}}{dz^2} + (2-3z)\frac{d\bar{v}}{dz} - \frac{3}{4}\bar{v} = 0.$$

Wir wollen entsprechend der Normalform (I) (Nr. 248, S. 477) des elliptischen Integrals erster Gattung die von Herrn Fuchs benutzte Normalform

$$\text{(II)} \qquad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}}$$

des Integrals zweiter Gattung zu Grunde legen, die sich auch den Festsetzungen, wie sie Herr Weierstrass und Riemann für die hyperelliptischen beziehungsweise Abel'schen Integrale getroffen haben, am besten anpasst.

Die Integrale der Form

$$\mathfrak{u} = \int\limits_{(A)} \frac{x\,dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}} = \int\limits_{(A)} x^{\frac{1}{2}}(x-1)^{-\frac{1}{2}}(z-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

genügen, da

$$\beta_1 = \frac{3}{2}, \quad \beta_2 = \frac{1}{2}, \quad \xi = \frac{1}{2}; \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{2}, \quad \gamma = 0$$

ist, der Differentialgleichung

$$\text{(L')} \qquad z(1-z)\frac{d^2\mathfrak{u}}{dz^2} - z\frac{d\mathfrak{u}}{dz} + \frac{1}{4}\mathfrak{u} = 0,$$

von der wir ebenso, wie von den beiden vorhin aufgestellten Differentialgleichungen für v und $\bar{v}$ wissen, dass sie mit (L) zur selben Classe gehören muss. Wir stellen zunächst die Beziehung her, die $\mathfrak{u}$ mit der abhängigen Variabeln u von (L) verknüpft.

Nach der in der Nr. 240 (S. 445 ff.) dargelegten Methode haben wir zu diesem Ende die Differentialgleichung für

$$\mathfrak{u}^{(1)} = \int\limits_{(A)} \frac{(z-x)^{\frac{1}{2}}\,dx}{\sqrt{x(x-1)}}$$

aufzustellen. Dieselbe lautet, da

$$\beta_1 = \frac{1}{2}, \quad \beta_2 = \frac{1}{2}, \quad \xi = \frac{3}{2}$$

ist, wie folgt:

$$z(1-z)\frac{d^2\mathfrak{U}^{(1)}}{dz^2}-\frac{1}{4}\mathfrak{U}^{(1)}=0.$$

Da in unserem Falle die ganze Function $g_0(x)$ einfach gleich x ist, so haben wir, nach Gleichung (39) der Nr. 240 (S. 447),

$$\mathfrak{u}=zu-\mathfrak{U}^{(1)}.$$

Ferner ist

$$u=\int\limits_{(A)}\frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}}=2\frac{d\mathfrak{U}^{(1)}}{dz},$$

also folgt

$$\frac{du}{dz}=2\frac{d^2\mathfrak{U}^{(1)}}{dz^2}=\frac{-1}{2(z-1)z}\mathfrak{U}^{(1)},$$

wir finden also

(20) $$\mathfrak{u}=zu+2z(z-1)\frac{du}{dz}.$$

Setzen wir nunmehr

(20a) $$\begin{cases}J=zK+2z(z-1)\dfrac{dK}{dz},\\ J'=zK'+2z(z-1)\dfrac{dK'}{dz},\end{cases}$$

so sind die so definirten Lösungen von (L′) (vergl. die Gleichungen (7), (13))

$$J=\frac{1}{2}\int\limits_1^\infty\frac{x\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-z)}},\quad J'=\frac{1}{2}\int\limits_1^z\frac{x\,dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}}$$

die den K, K' entsprechenden aliquoten Theile von Periodicitätsmoduln des Integrales (II) Zwischen den vier Grössen

$$K,\ K',\ J,\ J'$$

besteht nun eine höchst wichtige Beziehung, die wir jetzt herleiten wollen.

Bilden wir die Determinante des Fundamentalsystems K, K' der Differentialgleichung (L), so ist

$$\begin{vmatrix}K & \dfrac{dK}{dz}\\ K' & \dfrac{dK'}{dz}\end{vmatrix}=c\ e^{-\int\frac{1-2z}{z(1-z)}dz}=\frac{c}{z(1-z)},$$

wo c eine Constante bedeutet. Um diese zu bestimmen, ersetzen wir K, K' z. B durch ihre Ausdrücke in den u_{01}, u_{02}, dann kommt

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\pi}{2}u_{01} & \dfrac{\pi}{2}\dfrac{du_{01}}{dz}\\ \log 4\cdot u_{01}-\dfrac{u_{02}}{2} & \log 4\dfrac{du_{01}}{dz}-\dfrac{1}{2}\dfrac{du_{02}}{dz}\end{vmatrix}=\frac{c}{z(1-z)},$$

oder nach einfacher Reduction

$$\text{(21)} \qquad \frac{\pi}{4}\begin{vmatrix} u_{01} & \dfrac{du_{01}}{dz} \\ zu_{02} & z\dfrac{du_{02}}{dz}\end{vmatrix} = \frac{c}{z-1}.$$

Nun ist aber

$$\lim_{z=0} u_{01} = 1, \quad \lim_{z=0} \frac{du_{01}}{dz} = \frac{1}{4},$$

$$\lim_{z=0} zu_{02} = 0, \quad \lim_{z=0} z\frac{du_{02}}{dz} = 1,$$

wir finden also, indem wir in (21) z gleich Null nehmen,

$$c = -\frac{\pi}{4},$$

d. h. wir haben die Gleichung

$$\text{(22)} \qquad K\frac{dK'}{dz} - K'\frac{dK}{dz} = \frac{\pi}{4}\,\frac{1}{z(z-1)}$$

Führen wir hierin an Stelle von z

$$\varkappa = \sqrt{z}$$

als unabhängige Variable ein, so ergiebt sich die von Legendre gefundene Beziehung

$$\text{(22a)} \qquad \varkappa(1-\varkappa^2)\left[K\frac{dK'}{d\varkappa} - K'\frac{dK}{d\varkappa}\right] = -\frac{\pi}{2}.$$

Aus den Gleichungen (20a) folgt

$$\frac{dK}{dz} = \frac{1}{2z(z-1)}J - \frac{z}{2z(z-1)}K,$$

$$\frac{dK'}{dz} = \frac{1}{2z(z-1)}J' - \frac{z}{2z(z-1)}K',$$

dies in (22) eingesetzt, liefert die gesuchte Beziehung

$$\text{(23)} \qquad KJ' - JK' = \frac{\pi}{2},$$

die wir als die Legendre'sche Relation bezeichnen wollen, obwohl sie der Form nach nicht ganz mit der von Legendre aufgestellten Gleichung übereinstimmt, in welcher nämlich an Stelle von J, J' die Periodicitätsmoduln des Legendre'schen Normalintegrals zweiter Gattung (S. 485) auftreten.

Fünftes Kapitel.

251. **Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale. Die Haedenkamp-Fuchs'sche Relation.**

In einer Abhandlung „Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid" (Crelle's Journal, Bd. 19, S. 309 ff.) bemerkt Jacobi, dass er mit Hülfe einer daselbst auseinandergesetzten „merkwürdigen analytischen Substitution" u. a „die berühmte von Legendre entdeckte Relation · · · · auf alle Abel'schen (will sagen hyperelliptischen) Integrale ausgedehnt habe". Im 22. Bande desselben Journals hat Haedenkamp eine Relation zwischen den Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung entwickelt, die wahrscheinlich mit der, die Jacobi im Sinne hatte, übereinstimmt Herr Fuchs hat dann im 71 Bande der erwähnten Zeitschrift die Haedenkamp'sche Relation von einem Fehler gereinigt und in neue, elegante Form gesetzt, indem er sich einer Methode bediente, von der diejenige, die wir zur Ableitung der Legendre'schen Relation benützt haben, eine specielle Anwendung darstellt.

Betrachten wir nämlich wie in der Nr. 247 die Differentialgleichung (E), der die Periodicitätsmoduln des hyperelliptischen Integrales erster Gattung

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a_1)\cdots(x-a_m)(z-x)}} \qquad (m \equiv 0 \bmod 2)$$

Genüge leisten, so stellen z. B. die Integrale

$$u_{0,\varkappa+1} = \int_{a_\varkappa}^{a_{\varkappa+1}} \frac{dx}{\sqrt{(x-a_0)(x-a_1)\cdots(x-a_m)}} \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots m-1),$$

wo der Gleichmässigkeit wegen $z = a_0$ gesetzt wurde, ein Fundamentalsystem von (E) dar, und es ist folglich die Determinante dieses Fundamentalsystems

$$\left|\frac{d^\lambda u_{0\varkappa}}{dz^\lambda}\right|_{\binom{\varkappa = 1, 2, \cdots m}{\lambda = 0, 1, \cdots m-1}} = D(u_{01}, u_{02}, \cdots u_{0m}) = \text{const.}\, e^{-\int \frac{Q_{m-1}(z)}{Q_m(z)} dz},$$

wo nach Gleichung (7) der Nr. 247 (S. 473)

$$\frac{Q_{m-1}(z)}{Q_m(z)} = (m-1)\frac{d \log P_m(z)}{dz}$$

ist, so dass also

(24) $$D(u_{01}, u_{02}, \cdots u_{0m}) = \frac{\text{const.}}{[P_m(z)]^{m-1}}$$

gefunden wird.

Nun gehören die Differentialgleichungen $(E^{(\lambda)})$, die durch die Periodicitätsmoduln der Integrale

$$\int \frac{x^\lambda dx}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2) \cdots (x-a_m)(z-x)}} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots m-1)$$

befriedigt werden, nach dem Theoreme der Nr. 247 (S. 475) mit (E) zur selben Classe; es ist also:

(25) $$u_\lambda = \int\limits_{(A)} \frac{x^\lambda dx}{\sqrt{(x-a_1) \cdots (x-a_m)(x-z)}} = r_{\lambda 0} u_0 + r_{\lambda 1}\frac{du_0}{dz} + \cdots + r_{\lambda, m-1}\frac{d^{m-1}u_0}{dz^{m-1}},$$

wenn wir setzen

$$u_0 = \int\limits_{(A)} \frac{dx}{\sqrt{(x-a_1) \cdots (x-a_m)(x-z)}},$$

und durch $r_{\lambda 0}, r_{\lambda 1}, \cdots r_{\lambda, m-1}$ gewisse wohlbestimmte rationale Functionen von z bezeichnen. Setzen wir in (25) der Reihe nach für u_0 die Integrale

$$u_{01}, u_{02}, \cdots u_{0m}$$

und bezeichnen die entsprechenden auf den linken Seiten stehenden Integrale von $(E^{(\lambda)})$ durch

$$u_{\lambda\varkappa} = \int\limits_{a_{\varkappa-1}}^{a_\varkappa} \frac{x^\lambda dx}{\sqrt{(x-a_0)(x-a_1) \cdots (x-a_m)}} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots m),$$

so können wir, da, wie leicht zu beweisen ist, die Determinante

$$|r_{\lambda\varkappa}| \qquad (\lambda, \varkappa = 1, 2, \cdots m-1)$$

nicht identisch verschwindet, die

$$\frac{du_{0\varkappa}}{dz}, \cdots \frac{d^{m-1}u_{0\varkappa}}{dz^{m-1}}$$

als lineare homogene Functionen der

$$u_{0\varkappa}, u_{1\varkappa}, \cdots u_{m-1,\varkappa}$$

mit in z rationalen Coefficienten ausrechnen. Tragen wir diese Werthe in die Determinante auf der linken Seite von (24) ein, so ergiebt sich

$$R(z)\left|u_{\lambda\varkappa}\right|_{\binom{\lambda=0,1,\;\;m-1}{\varkappa=1,2,\;\;m}} = \frac{\text{const}}{[P_m(z)]^{m-1}},$$

wo $R(z)$ eine rationale Function bedeutet. Herr **Fuchs** zeigt nun zunächst, dass $R(z)$ sich von

$$\frac{\text{const.}}{[P_m(z)]^{m-1}}$$

nur durch einen numerischen, d. h von den $a_1, a_2, \cdots a_m, z$ unabhängigen Factor unterscheidet und findet dann durch Specialisirung

(26) $$\left|u_{\lambda\varkappa}\right|_{\binom{\lambda=0,1,\;\;m-1}{\varkappa=1,2,\;\;m}} = \frac{(-1)^{\frac{m}{4}}(2\pi)^{\frac{m}{2}}}{1\cdot 3\cdots(m-3)(m-1)}$$

Dies ist die gesuchte Relation; für $m=2$ reducirt sie sich auf die **Legendre**'sche

$$\begin{vmatrix} \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-z)}} & \int\limits_1^z \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-z)}} \\ \int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-z)}} & \int\limits_1^z \frac{x\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-z)}} \end{vmatrix} = 2\pi i,$$

die mit unserer Gleichung (23) übereinstimmt, wenn man die hier benutzten Integrale durch die K, K', J, J' ausdrückt.

252. **Differentialgleichung für die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung vom Range Zwei. Fundamentalsubstitutionen. Reductibilität der zweiten Associirten.**

Für die Theorie der hyperelliptischen Functionen ist die Relation (26) von geringerer Wichtigkeit als gewisse andere Beziehungen zwischen den Periodicitätsmoduln, die Herr **Weierstrass** entdeckt hat und von denen wir schon wiederholt andeutungsweise gesprochen haben. Wir wollen in dem (nächst dem Falle des elliptischen Integrals) einfachsten Falle $m=4$ diese Relationen herleiten, indem wir uns einer Methode bedienen, die Herr **Fuchs** angegeben hat, und bei welcher sich die gedachten Relationen als Consequenzen aus dem **Fuchs**'schen Satze der Nr. 230 (S. 403) ergeben.

Die Differentialgleichung, der die Periodicitätsmoduln des hyperelliptischen Integrals erster Gattung

(1) $$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(z-x)}},$$

d h. die Integrale von der Form

$$u = \int\limits_{(A)} \frac{dx}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(z-x)}}$$

Genüge leisten, lautet zufolge der Gleichung (7) der Nr. 247 (S. 473), wenn wir

(2) $$P_4(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4) = \psi(x)$$

setzen, wie folgt:

(E) $$\psi(z)\frac{d^4u}{dz^4} + 3\psi'(z)\frac{d^3u}{dz^3} + \frac{25}{8}\psi''(z)\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{5}{4}\psi^{(3)}(z)\frac{du}{dz} + \frac{15}{128}\psi^{(4)}(z)u = 0.$$

Die Integrale

$$\mathfrak{u} = \int\limits_{(A)} \frac{x\,dx}{\sqrt{\psi(x)(z-x)}},$$

unter denen die Periodicitätsmoduln des zweiten von (1) unabhängigen Integrals erster Gattung

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{\psi(x)(z-x)}}$$

enthalten sind, befriedigen, wie wir wissen, eine Differentialgleichung, die mit (E) zur selben Classe gehört; wir wollen den Ausdruck von $\mathfrak{u}$ durch u und seine Ableitungen herstellen.

Es ist zunächst (vergl. Nr. 240, S 447)

(3) $$\mathfrak{u} = zu - \mathfrak{U}^{(1)},$$

wenn wir setzen

$$\mathfrak{U}^{(1)} = \int\limits_{(A)} \frac{(z-x)\,dx}{\sqrt{\psi(x)(z-x)}}.$$

Da für dieses letztere Integral ξ den Werth $\frac{3}{2}$ hat, so genügt dasselbe der Differentialgleichung ($E_{\frac{3}{2}}$), deren Coefficienten nach der Formel (6) der Nr 247 (S. 473) wie folgt lauten:

$$Q_4\left(z, \frac{3}{2}\right) = -\frac{8}{3}\psi(z),\quad Q_3\left(z, \frac{3}{2}\right) = -\frac{16}{3}\psi'(z),\quad Q_2\left(z, \frac{3}{2}\right) = -3\psi''(z),$$
$$Q_1\left(z, \frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{3}\psi^{(3)}(z),\quad Q_0\left(z, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{48}\psi^{(4)}(z) = \frac{1}{2};$$

also haben wir, da

$$u = \frac{1}{2}\frac{d\mathfrak{U}^{(1)}}{dz}$$

ist, für $\mathfrak{U}^{(1)}$ den Ausdruck

$$-\mathfrak{U}^{(1)} = -\frac{8}{3}\psi(z)\frac{d^3u}{dz^3} - \frac{16}{3}\psi'(z)\frac{d^2u}{dz^2} - 3\psi''(z)\frac{du}{dz} - \frac{1}{3}\psi^{(3)}(z)u,$$

und folglich nach (3)

$$(4) \quad \mathfrak{u} = \left[z - \frac{1}{3}\psi^{(3)}(z)\right]u - 3\psi''(z)\frac{du}{dz} - \frac{16}{3}\psi'(z)\frac{d^2u}{dz^2} - \frac{8}{3}\psi(z)\frac{d^3u}{dz^3}.$$

Zufolge des Fuchs'schen Satzes der Nr. 230 (S. 403) ist die zweite associirte Differentialgleichung von (E) reductibel. Wir können dies mit Hülfe der Fundamentalsubstitutionen von (E) in folgender Weise verificiren

Betrachten wir das Fundamentalsystem

$$v_\varkappa = \int_z^{a_\varkappa} \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)(z-x)}} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4)$$

von (E), so lauten nach den Formeln (12) der Nr. 247 (S 474) die Fundamentalsubstitutionen für dasselbe:

$$\begin{array}{llll} \Theta_1 v_1 = v_1, & \Theta_1 v_2 = v_2 - 2v_1, & \Theta_1 v_3 = v_3 - 2v_1, & \Theta_1 v_4 = v_4 - 2v_1, \\ \Theta_2 v_1 = v_1 + 2v_2, & \Theta_2 v_2 = v_2, & \Theta_2 v_3 = v_3 - 2v_2, & \Theta_2 v_4 = v_4 - 2v_2, \\ \Theta_3 v_1 = v_1 + 2v_3, & \Theta_3 v_2 = v_2 + 2v_3, & \Theta_3 v_3 = v_3, & \Theta_3 v_4 = v_4 - 2v_3, \\ \Theta_4 v_1 = v_1 + 2v_4, & \Theta_4 v_2 = v_2 + 2v_4, & \Theta_4 v_3 = v_3 + 2v_4, & \Theta_4 v_4 = v_4, \end{array}$$

d h. wir haben

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hieraus finden wir sofort die entsprechenden Fundamentalsubstitutionen, die zu dem Fundamentalsysteme

$$\begin{array}{lll} v_1 v_2' - v_2 v_1' = \omega_1, & v_1 v_3' - v_3 v_1' = \omega_2, & v_1 v_4' - v_4 v_1' = \omega_3, \\ v_2 v_3' - v_3 v_2' = \omega_4, & v_2 v_4' - v_4 v_2' = \omega_5, & v_3 v_4' - v_4 v_3' = \omega_6 \end{array}$$

der zweiten Associirten von (E) gehören, indem wir gemäss dem Satze der Nr. 168 (S. 130) die zweiten Associirten der Substitutionen A_1, A_2, A_3, A_4 bilden. Bezeichnen wir dieselben durch B_1, B_2, B_3, B_4, so ist also

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der blosse Anblick dieser Substitutionen lehrt, dass das Integral

$$(5) \qquad \overline{\omega} = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 - \omega_5 + \omega_6$$

der zweiten Associirten von (E) bei den Umläufen von z um die singulären Punkte a_1, a_2, a_3, a_4 ungeändert bleibt; $\overline{\omega}$ ist also eine eindeutige Function, und da die Differentialgleichung (E) zur Fuchs'schen Classe gehört, $\overline{\omega}$ also keine Stelle der Unbestimmtheit besitzen kann, so ist es eine rationale Function von z Damit ist die Reductibilität der zweiten Associirten von (E) direct in Evidenz gesetzt.

Zwischen den $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_6$ besteht überdies die in der Nr. 170 (S. 139) allgemein abgeleitete identische Beziehung (γ)

$$(6) \qquad \omega_1\omega_6 - \omega_2\omega_5 + \omega_3\omega_4 = 0.$$

Bezeichnen wir die den Integralen v_1, v_2, v_3, v_4 entsprechenden Lösungen der Differentialgleichung für $\mathfrak{u}$ durch

$$\mathfrak{v}_\varkappa = \int_z^{a_\varkappa} \frac{x\,dx}{\sqrt{\psi(x)}\,(z-x)} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4)$$

und untersuchen die Differentialgleichung sechster Ordnung, der die Ausdrücke

$$(7) \qquad v_\iota \mathfrak{v}_\varkappa - v_\varkappa \mathfrak{v}_\iota \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, 3, 4, \ \iota < \varkappa)$$

Genüge leisten, so wissen wir nach den Ergebnissen der Nr 174 (S. 154), dass diese Differentialgleichung

$$(8) \qquad \chi_0(z)\frac{d^6\mathfrak{w}}{dz^6} + \chi_1(z)\frac{d^5\mathfrak{w}}{dz^5} + \cdots + \chi_6(z)\mathfrak{w} = 0$$

mit der zweiten Associirten von (E) zur selben Art gehören muss. Sie gehört aber offenbar mit dieser zweiten Associirten sogar zur selben Classe; denn da die Differentialgleichung, der $\mathfrak{u}$ genügt, mit (E) zur

selben Classe gehört, stimmen die singulären Stellen der $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3, \mathfrak{v}_4$ mit denen der v_1, v_2, v_3, v_4 überein; die Differentialgleichung (8) kann demnach keine anderen wesentlichen singulären Stellen haben wie die zweite Associirte von (E), d. h. keine anderen als die Stellen

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \ a_4, \ \infty.$$

Da die zweite associirte Differentialgleichung von (E) reductibel ist, so ist auch die ganze zweite associirte Art der durch (E) bestimmten Art reductibel; die Differentialgleichung (8) ist also jedenfalls reductibel. Dies folgt auch schon daraus, dass, wenn wir setzen

$$v_1\mathfrak{v}_2 - v_2\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{w}_1, \quad v_1\mathfrak{v}_3 - v_3\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{w}_2, \quad v_1\mathfrak{v}_4 - v_4\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{w}_3,$$

$$v_2\mathfrak{v}_3 - v_3\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{w}_4, \quad v_2\mathfrak{v}_4 - v_4\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{w}_5, \quad v_3\mathfrak{v}_4 - v_4\mathfrak{v}_3 = \mathfrak{w}_6,$$

das dem Integrale $\overline{\omega}$ der zweiten Associirten von (E) entsprechende Integral

$$\overline{\mathfrak{w}} = \mathfrak{w}_1 - \mathfrak{w}_2 + \mathfrak{w}_3 + \mathfrak{w}_4 - \mathfrak{w}_5 + \mathfrak{w}_6$$

von (8) offenbar auch eine rationale Function von z sein muss.

Wir werden beweisen, dass dieses Integral $\overline{\mathfrak{w}}$ von (8) identisch verschwindet, so dass also (8) in Wirklichkeit nicht von der sechsten, sondern nur von der fünften Ordnung ist.

Zu dem Ende stellen wir uns zuvörderst die Entwickelungen der Integrale von (E) in der Umgebung der singulären Stellen her.

253. Entwickelungen für die Lösungen der Differentialgleichung, der die Periodicitätsmoduln des Integrals erster Gattung genügen, in der Umgebung der singulären Punkte.

Nach den allgemein für die Tissot-Pochhammer'sche Differentialgleichung gefundenen Resultaten (Nr. 243, S. 456) sind die Wurzeln der zu $z = a_\varkappa$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung von (E)

$$0, \ 1, \ 2, \ 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4),$$

und (S. 453) das Integral $v_\varkappa$ gehört zum Exponenten 0. Aus der Form der Fundamentalsubstitutionen $A_\varkappa$ folgt demgemäss, dass die v_1, v_2, v_3, v_4 für jeden der singulären Punkte a_1, a_2, a_3, a_4 als ein canonisches Fundamentalsystem aufgefasst werden können, und dass in der Umgebung von $z = a_1$

$$v_1 = \mathfrak{P}_{11}(z \mid a_1), \qquad v_2 = \mathfrak{P}_{12}(z \mid a_1) - \frac{v_1}{\pi i} \log(z - a_1),$$

$$v_3 = \mathfrak{P}_{13}(z \mid a_1) - \frac{v_1}{\pi i} \log(z - a_1), \quad v_4 = \mathfrak{P}_{14}(z \mid a_1) - \frac{v_1}{\pi i} \log(z - a_1),$$

in der Umgebung von $z = a_2$

$$v_1 = \mathfrak{P}_{21}(z \mid a_2) + \frac{v_2}{\pi i} \log(z - a_2), \qquad v_2 = \mathfrak{P}_{22}(z \mid a_2),$$

$$v_3 = \mathfrak{P}_{23}(z \mid a_2) - \frac{v_2}{\pi i} \log(z - a_2), \qquad v_4 = \mathfrak{P}_{24}(z \mid a_2) - \frac{v_2}{\pi i} \log(z - a_2),$$

in der Umgebung von $z = a_3$

$$v_1 = \mathfrak{P}_{31}(z \mid a_3) + \frac{v_3}{\pi i} \log(z - a_3), \qquad v_2 = \mathfrak{P}_{32}(z \mid a_3) + \frac{v_3}{\pi i} \log(z - a_3),$$

$$v_3 = \mathfrak{P}_{33}(z \mid a_3), \qquad v_4 = \mathfrak{P}_{34}(z \mid a_3) - \frac{v_3}{\pi i} \log(z - a_3),$$

in der Umgebung von $z = a_4$

$$v_1 = \mathfrak{P}_{41}(z \mid a_4) + \frac{v_4}{\pi i} \log(z - a_4), \qquad v_2 = \mathfrak{P}_{42}(z \mid a_4) + \frac{v_4}{\pi i} \log(z - a_4),$$

$$v_3 = \mathfrak{P}_{43}(z \mid a_4) + \frac{v_4}{\pi i} \log(z - a_4), \qquad v_4 = \mathfrak{P}_{44}(z \mid a_4)$$

sein muss, wo die $\mathfrak{P}_{\lambda\varkappa}$ gewöhnliche Potenzreihen ihrer Argumente bedeuten, und

$$\mathfrak{P}_{11}(a_1 \mid a_1), \quad \mathfrak{P}_{22}(a_2 \mid a_2), \quad \mathfrak{P}_{33}(a_3 \mid a_3), \quad \mathfrak{P}_{44}(a_4 \mid a_4)$$

jedenfalls von Null verschieden sind

Um die Darstellung in der Umgebung von $z = \infty$ zu finden, bemerken wir, dass die v_1, v_2, v_3, v_4 bei einem Umlaufe um $z = \infty$ die Substitution

$$(9) \qquad A_5 = A_1^{-1} A_2^{-1} A_3^{-1} A_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} = (a_{i\varkappa}) \quad {\scriptstyle (i, \varkappa = 1, 2, 3, 4)}$$

erfahren. Die zugehörige Fundamentalgleichung

$$|a_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa}\omega| = 0 \qquad {\scriptstyle (i, \varkappa = 1, 2, 3, 4)}$$

hat, wie man sofort übersieht, die Wurzel

$$\omega = -1,$$

und das System

$$(a_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa}(-1)) \qquad {\scriptstyle (i, \varkappa = 1, 2, 3, 4)}$$

ist vom Range 1. Das System

$$(a_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa}(-1))^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist vom Range Null und das Gleiche gilt von allen folgenden Potenzen. In der Bezeichnung der Nr 37 (Bd. I, S 124 ff) ist also

$$\omega_\alpha = -1, \quad \tau_{\alpha 1} = \varrho_{\alpha 1} = 3, \quad \tau_{\alpha 2} = 4, \quad \tau_{\alpha 3} = 4, \ldots .$$

Es muss folglich $\omega = -1$ eine vierfache Wurzel der Fundamentalgleichung sein ($\lambda = 4$), und da ferner

$$\varrho_{\alpha 2} = \tau_{\alpha 2} - \tau_{\alpha 1} = 1, \quad \varrho_{\alpha 3} = \tau_{\alpha 3} - \tau_{\alpha 2} = 0$$

ist, so besteht das canonische Fundamentalsystem für $z = \infty$ nach der in der erwähnten Nummer aufgestellten Regel aus einer Gruppe von zwei Elementen und zwei Gruppen von je einem Elemente.

Das Integral

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4$$

wird sich bei einem Umlaufe um $z = \infty$ mit -1 multipliciren, wenn

(10) $$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0$$

ist, und es giebt drei linear unabhängige Integrale von dieser Beschaffenheit, die also in der Umgebung von $z = \infty$ in Reihenform darstellbar sind. Ein viertes Integral enthält in der Umgebung von $z = \infty$ einen Logarithmus. Diese Resultate gelten nicht nur für die Differentialgleichung (E), sondern auch für jede mit (E) zur selben Art gehörige Differentialgleichung.

Bestimmen wir nach der Regel der Nr. 59 (Bd I, S. 211) die zu $z = \infty$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung von (E), so lautet dieselbe

$$\varrho(\varrho+1)(\varrho+2)(\varrho+3) - 12\varrho(\varrho+1)(\varrho+2) + \tfrac{75}{2}\varrho(\varrho+1) - 30\varrho + \tfrac{45}{16} = 0;$$

ihre Wurzeln sind

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{5}{2},$$

also gehören zu den Exponenten $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ in Reihenform darstellbare Integrale und zum Exponenten $\frac{3}{2}$ noch ein mit Logarithmen behaftetes. Das zum Exponenten $\frac{3}{2}$ gehörige und in Reihenform darstellbare Integral können wir durch ein ähnliches Verfahren erhalten, wie in der Nr. 245 (S. 463) das daselbst betrachtete Integral $\bar{u}$

Bei der durch die Fig 16 (S. 498) angedeuteten Lage stellt sich das Integral

$$u_5 = \int \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)(z-x)}},$$

erstreckt über eine um die Punkte z und $a_5 = \infty$ herumgelegte Doppelschleife

$$s_5 s_0 s_5^{-1} s_0^{-1} = (\infty, z),$$

wie folgt dar:

$$u_5 = u_1 - u_2 + u_3 - u_4,$$

oder, da ja

$$u_5 = 4\int\limits_z^\infty \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)(z-x)}}$$

ist, das Integral erstreckt auf directem Wege, d. h. in der durch die Schnitte

$$l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_4,\ l_0$$

zerschnittenen Fläche, so haben wir

$$(11)\qquad v_5 = -\int\limits_z^\infty \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)(z-x)}} = \int\limits_\infty^z \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)(z-x)}} = v_4 - v_3 + v_2 - v_1.$$

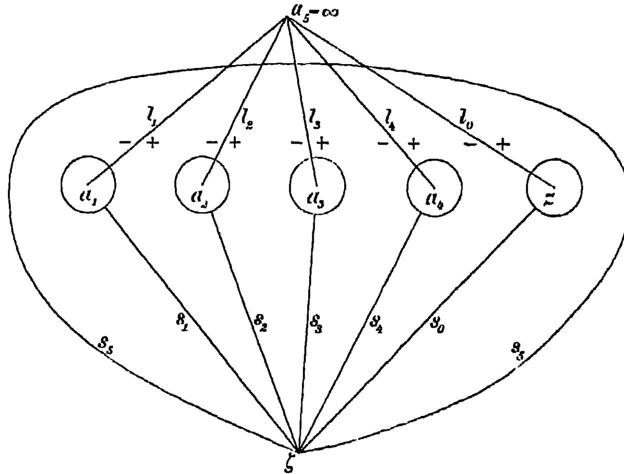


Fig 16

Hieraus erkennen wir, dass das Integral v_5 als Element des zu $z = \infty$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems angesehen werden kann, denn die Bedingung (10) ist für dasselbe erfüllt. Nach der Methode der Nr. 242 (S. 453) können wir auch leicht die Entwickelung von v_5 in der Umgebung von $z = \infty$ angeben.

Denken wir uns nämlich ζ und z in der Umgebung von $x = \infty$ gelegen, so können wir in u_5 den Integranden nach fallenden Potenzen von x entwickeln. Sei

$$\frac{1}{\sqrt{\psi(x)}} = \frac{1}{x^2}\left(\delta_0 + \frac{\delta_1}{x} + \frac{\delta_2}{x^2} + \cdot\ \ \right),\quad \delta_0 = 1,$$

dann haben wir

$$u_5 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu \int\limits_{(c,z)} \frac{(z-x)^{-\frac{1}{2}}}{x^{\nu+2}}\, dx,$$

und wenn wir die Substitution

$$\frac{1}{x} = \frac{t}{z}$$

machen, wodurch sich das über die Doppelschleife (∞, z) erstreckte Integral in ein über die Doppelschleife $(0, 1)$ der t-Ebene erstrecktes verwandelt, welches sich in der Form

$$\int\limits_{(\infty,z)} \frac{(z-x)^{-\frac{1}{2}}}{x^{\nu+2}}\, dx = \frac{-4i}{z^{\nu+\frac{3}{2}}} \mathrm{B}\left(\nu + \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

darstellen lässt, so ergiebt sich

$$u_5 = -z^{-\frac{3}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{4i\delta_\nu \mathrm{B}\left(\nu + \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)}{z^\nu}$$

und folglich

$$v_5 = z^{-\frac{3}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{i\delta_\nu \mathrm{B}\left(\nu + \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)}{z^\nu}.$$

Nun ist aber (vergl Nr. 244, S. 462) für positiv ganzzahliges ν

$$\mathrm{B}(p+\nu, q) = \frac{p(p+1) \quad (p+\nu-1)}{(p+q)(p+q+1) \quad (p+q+\nu-1)} \mathrm{B}(p, q),$$

also hat man

$$\mathrm{B}\left(\nu + \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{3}{4} \quad \frac{2\nu+1}{2\nu+2} \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

und da

$$\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\Gamma(1)} = \pi$$

ist, so finden wir endlich

$$v_5 = z^{-\frac{3}{2}} \pi i \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2}\,\frac{3}{4} \quad \frac{2\nu+1}{2\nu+2}\, \frac{\delta_\nu}{z^\nu} \tag{12}$$

Dies ist also das zum Exponenten $\frac{3}{2}$ gehörige, in Reihenform darstellbare Integral; wir wollen die Bedeutung desselben für die Theorie des Integrals erster Gattung (1) (S. 492) hervorheben, um dadurch gleichzeitig auch die übrigen Elemente des zu $z = \infty$ gehörigen canonischen

Fundamentalsystems in der für unseren Zweck bequemsten Form zu erhalten.

Denken wir uns in üblicher Weise die zu dem hyperelliptischen Gebilde

$$s^2 = (z - x)(x - a_4)(x - a_3)(x - a_2)(x - a_1) \tag{13}$$

gehörige zweiblättrige Riemann'sche Fläche construirt, indem wir z mit a_4, a_3 mit a_2 und a_1 mit dem unendlich fernen Punkte durch Verzweigungsschnitte verbinden, längs deren dann die beiden Blätter sich in einander fortsetzen. Diese fünffach zusammenhängende Fläche ($p = 2$) werde nach dem Vorgange von Riemann durch das in der Figur 17 gezeichnete System der vier Querschnitte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ in eine einfach zusammenhängende zerschnitten. In dieser letzteren sind dann die zu

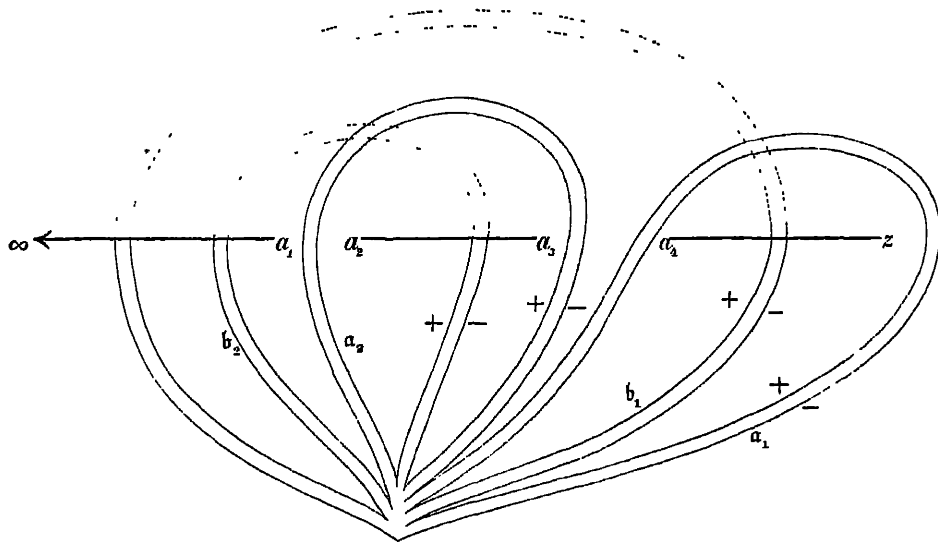


Fig 17

dem vorgelegten hyperelliptischen Gebilde gehörigen Integrale erster und zweiter Gattung eindeutige Functionen des Ortes. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ die Periodicitätsmoduln, die das Integral (1) beziehungsweise an den Querschnitten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ besitzt, d. h. die (constanten) Differenzen zwischen den Werthen des Integrals am positiven und am negativen Ufer des betreffenden Querschnittes, so stellen sich dieselben durch die in der zerschnittenen Fläche zwischen den einzelnen Verzweigungspunkten hin erstreckten Integrale in folgender Weise dar (vergl. z. B. Prym „Zur Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche", Zürich 1866, S. 7 ff.):

$$\mathfrak{B}_1 = 2\int_z^{a_4} \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)(z-x)}}, \qquad \mathfrak{B}_2 = 2\int_{a_3}^{a_2} \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)(z-x)}},$$

$$\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1 = 2\int_{a_4}^{a_3} \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)(z-x)}}, \quad -\mathfrak{A}_2 = 2\int_{a_2}^{a_1} \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)(z-x)}}.$$

Wir haben also

$$(14)\qquad \begin{cases} \mathfrak{A}_1 = 2(v_4 - v_3 + v_2 - v_1) = 2v_5, \\ \mathfrak{A}_2 = 2(v_2 - v_1), \\ \mathfrak{B}_1 = 2v_4, \\ \mathfrak{B}_2 = 2(v_2 - v_3). \end{cases}$$

Zufolge der Gleichung (9) erleidet das Fundamentalsystem

$$(15)\qquad \mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{B}_2$$

von (E) bei einem Umlaufe von z um den unendlich fernen Punkt die Substitution

$$(16)\qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

es ist also (15) ein zu $z = \infty$ gehöriges canonisches Fundamentalsystem, und zwar bilden $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ die eine zweielementige Gruppe, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$ die beiden einelementigen Gruppen. Wir haben demnach die Entwickelungen

$$\mathfrak{A}_1 = z^{-\frac{3}{2}} \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\mathfrak{B}_1 = z^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{\pi i} \mathfrak{A}_1 \log \frac{1}{z},$$

$$\mathfrak{A}_2 = z^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{P}_3\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\mathfrak{B}_2 = z^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{P}_4\left(\frac{1}{z}\right),$$

wo $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_4$ gewöhnliche Potenzreihen von z^{-1} bedeuten, von denen jedenfalls $\mathfrak{P}_1$ für $z = \infty$ nicht verschwindet. Es ist nämlich nach Gleichung (12)

$$(17)\qquad \lim_{z=\infty} z^{\frac{3}{2}} \mathfrak{A}_1 = \lim_{z=\infty} \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{z}\right) = 2 \lim_{z=\infty} z^{\frac{3}{2}} v_5 = 2\pi i.$$

Bemerken wir noch, dass zufolge der Entwickelung (12) der Nr. 242 (S. 453) in der Umgebung von $a_\varkappa$

$$(18)\qquad v_\varkappa = -\pi \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\cdots\frac{2\nu-1}{2\nu}(z-a_\varkappa)^\nu$$

gefunden wird, wo die δ_ν durch die Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{\psi(x)}} = (x-a_\varkappa)^{-\frac{1}{2}}(\delta_0 + \delta_1(x-a_\varkappa) + \delta_2(x-a_\varkappa)^2 + \cdots)$$

definirt werden, so dass also

$$\delta_0 = \psi'(a_\varkappa)^{-\frac{1}{2}}$$

und demgemäss

$$(19)\qquad \lim_{z=a_\varkappa} v_\varkappa = -\pi\psi'(a_\varkappa)^{-\frac{1}{2}} \qquad (\varkappa=1,2,3,4)$$

ist.

254 Entwickelungen für die Lösungen der Differentialgleichung, der die Periodicitätsmoduln des anderen Integrals erster Gattung genügen, in der Umgebung der singulären Punkte.

Da die Differentialgleichung für $\mathfrak{u}$ mit (E) zur selben Classe gehört, gelten für die $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3, \mathfrak{v}_4$ im Wesentlichen die analogen Entwickelungen wie die, welche für v_1, v_2, v_3, v_4 gefunden wurden. Die Gleichung (4) der Nr. 252 (S. 493) gestattet uns die betreffenden Entwickelungen unmittelbar anzugeben.

Für die im Endlichen gelegenen singulären Stellen können sich die Exponenten, zu denen die $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3, \mathfrak{v}_4$ gehören, von den entsprechenden Exponenten der v_1, v_2, v_3, v_4 nur um positive ganze Zahlen unterscheiden, da die Coefficienten der rechten Seite von Gleichung (4) ganze rationale Functionen sind. Wir haben also in der Umgebung von $a_\varkappa$

$$\mathfrak{v}_\varkappa = \mathfrak{Q}_{\varkappa\varkappa}(z\,|\,a_\varkappa),$$
$$\mathfrak{v}_\lambda = \mathfrak{Q}_{\varkappa\lambda}(z\,|\,a_\varkappa) + \varepsilon_{\varkappa\lambda}\frac{\mathfrak{v}_\varkappa}{\pi i}\log(z-a_\varkappa), \quad \lambda \neq \varkappa,$$

wo die $\mathfrak{Q}_{\varkappa1}, \mathfrak{Q}_{\varkappa2}, \mathfrak{Q}_{\varkappa3}, \mathfrak{Q}_{\varkappa4}$ gewöhnliche Potenzreihen von $z-a_\varkappa$ bedeuten, und $\varepsilon_{\varkappa\lambda}$ gleich $+1$ oder -1 zu nehmen ist, je nachdem $\varkappa$ kleiner oder grösser wie λ ist Die Entwickelung von $\mathfrak{v}_\varkappa$ ergiebt sich aus der Gleichung (12) der Nr. 242 (S. 453) ähnlich wie oben die Entwickelung von $v_\varkappa$ in der Form

$$(20)\qquad \mathfrak{v}_\varkappa = -\pi\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon_\nu \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\cdots\frac{2\nu-1}{2\nu}(z-a_\varkappa)^\nu \qquad (\varkappa=1,2,3,4),$$

wo jetzt die ε_ν durch die Gleichung

$$\frac{x}{\sqrt{\psi(x)}} = (x - a_\varkappa)^{-\frac{1}{2}}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1(x - a_\varkappa) + \varepsilon_2(x - a_\varkappa)^2 + \cdots)$$

definirt sind; es ist also

$$\lim_{z=a_\varkappa} \mathfrak{v}_\varkappa = -\pi a_\varkappa \psi'(a_\varkappa)^{-\frac{1}{2}}. \tag{21}$$

Bedeuten $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{B}_1'$, $\mathfrak{A}_2'$, $\mathfrak{B}_2'$ die Periodicitätsmoduln des Integrals erster Gattung

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{\psi(x)}(z-x)}$$

an den Querschnitten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, so ist gemäss den Gleichungen (4) und (14)

$$(22)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}_1' = 2(\mathfrak{v}_4 - \mathfrak{v}_3 + \mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1), \\ \mathfrak{A}_2' = 2(\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1), \\ \mathfrak{B}_1' = 2\mathfrak{v}_4, \\ \mathfrak{B}_2' = 2(\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_3); \end{cases}$$

um die Entwickelungen dieser Integrale in der Umgebung von $z = \infty$ aufzustellen, greifen wir wieder auf die Gleichung (4) zurück.

Sei in der Umgebung von $z = \infty$ entwickelt

$$\mathfrak{A}_1' = z^{-r_1}\mathfrak{Q}_1\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\mathfrak{A}_2' = z^{-r_3}\mathfrak{Q}_3\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\mathfrak{B}_2' = z^{-r_4}\mathfrak{Q}_4\left(\frac{1}{z}\right),$$

dann ist, da die

$$\mathfrak{A}_1',\ \mathfrak{B}_1',\ \mathfrak{A}_2',\ \mathfrak{B}_2'$$

beim Umlaufe von z um den unendlich fernen Punkt auch die Substitution (16) erfahren,

$$\mathfrak{B}_1' = z^{-r}\mathfrak{Q}_2\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{\pi i}\mathfrak{A}_1' \log \frac{1}{z},$$

wo r die kleinste der Zahlen r_1, r_3, r_4, die $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{Q}_3$, $\mathfrak{Q}_4$ gewöhnliche Potenzreihen von z^{-1} bedeuten. Setzen wir für einen Augenblick

$$\frac{3}{2} = \varrho_1, \quad \frac{1}{2} = \varrho_3, \quad \frac{1}{2} = \varrho_4,$$

und sei ferner

$$\mathfrak{P}_\varkappa\left(\frac{1}{z}\right) = \delta_{\varkappa 0} + \delta_{\varkappa 1}\frac{1}{z} + \cdots,$$

so haben wir nach (4) die Gleichungen

$$z^{-r_\varkappa}\mathfrak{Q}_\varkappa\left(\frac{1}{z}\right)=z\left(-7+\left[\frac{1}{z}\right]\right)\left(\frac{1}{z}\right)^{\varrho_\varkappa}\left(\delta_{\varkappa 0}+\left[\frac{1}{z}\right]\right)$$
$$+z^2\left(-36+\left[\frac{1}{z}\right]\right)\left(\frac{1}{z}\right)^{\varrho_\varkappa+1}\left(-\varrho_\varkappa\delta_{\varkappa 0}+\left[\frac{1}{z}\right]\right)$$
$$+z^3\left(-\frac{64}{3}+\left[\frac{1}{z}\right]\right)\left(\frac{1}{z}\right)^{\varrho_\varkappa+2}\left((\varrho_\varkappa+1)\varrho_\varkappa\delta_{\varkappa 0}+\left[\frac{1}{z}\right]\right)$$
$$+z^4\left(-\frac{8}{3}+\left[\frac{1}{z}\right]\right)\left(\frac{1}{z}\right)^{\varrho_\varkappa+3}\left(-(\varrho_\varkappa+2)(\varrho_\varkappa+1)\varrho_\varkappa\delta_{\varkappa 0}+\left[\frac{1}{z}\right]\right),$$
$$(\varkappa=1,3,4),$$

wo $\left[\frac{1}{z}\right]$ Glieder andeutet, die jedenfalls mit z^{-1} verschwinden. Die Entwickelung auf der rechten Seite hat also die Form

$$(23)\quad \left(\frac{1}{z}\right)^{\varrho_\varkappa-1}\left\{\left(-7+36\varrho_\varkappa-\frac{64}{3}\varrho_\varkappa(\varrho_\varkappa+1)+\frac{8}{3}\varrho_\varkappa(\varrho_\varkappa+1)(\varrho_\varkappa+2)\right)\delta_{\varkappa 0}+\left[\frac{1}{z}\right]\right\}.$$

Für $\varkappa=1$ ist also $r_\varkappa$ jedenfalls positiv, es ist aber auch für $\varkappa=3,4$ positiv, da für $\varrho_\varkappa=\frac{1}{2}$ der Factor von $\delta_{\varkappa 0}$ verschwindet. Wir können demnach

$$r=r_1=r_3=r_4=\frac{1}{2}$$

nehmen, so dass wir die Entwickelungen

$$\mathfrak{A}_1'=z^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{Q}_1\left(\frac{1}{z}\right),$$
$$\mathfrak{B}_1'=z^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{Q}_2\left(\frac{1}{z}\right)-\frac{1}{\pi i}\mathfrak{A}_1'\log\left(\frac{1}{z}\right),$$
$$\mathfrak{A}_2'=z^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{Q}_3\left(\frac{1}{z}\right),$$
$$\mathfrak{B}_2'=z^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{Q}_4\left(\frac{1}{z}\right)$$

erhalten, wo $\mathfrak{Q}_1\left(\frac{1}{z}\right)$ für $z=\infty$ jedenfalls von Null verschieden ist.

Sechstes Kapitel.

255. Die Weierstrass'schen Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung vom Range Zwei.

Wir kehren nunmehr zur Untersuchung des am Schlusse der Nr 252 (S. 495) aufgestellten Integrals $\overline{\mathfrak{w}}$ der Differentialgleichung (8) zurück, von welchem vorläufig nur feststeht, dass es eine rationale Function von z ist

Denken wir uns in den Ausdruck von $\overline{\mathfrak{w}}$ für die v_1, v_2, v_3, v_4 und $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3, \mathfrak{v}_4$ ihre Entwickelungen in der Umgebung der Stellen

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \ a_4, \ \infty$$

eingesetzt, so müssen sich (wie man auch direct verificiren kann) die mit einem Logarithmus behafteten Glieder wegheben, weil $\overline{\mathfrak{w}}$ allenthalben eindeutig ist. Wir erhalten also in der Umgebung von $z = a_\varkappa$

$$\overline{\mathfrak{w}} = \overset{\varkappa}{\mathfrak{P}}(z \,|\, a_\varkappa) \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4),$$

wo $\overset{\varkappa}{\mathfrak{P}}$ eine gewöhnliche Potenzreihe andeutet, und in der Umgebung des unendlich fernen Punktes

$$\overline{\mathfrak{w}} = \frac{1}{z}\,\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right),$$

wo auch $\mathfrak{P}$ eine gewöhnliche Potenzreihe vorstellt. Die Function $\overline{\mathfrak{w}}$ ist offenbar in der Umgebung jeder von den Stellen

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \ a_4, \ \infty$$

verschiedenen Stelle regulär, sie ist also allenthalben regulär und folglich, nach einem bekannten Satze der Functionentheorie, constant. Da sie überdies für $z = \infty$ verschwindet, so ist also, wie wir behauptet hatten, $\overline{\mathfrak{w}}$ identisch gleich Null.

Wir haben also die Gleichung

$$\text{(24)} \qquad \mathfrak{w}_1 - \mathfrak{w}_2 + \mathfrak{w}_3 + \mathfrak{w}_4 - \mathfrak{w}_5 + \mathfrak{w}_6 = 0,$$

und die Differentialgleichung (8), der die Ausdrücke (7) (S. 494) Genüge leisten, ist von der fünften Ordnung.

Ehe wir weiter auf allgemeine Ueberlegungen eingehen, wollen wir in die Ausdrücke der $\mathfrak{w}_\varkappa$ an Stelle der v_ι und $\mathfrak{v}_\iota$ die Periodicitätsmoduln $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{A}', \mathfrak{B}'$ einführen. Es ergiebt sich aus den Gleichungen (14) beziehungsweise (22)

$$(25)\quad \begin{cases} 2v_1 = \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{B}_1 - \mathfrak{A}_1, & 2\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{B}_2' + \mathfrak{B}_1' - \mathfrak{A}_1', \\ 2v_2 = \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1, & 2\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{B}_2' + \mathfrak{B}_1' + \mathfrak{A}_2' - \mathfrak{A}_1', \\ 2v_3 = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1, & 2\mathfrak{v}_3 = \mathfrak{B}_1' + \mathfrak{A}_2' - \mathfrak{A}_1', \\ 2v_4 = \mathfrak{B}_1, & 2\mathfrak{v}_4 = \mathfrak{B}_1'; \end{cases}$$

bilden wir hiernach die Ausdrücke (7) (Nr. 252, S. 494) und setzen die so gefundenen Werthe der $\mathfrak{w}_\varkappa$ in (24) ein, so erhalten wir

$$(26)\qquad \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1' - \mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1' + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2' - \mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_2' = 0,$$

und dies ist nichts Anderes als die von Herrn Weierstrass entdeckte Relation zwischen den Periodicitätsmoduln der zu einem hyperelliptischen Gebilde gehörigen Integrale erster Gattung in dem Falle $p = 2$.

Setzen wir noch

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2' - \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1' = a,\quad \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1' - \mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1' = b,$$
$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2' - \mathfrak{A}_1'\mathfrak{B}_2 = c,\quad \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1' - \mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_2' = d,$$
$$\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2' - \mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_2' = e,\quad \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2' - \mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1' = f,$$

so verwandelt sich die Relation (26) in

$$(26\text{a})\qquad e + b = 0;$$

überdies besteht noch zwischen den Integralen a, b, c, d, e, f der Differentialgleichung (8) (S. 494) die der Beziehung (6) entsprechende identische Gleichung

$$af - bc + cd = 0.$$

Die Quotienten

$$\frac{a}{b} = \frac{b_{12}}{\pi i},\quad \frac{c}{a} = \frac{b_{22}}{\pi i},\quad \frac{d}{a} = -\frac{b_{11}}{\pi i},\quad \frac{e}{a} = -\frac{b_{21}}{\pi i}$$

liefern dann unmittelbar die Coefficienten

$$b_{11},\ b_{12} = b_{21},\ b_{22}$$

der quadratischen Form

$$(27)\qquad b_{11}m^2 + 2b_{12}mn + b_{22}n^2,$$

die in den Exponenten der Weierstrass'schen Thetafunction (vergl. Nr 206, S. 295) auftritt.

Herr Weierstrass hat ausser der Relation (26) noch ähnliche Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln der canonischen Integrale

erster und zweiter Gattung aufgestellt; wir wollen zeigen, wie auch diese aus demselben Principe hergeleitet werden können, welches uns die Relation (26) geliefert hat.

Nach dem Theoreme der Nr. 247 (S. 475) befriedigen die Periodicitätsmoduln irgend eines canonischen Integrals erster oder zweiter Gattung, welches dem hyperelliptischen Gebilde (13) entstammt, eine Differentialgleichung, die mit (E) zur selben Classe gehört. Sei allgemein

$$(\overline{\mathrm{E}}) \qquad \varphi_0(z)\frac{d^4 w}{dz^4} + \varphi_1(z)\frac{d^3 w}{dz^3} + \varphi_2(z)\frac{d^2 w}{dz^2} + \varphi_3(z)\frac{dw}{dz} + \varphi_4(z)w = 0$$

irgend eine Differentialgleichung, die mit (E) zu derselben Art gehört, und bedeute

$$w = r_0 u + r_1\frac{du}{dz} + r_2\frac{d^2u}{dz^2} + r_3\frac{d^3u}{dz^3}$$

die Relation, welche die abhängigen Variabeln von (E) und ($\overline{\mathrm{E}}$) mit einander verknüpft. Möge ferner w_1, w_2, w_3, w_4 das dem Fundamentalsysteme v_1, v_2, v_3, v_4 von (E) entsprechende Fundamentalsystem von ($\overline{\mathrm{E}}$) darstellen, dann wissen wir, dass die sechs Determinanten

$$v_\iota w_\varkappa - v_\varkappa w_\iota \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, 3, 4,\ \iota < \varkappa)$$

eine Differentialgleichung sechster Ordnung

$$(28) \qquad \Phi_0(z)\frac{d^6 W}{dz^6} + \Phi_1(z)\frac{d^5 W}{dz^5} + \cdots + \Phi_6(z)W = 0$$

befriedigen, die mit der zweiten Associirten von (E) zur selben Art gehört. Sei ω die abhängige Variable dieser zweiten Associirten, dann ist also

$$(29) \qquad W = R_0\omega + R_1\frac{d\omega}{dz} + \cdots + R_5\frac{d^5\omega}{dz^5},$$

wo die $R_0, R_1, \cdots R_5$ rationale Functionen von z bedeuten. Bezeichnen wir nunmehr mit

$$W_1, W_2, \cdots W_6$$

die den Integralen $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_6$ der zweiten Associirten von (E) entsprechenden Lösungen von (28), so dass also die $W_\varkappa$ nichts anderes sind als die in bestimmter Reihenfolge genommenen Determinanten

$$v_\iota w_\varkappa - v_\varkappa w_\iota,$$

so ist das Integral

$$\overline{W} = W_1 - W_2 + W_3 + W_4 - W_5 + W_6$$

von (28) mit dem Integrale $\overline{\omega}$ (Gleich. (5), S. 494) der zweiten Associirten von (E) durch die Relation (29) verknüpft; es ist also $\overline{W}$

ebenso wie $\overline{\omega}$ eine rationale Function $f(z)$ von z. D. h. wir haben die Gleichung

$$(30)\qquad W_1 - W_2 + W_3 + W_4 - W_5 + W_6 = f(z).$$

Nehmen wir für $(\overline{\mathrm{E}})$ die Differentialgleichung, der die Periodicitätsmoduln irgend eines zum Gebilde (13) gehörigen canonischen Integrals erster oder zweiter Gattung genügen, so liefert uns die Gleichung (30) eine bilineare Relation zwischen diesen Periodicitätsmoduln und den entsprechenden Periodicitätsmoduln des Integrals erster Gattung (1). Analoge Relationen bestehen offenbar auch zwischen den sechs Determinanten zweiter Ordnung, die wir aus den Fundamentalsystemen

$$(31)\qquad \begin{cases} w_1, \; w_2, \; w_3, \; w_4, \\ \overline{w}_1, \; \overline{w}_2, \; \overline{w}_3, \; \overline{w}_4 \end{cases}$$

irgend zweier mit (E) zur selben Art gehöriger Differentialgleichungen bilden können; auf diese Weise ergeben sich also die sämmtlichen Weierstrass'schen Beziehungen zwischen den Periodicitätsmoduln der canonischen Integrale erster und zweiter Gattung.

Die Relation (30) wird insbesondere homogen, wenn identisch

$$(32)\qquad f(z) = R_0 \overline{\omega} + R_1 \frac{d\overline{\omega}}{dz} + \cdots + R_5 \frac{d^5 \overline{\omega}}{dz^5} = 0$$

ist; die Differentialgleichung (28) ist in diesem Falle von der fünften Ordnung. Da die zweite Associirte der durch die Differentialgleichung (E) bestimmten Art reductibel ist, so muss es nothwendig innerhalb derselben Differentialgleichungen von niedrigerer als der sechsten Ordnung geben. Wir haben gesehen, dass die Differentialgleichung (8) eine solche von niedrigerer Ordnung ist, so dass also in dem vorliegenden Falle der algebraische Typus, den die Differentialgleichungen, die durch die Determinanten zweiter Ordnung des Systems (31) befriedigt werden, innerhalb der zweiten associirten Art bilden (vergl. Nr. 174, S. 156), auch Differentialgleichungen von niedrigerer Ordnung enthält.

Die Coefficienten

$$R_0, \; R_1, \; \cdots \; R_5$$

der Gleichung (32) hängen nur von den Coefficienten

$$r_0, \; r_1, \; r_2, \; r_3$$

der zwischen w und u bestehenden Beziehung ab; wenn man also die rationale Function $\overline{\omega}$ als bekannt ansieht, so stellt die Gleichung (32) eine Bedingungsgleichung dar, der die r_0, r_1, r_2, r_3 genügen müssen, damit die Relation (30) homogen, d. h. die Differentialgleichung (28) von niedrigerer als der sechsten Ordnung werde. In dieser Form hat

Herr Fuchs jene Bedingungsgleichung aufgestellt. Anders gefasst kann man sagen: die Gleichung (30) wird dann und nur dann homogen werden, wenn die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen der Differentialgleichung $(\bar{E})$ so beschaffen sind, dass die Exponenten, zu denen das Integral $\overline{W}$ von (28) gehört, für keinen der singulären Punkte

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \infty$$

negativ und wenigstens für einen derselben wesentlich positiv sind. In der That muss dann, wie wir es für die Differentialgleichung, der die Periodicitätsmoduln des Integrals erster Gattung

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{\psi(x)(z-x)}}$$

genügen, auseinandergesetzt haben, $f(z)$ verschwinden. Sind die Exponenten von $\overline{W}$ sämmtlich gleich Null, so ist $f(z)$ constant, kann aber von Null verschieden sein.

256. **Herleitung der Weierstrass'schen Relationen aus dem Satze von der Vertauschung von Parameter und Argument.**

Die in den vorhergehenden Nummern für die Fälle eines hyperelliptischen Gebildes vom Range $p = 1$ (elliptisches) und vom Range $p = 2$ nach der Methode von Herrn Fuchs entwickelten Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln der Integrale erster und zweiter Gattung wurden, wie wir bereits (Nr 232, S. 414) bemerkt haben, von Herrn Weierstrass im allgemeinen Falle eines beliebigen p aus dem Abel'schen Satze von der Vertauschung des Parameters mit dem Argumente hergeleitet. Wir wollen die Weierstrass'sche Methode hier darlegen, um dann an dieselbe eine Uebersicht über die Ergebnisse anzuknüpfen, die Herr Fuchs aus der Verallgemeinerung des Vertauschungssatzes auf Integrale beliebiger linearer Differentialgleichungen für die Theorie der letzteren gewonnen hat

Wir halten die in der Nr. 232 (S 412 ff) eingeführte Bezeichnungsweise fest, setzen also

$$P_1(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m),$$

nehmen aber jetzt m ungerade, so dass $x = \infty$ eine Verzweigungsstelle des hyperelliptischen Gebildes

(1) $$s^2 = P_1(x)$$

ist. Die Punkte $a_1, a_2, \cdots a_m$ (die Herr Weierstrass als reale Grössen annimmt) denken wir uns, nach Herrn Fuchs unter einander

und mit $x = \infty$ durch eine continuirliche sich selbst nicht durchschneidende Curve l verbunden, die als Querschnitt gelten soll. Mögen nunmehr a, b irgend zwei Nullstellen der Function $P_1(x)$, α, β irgend zwei Punkte der Curve l bedeuten, die so beschaffen sind, dass die Strecken von a bis α und von b bis β keinen Punkt mit einander gemein haben

Integriren wir dann die den Vertauschungssatz darstellende Gleichung (10) der Nr. 232 (S. 413) in Bezug auf x von a bis α, in Bezug auf z von b bis β beide Mal längs der Curve l, so erhalten wir

$$(2) \qquad \int_a^\alpha \int_b^\beta \frac{U\,dx\,dz}{\sqrt{P_1(x)}\sqrt{P_1(z)}} = \sqrt{P_1(\alpha)} \int_b^\beta \frac{dz}{(z-\alpha)\sqrt{P_1(z)}} - \sqrt{P_1(\beta)} \int_a^\alpha \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{P_1(x)}}.$$

Nehmen wir nun

$$a = a_\mu, \quad b = a_\nu, \quad \mu \neq \nu,$$

so können wir, wenn z. B.

$$(3) \qquad \mu + 1 < \nu < m$$

ist, die oberen Grenzen α, β so wählen, dass

$$\alpha = a_{\mu+1}, \quad \beta = a_{\nu+1}$$

sei. Dann ist nach Gleichung (2)

$$(4) \qquad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} \frac{U\,dx\,dz}{\sqrt{P_1(x)}\sqrt{P_1(z)}} = 0.$$

Wenn dagegen $\nu = \mu + 1$ genommen wird, so ist der Werth des Integrals

$$(5) \qquad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} \frac{U\,dx\,dz}{\sqrt{P_1(x)}\sqrt{P_1(z)}}$$

nicht Null; wir wollen uns die Aufgabe stellen, diesen Werth zu berechnen.

Setzen wir

$$a_\mu = a, \quad a_{\mu+1} = c, \quad a_{\mu+2} = b,$$

so verwandelt sich das Integral (5) in

$$S = -\int_a^c \int_b^c \frac{U\,dx\,dz}{\sqrt{P_1(x)}\sqrt{P_1(z)}}.$$

Seien nun s, t zwei veränderliche Grössen von der Beschaffenheit, dass die Punkte $c-s$ und $c+t$ stets auf der Curve l verbleiben, und zwar $c-s$ auf dem zwischen a und c, dagegen $c+t$ auf dem zwischen c und b gelegenen Theile dieser Curve Dann ist, wenn wir

$$S' = -\int_a^{c-s}\int_b^{c+t} \frac{U\,dx\,dz}{\sqrt{P_1(x)}\sqrt{P_1(z)}}$$

setzen, offenbar

(6) $$S = \lim_{\substack{t=0\\ s=0}} S'.$$

Nehmen wir in der Gleichung (2)

$$\alpha = c - s, \quad \beta = c + t,$$

so ergiebt sich

$$S' = \int_a^{c-s} \frac{\sqrt{P_1(c+t)}\,dx}{(x-c-t)\sqrt{P_1(x)}} - \int_b^{c+t} \frac{\sqrt{P_1(c-s)}\,dz}{(z-c+s)\sqrt{P_1(z)}}.$$

Wir machen nun in den beiden Integralen auf der rechten Seite beziehungsweise die Substitutionen

$$x = c - x', \quad z = c + z'$$

und schreiben dann wieder x beziehungsweise z an Stelle von x' und z'; wir finden auf diese Weise

$$S' = \int_{c-a}^{s} \frac{\sqrt{P_1(c+t)}\,dx}{(x+t)\sqrt{P_1(c-x)}} - \int_{b-c}^{t} \frac{\sqrt{P_1(c-s)}\,dz}{(z+s)\sqrt{P_1(c+z)}}.$$

Seien σ, τ feste Werthe von s beziehungsweise t, die so gewählt sind, dass, wenn $c-s$ auf l zwischen c und $c-\sigma$, und $c+t$ ebenfalls auf l zwischen c und $c+\tau$ liegt, die Ausdrücke

$$\sqrt{P_1(c-s)}, \quad \sqrt{P_1(c+t)}$$

durch die in der Umgebung von $s=0$ beziehungsweise $t=0$ gültigen Entwickelungen darstellbar sind, dann ist

$$S' = \sqrt{P_1(c+t)}\int_{c-a}^{\sigma} \frac{dx}{(x+t)\sqrt{P_1(c-x)}} - \sqrt{P_1(c-s)}\int_{b-c}^{\tau} \frac{dz}{(z+s)\sqrt{P_1(z+c)}}$$

$$+ \int_{\sigma}^{s} \frac{\sqrt{P_1(c+t)}\,dx}{(x+t)\sqrt{P_1(c-x)}} - \int_{\tau}^{t} \frac{\sqrt{P_1(c-s)}\,dz}{(z+s)\sqrt{P_1(c+z)}},$$

und da die beiden ersten Glieder des Aggregates auf der rechten Seite dieser Gleichung für $t=0$, $s=0$ verschwinden, so haben wir

$$(7)\qquad \lim_{\substack{t=0\\s=0}} S' = \lim_{\substack{t=0\\s=0}} \left\{ \int_{\sigma}^{s} \frac{\sqrt{P_1(c+t)}\,dx}{(x+t)\sqrt{P_1(c-x)}} - \int_{\tau}^{t} \frac{\sqrt{P_1(c-s)}\,dz}{(z+s)\sqrt{P_1(c+z)}} \right\}.$$

Nun ist aber offenbar in der Umgebung von $z=0$ beziehungsweise $x=0$

$$(8)\qquad \begin{cases} \sqrt{P_1(c+z)} = i\sqrt{-P_1'(c)}\sqrt{z(1+\mathfrak{P}_1(z))}, \\ \sqrt{P_1(c-x)} = \sqrt{-P_1'(c)}\sqrt{x(1+\mathfrak{P}_1(-x))}, \end{cases}$$

wo $\mathfrak{P}_1(z)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von z fortschreitende Reihe bedeutet, die für $z=0$ verschwindet. Wir finden also, wenn wir, was zufolge der über σ, τ getroffenen Bestimmungen zulässig ist, in die Integrale auf der rechten Seite der Gleichung (7) die Entwickelungen (8) einsetzen,

$$\int_{\sigma}^{s} \frac{\sqrt{P_1(c+t)}\,dx}{(x+t)\sqrt{P_1(c-x)}} = i\int_{\sigma}^{s} \frac{\sqrt{t}}{(x+t)\sqrt{x}} \left\{\frac{1+\mathfrak{P}_1(t)}{1+\mathfrak{P}_1(-x)}\right\}^{\frac{1}{2}} dx,$$

also, wenn wir weiter entwickeln und t gegen Null convergiren lassen,

$$\lim_{t=0} \int_{\sigma}^{s} \frac{\sqrt{P_1(c+t)}\,dx}{(x+t)\sqrt{P_1(c-x)}} = i\lim_{t=0} \int_{\sigma}^{s} \frac{\sqrt{t}\,dx}{(x+t)\sqrt{x}},$$

und analog

$$\lim_{s=0} \int_{\tau}^{t} \frac{\sqrt{P_1(c-t)}\,dz}{(z+s)\sqrt{P_1(c+z)}} = -i\lim_{s=0} \int_{\tau}^{t} \frac{\sqrt{s}\,dz}{(s+z)\sqrt{z}}.$$

Die Gleichung (7) verwandelt sich demgemäss in

$$\lim_{\substack{s=0\\t=0}} S' = i\lim_{\substack{s=0\\t=0}} \left\{ \int_{\sigma}^{s} \frac{\sqrt{t}\,dx}{(x+t)\sqrt{x}} + \int_{\tau}^{t} \frac{\sqrt{s}\,dz}{(s+z)\sqrt{z}} \right\}.$$

Führen wir in dem ersten Integrale unter dem lim-Zeichen durch die Gleichung

$$\sqrt{x} = \xi\sqrt{t},$$

in dem zweiten Integrale durch die Gleichung

$$\sqrt{z} = \frac{1}{\xi}\sqrt{s}$$

eine neue Integrationsvariable ein, und setzen

$$\sqrt{\frac{s}{\tau}} = p, \quad \sqrt{\frac{\sigma}{t}} = q,$$

so verwandelt sich die Summe beider Integrale in

$$2\int_q^p \frac{d\xi}{1+\xi^2};$$

also ergiebt sich, da mit abnehmendem s und t, p gegen Null und q gegen Unendlich convergirt,

$$\lim_{\substack{s=0\\t=0}} S' = 2i\int_\infty^0 \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \frac{\pi}{i}.$$

Wir finden also nach Gleichung (6)

$$S = \frac{\pi}{i}$$

und erhalten somit die der Gleichung (4) an die Seite zu stellende Formel

$$\int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} \frac{U\,dx\,dz}{\sqrt{P_1(x)}\sqrt{P_1(z)}} = \frac{\pi}{i} \tag{9}$$

Beachtet man, dass U eine ganze rationale Function von x und z ist, so erkennt man, dass die linken Seiten der Gleichungen (4) und (9) als homogene bilineare Ausdrücke von Periodicitätsmoduln der zu dem Gebilde (1) gehörigen canonischen Integrale erster und zweiter Gattung darstellbar sind; sie liefern für

$$\mu, \nu = 1, 2, \cdots m$$

die sämmtlichen Relationen zwischen diesen Periodicitätsmoduln.

257. Untersuchungen von Fuchs, die an den allgemeinen Abel'schen Vertauschungssatz anknüpfen. Die erste Fuchs'sche Gleichung.

Herr Fuchs hat nun an den allgemeinen Abel'schen Vertauschungssatz, wie er durch die Gleichung (Γ) der Nr 232 (S. 412) für die beliebige Differentialgleichung

$$D_x(y) = P_0\frac{d^ny}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_ny = 0 \tag{A}$$

dargestellt wird, ähnliche Folgerungen geknüpft, wie die, welche wir im Vorhergehenden für den besonderen Fall $n = 1$ und (vergl. Nr. 232, S. 413)

$$P_0(x) = \frac{1}{2}P_1'(x)$$

aus der Gleichung (10) der Nr. 232 gezogen hatten, und ist dadurch zu ausserordentlich tief liegenden Ergebnissen gelangt, deren Wichtigkeit besonders für die Behandlung von Umkehrproblemen bei linearen Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung auf der Hand liegt, und die darum der weiteren Forschung ein weites und aussichtsvolles Gebiet darzubieten scheinen.

Indem wir in der Gleichung (Γ) die beiden Variabeln x und z mit einander vertauschen, nimmt der Vertauschungssatz von Abel die folgende Gestalt an:

$$(\Gamma) \qquad \frac{d}{dx} D_x\left(y(x), \frac{\eta(z)}{x-z}\right) - \frac{d}{dz} D_z\left(\frac{y(x)}{z-x}, \eta(z)\right) = U y(x)\eta(z),$$

wo $y(x)$ ein Integral von (A), $\eta(x)$ ein Integral der zu (A) adjungirten Differentialgleichung

$$(\mathrm{A}') \qquad D_x'(\eta) = 0$$

bedeutet, und wo ferner

$$D_x(f, g) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=0}^{i-1} (-1)^h \frac{d^h(P_i(x)\, g)}{dx^h} \frac{d^{i-h-1} f}{dx^{i-h-1}}$$

den begleitenden bilinearen Differentialausdruck von (A), U den Ausdruck

$$(10) \qquad U = -\sum_{\varkappa=0}^{n} (-1)^\varkappa \frac{d^\varkappa}{dx^\varkappa}\left[\frac{P_\varkappa(x) - P_\varkappa(z)}{x-z}\right] = \sum_{\iota}\sum_{\varkappa} c_{\iota\varkappa} z^\iota x^\varkappa$$

darstellt.

Es möge die Differentialgleichung (A) der Fuchs'schen Classe angehören, ferner sei

$$P_0(x) = [\psi(x)]^n,$$

wo $\psi(x)$ ein Product von lauter von einander verschiedenen linearen Factoren

$$\psi(x) = (x-a_1)\cdots(x-a_m)(x-b_1)\cdots(x-b_\varrho)$$

bedeutet; und zwar mögen die Punkte

$$a_1,\ a_2,\ \cdots a_m,\ a_{m+1} = \infty$$

diejenigen Verzweigungspunkte des allgemeinen Integrals von (A), in denen sich auch die Integralquotienten verzweigen, die

$$b_1,\ b_2,\ \cdots b_\varrho$$

dagegen die scheinbar singulären Stellen sein.

Wir bezeichnen mit

$$r_{\varkappa 1},\ r_{\varkappa 2},\ \cdots r_{\varkappa n}$$

die Wurzeln der zu $x = a_\varkappa$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen von (A), für $\varkappa = 1, 2, \cdots m$, mit

$$y_{\varkappa 1}, \; y_{\varkappa 2}, \cdots y_{\varkappa n}$$

die Elemente des canonischen Fundamentalsystems von (A), mit

$$\eta_{\varkappa 1}, \; \eta_{\varkappa 2}, \cdots \eta_{\varkappa n}$$

die des entsprechenden (adjungirten) Fundamentalsystems von (A′) und setzen voraus, dass die Wurzeln $r_{\varkappa 1}, r_{\varkappa 2}, \cdots r_{\varkappa n}$ sich von einander nicht um ganze Zahlen unterscheiden, und dass die realen Theile derselben zwischen Null und der negativen Einheit gelegen sind.

Nach den Ergebnissen der Nr. 223 (S. 372) involvirt die letztere Annahme insofern keine Beschränkung der Allgemeinheit, als wir von einer gegebenen Differentialgleichung stets zu einer Differentialgleichung derselben Classe übergehen können, fur welche diese Annahme erfüllt ist, und als die Resultate, die wir im Auge haben, sich auf die Fundamentalsubstitutionen der vorgelegten Differentialgleichung beziehen, also nicht nur für die specielle Gleichung (A), sondern für jede mit (A) zur selben Art gehörige Gleichung Gültigkeit haben.

Die Entwickelungen der $y_{\varkappa\lambda}$ in der Umgebung von $x = a_\varkappa$ haben dann die Gestalt

$$(11) \qquad y_{\varkappa\lambda} = (x - a_\varkappa)^{r_{\varkappa\lambda}} \mathfrak{P}_{\varkappa\lambda}(x \,|\, a_\varkappa) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n),$$

die der adjungirten Integrale lauten (vergl. Nr 109, Bd. I, S. 391)

$$(12) \qquad \eta_{\nu\lambda} = (x - a_\varkappa)^{-r_{\varkappa\lambda} - 1} \overline{\mathfrak{P}}_{\varkappa\lambda}(x \,|\, a_\varkappa) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n),$$

wo die $\mathfrak{P}_{\varkappa\lambda}$, $\overline{\mathfrak{P}}_{\varkappa\lambda}$ gewöhnliche Potenzreihen von $x - a_\varkappa$ bedeuten, die für $x = a_\varkappa$ nicht verschwinden, und wir sehen, dass die für die $r_{\varkappa 1}, r_{\varkappa 2}, \cdots r_{\varkappa n}$ gemachten Voraussetzungen auch für die Wurzeln

$$-r_{\nu 1} - 1, \quad -r_{\varkappa 2} - 1, \; \cdots \; -r_{\varkappa n} - 1$$

der determinirenden Fundamentalgleichung der adjungirten Differentialgleichung erfüllt sind, d. h. auch diese unterscheiden sich nicht um ganze Zahlen und haben reale Theile, die zwischen Null und der negativen Einheit liegen

Endlich seien

$$y_1, \; y_2, \; \ldots \; y_n$$

beziehungsweise

$$\eta_1, \; \eta_2, \cdots \eta_n$$

die zu $x = \infty$ gehörigen canonischen Fundamentalsysteme der Differentialgleichungen (A) beziehungsweise (A′), und die Wurzeln der zugehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen mögen ebenfalls nicht um ganze Zahlen von einander verschieden sein.

Betrachten wir den Ausdruck

$$D_x\left(y(x), \frac{1}{x-z}\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=0}^{i-1} (-1)^h \frac{d^h\left(P_i(x)\frac{1}{x-z}\right)}{dx^h} \frac{d^{i-h-1}y(x)}{dx^{i-h-1}}$$

in der Umgebung von $x = a_\varkappa$, so ist zunächst

$$y(x) = \sum_{\lambda=1}^{n} c_\lambda y_{\varkappa\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{n} c_\lambda (x - a_\varkappa)^{r_{\varkappa\lambda}} \mathfrak{P}_{\varkappa\lambda}(x \mid a_\varkappa),$$

also nach $(i - h - 1)$-maliger Differentiation

$$y^{(i-h-1)}(x) = \sum_{\lambda=1}^{n} c_\lambda (x - a_\varkappa)^{r_{\varkappa\lambda} - i + h + 1} \overline{\mathfrak{P}}_{\varkappa\lambda}^{(i-h-1)}(x \mid a_\varkappa),$$

wo die $\overline{\mathfrak{P}}_{\varkappa\lambda}^{(i-h-1)}$ gewöhnliche Potenzreihen von $x - a_\varkappa$, die c_λ Constanten bedeuten. Ferner hat man, da (A) zur Fuchs'schen Classe gehören sollte (vergl. Nr. 62, Bd. I, S. 220),

$$P_i(x) = F_{(n-i)(m+\varrho-1)}(x)\,[\psi(x)]^i,$$

wo F eine ganze Function von dem durch den Index angegebenen Grade bedeutet, und demgemäss

$$\frac{d^h}{dx^h}\left\{P_i(x)\,\frac{1}{x-z}\right\} = \frac{(x-a_\varkappa)^{i-h}}{(x-z)^{h+1}}\,\mathfrak{P}(x \mid a_\varkappa)$$

Also ist in der Umgebung von $x = a_\varkappa$

$$D_x\left(y(x), \frac{1}{x-z}\right) = \frac{1}{(x-z)^h} \sum_{\lambda=1}^{n} (x - a_\varkappa)^{r_{\varkappa\lambda}+1} \mathfrak{P}_\lambda(x \mid a_\varkappa),$$

wo die $\mathfrak{P}_\lambda$ ebenso wie $\mathfrak{P}$ gewöhnliche Potenzreihen von $x - a_\varkappa$ darstellen, und daraus folgt, dass dieser Ausdruck für $x = a_\varkappa$ verschwindet, da ja nach unserer Voraussetzung die realen Theile der Grössen

$$r_{\varkappa\lambda} + 1$$

wesentlich positiv sind. D. h. es ist

$$\lim_{x=a_\varkappa} D_x\left(y(x), \frac{1}{x-z}\right) = D_{x=a_\varkappa}\left(y(x), \frac{1}{x-z}\right) = 0, \tag{13}$$

und analog ergiebt sich

$$\lim_{z=a_\varkappa} D_z\left(\frac{1}{z-x}, \eta(z)\right) = D_{z=a_\varkappa}\left(\frac{1}{z-x}, \eta(z)\right) = 0. \tag{14}$$

Nun können wir sofort zu einer Gleichung gelangen, aus welcher die Weierstrass'sche Gleichung (4) durch Specialisirung hervorgeht.

Sei, wie in der vorigen Nummer, l eine die singulären Punkte

$$a_1,\ a_2,\ \cdots a_m,\ \infty$$

verbindende Curve, so sind in der durch l zerschnittenen Ebene die Integrale von (A) und (A') eindeutig bestimmt. Bedeuten dann a, b irgend zwei der Punkte $a_1, a_2, \cdots a_m$, ferner α, β ein Werthepaar von x, z auf l von der Beschaffenheit, dass die Stücke $(a \cdots \alpha)$ und $(b \cdots \beta)$ keinen Punkt mit einander gemein haben, so folgt, wenn wir die Gleichung (U) in Bezug auf x von a bis α und in Bezug auf z von b bis β integriren und beachten, dass

$$(15)\quad \begin{cases} D_x\left(y(x), \int_b^\beta \frac{\eta(z)dz}{x-z}\right) = \int_b^\beta D_x\left(y(x), \frac{1}{x-z}\right)\eta(z)dz, \\ D_z\left(\int_a^\alpha \frac{y(x)dx}{x-z}, \eta(z)\right) = \int_a^\alpha D_z\left(\frac{1}{x-z}, \eta(z)\right) y(x)dx \end{cases}$$

ist, mit Rücksicht auf (13), (14) die der Gleichung (2) analoge Gleichung

$$(16)\quad \int_a^\alpha \int_b^\beta U y(x)\eta(z)dxdz$$
$$= D_\alpha\left(y(\alpha), \int_b^\beta \frac{\eta(z)dz}{\alpha - z}\right) - D_\beta\left(\int_a^\alpha \frac{y(x)dx}{x-\beta}, \eta(\beta)\right).$$

Die Integrale haben einen Sinn, da die unbestimmten Integrale auch in den Punkten a, b, wo die Integranden unendlich werden könnten, zufolge der über die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen getroffenen Bestimmungen endliche bestimmte Werthe annehmen.

Für die Wahl

$$a = a_\mu,\quad b = a_\nu$$

können nun, wenn die Ungleichung (3) erfüllt ist,

$$\alpha = a_{\mu+1},\quad \beta = a_{\nu+1}$$

genommen werden. Beachtet man dann wieder die Gleichungen (15), so ergiebt sich mit Rücksicht auf die Gleichungen (13), (14) die erste Fuchs'sche Gleichung

$$(17)\quad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} U y(x)\eta(z)dxdz = 0$$
$$(\mu, \nu = 1, 2, \cdots m,\ \mu + 1 < \nu < m).$$

Ungleich viel schwieriger ist die Herleitung der zweiten Fuchs'schen Gleichung, aus welcher die Weierstrass'sche Gleichung (9)

durch Specialisirung gewonnen werden kann; es handelt sich dabei um die Berechnung des Doppelintegrales

(18) $$S_\mu = \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} U y(x) \eta(z)\, dx\, dz.$$

258 Die zweite Fuchs'sche Gleichung.

Wir führen ähnlich wie in der Nr. 256 (S. 511) zwei auf der Curve l gelegene veränderliche Punkte ein, die zu beiden Seiten von $a_{\mu+1}$, aber in der Umgebung dieses Punktes liegen. Setzen wir wieder

$$a_\mu = a, \quad a_{\mu+1} = c, \quad a_{\mu+2} = b,$$

so möge der veränderliche Punkt

$$c - s = \xi$$

auf l zwischen a und c, der Punkt

$$c + t = \zeta$$

auf l zwischen c und b liegen. Die den festen Werthen

$$s = \sigma, \quad t = \tau$$

entsprechenden Punkte

$$c - \sigma = a', \quad c + \tau = b'$$

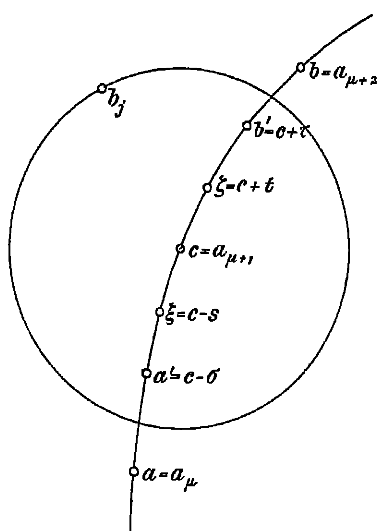


Fig 18

mögen so beschaffen sein, dass, wenn s in dem Intervalle von σ bis Null, und t in dem Intervalle von Null bis τ verbleibt, die Punkte ξ, ζ auf l und innerhalb der Umgebung von c, d. h. innerhalb des Kreises verbleiben, der den Convergenzbereich der Entwickelungen der Integrale

$$y_{\mu+1,\lambda}, \quad \eta_{\mu+1,\lambda}$$

nach aufsteigenden Potenzen von $x - a_\varkappa$ bildet (vergl. Fig. 18)

Setzen wir dann

$$S'_\mu = \int_a^\xi \int_\zeta^b U y(x) \eta(z)\, dz\, dx,$$

so ist offenbar

(19) $$S_\mu = \lim_{\substack{s=0 \\ t=0}} S'_\mu$$

Ferner hat man

$$S'_\mu = -\int_a^\xi \int_b^\zeta U y(x)\,\eta(z)\,dx\,dz,$$

also folgt, wenn wir beide Integrationsintervalle in den Punkten a' beziehungsweise b' theilen,

$$-S'_\mu = \int_a^{a'}\int_b^{b'} U y(x)\,\eta(z)\,dx\,dz + \int_a^{a'}\int_{b'}^{\zeta} U y(x)\,\eta(z)\,dx\,dz$$
$$+ \int_{a'}^{\xi}\int_b^{b'} U y(x)\,\eta(z)\,dx\,dz + \int_{a'}^{\xi}\int_{b'}^{\zeta} U y(x)\,\eta(z)\,dx\,dz.$$

Wir formen nun jedes dieser vier Doppelintegrale mit Hülfe der Gleichung (Γ) um, indem wir allemal auf die Gleichungen (13), (14), (15) Rücksicht nehmen; wir erhalten auf diese Weise

$$\int_a^{a'}\int_b^{b'} U y(x)\,\eta(z)\,dx\,dz = D_{x=a'}\left(y(x), \int_b^{b'}\frac{\eta(z)\,dz}{x-z}\right)$$
$$- D_{z=b'}\left(\int_a^{a'}\frac{y(x)\,dx}{z-x}, \eta(z)\right),$$

$$\int_a^{a'}\int_{b'}^{\zeta} U y(x)\,\eta(z)\,dx\,dz = D_{x=a'}\left(y(x), \int_{b'}^{\zeta}\frac{\eta(z)\,dz}{x-z}\right)$$
$$- D_{z=\zeta}\left(\int_a^{a'}\frac{y(x)\,dx}{z-x}, \eta(z)\right) + D_{z=b'}\left(\int_a^{a}\frac{y(x)\,dx}{z-x}, \eta(z)\right),$$

$$\int_{a'}^{\xi}\int_b^{b'} U y(x)\,\eta(z)\,dx\,dz = D_{x=\xi}\left(y(x), \int_b^{b'}\frac{\eta(z)\,dz}{x-z}\right)$$
$$- D_{x=a'}\left(y(x), \int_b^{b'}\frac{\eta(z)\,dz}{x-z}\right) - D_{z=b'}\left(\int_{a'}^{\xi}\frac{y(x)\,dx}{z-x}, \eta(z)\right),$$

$$\int_{a'}^{\xi}\int_{b'}^{\zeta} U y(x)\,\eta(z)\,dx\,dz = D_{x=\xi}\left(y(x), \int_{b'}^{\zeta}\frac{\eta(z)\,dz}{x-z}\right) - D_{x=a'}\left(y(x), \int_{b'}^{\zeta}\frac{\eta(z)\,dz}{x-z}\right)$$
$$- D_{z=\zeta}\left(\int_{a'}^{\xi}\frac{y(x)\,dx}{z-x}, \eta(z)\right) + D_{z=b'}\left(\int_{a'}^{\xi}\frac{y(x)\,dx}{z-x}, \eta(z)\right).$$

Addiren wir diese vier Gleichungen und beachten, dass nach (13), (14), (15)

$$\lim_{\zeta=c} D_{z=\zeta}\left(\int_a^{a'} \frac{y(x)\,dx}{z-x},\ \eta(z)\right) = \int_a^{a'} D_{z=c}\left(\frac{1}{z-x},\ \eta(z)\right) y(x)\,dx = 0,$$

$$\lim_{\xi=c} D_{x=\xi}\left(y(x),\ \int_b^{b'} \frac{\eta(z)\,dz}{x-z}\right) = \int_b^{b'} D_{x=c}\left(y(x),\ \frac{1}{x-z}\right)\eta(z)\,dz = 0$$

ist, so erhalten wir nach Gleichung (19)

$$(20)\quad S_\mu = \lim_{\substack{\xi=c\\ \zeta=c}} S'_\mu = \lim_{\substack{\xi=c\\ \zeta=c}} \left\{ D_{x=\xi}\left(y(x),\ \int_\xi^{b'} \frac{\eta(z)\,dz}{x-z}\right) + D_{z=\zeta}\left(\int_{a'}^{\xi} \frac{y(x)\,dx}{z-x},\ \eta(z)\right)\right\}.$$

Denken wir uns das Integral y von (A) z. B. durch das Fundamentalsystem

$$y_1,\ y_2,\ \cdots\ y_n,$$

das Integral η von (A') durch das adjungirte Fundamentalsystem

$$\eta_1,\ \eta_2,\ \cdots\ \eta_n$$

dargestellt, so lässt sich das Doppelintegral S_μ als ein Aggregat von Gliedern der Form

$$S_\mu^{(\alpha,\beta)} = \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} U y_\alpha(x)\,\eta_\beta(z)\,dx\,dz$$

schreiben. Seien

$$(21)\quad \begin{cases} y_\alpha = \sum_{i=1}^{n} b_{\alpha i}\, y_{\mu+1,i} & (\alpha = 1, 2, \ldots n), \\ \eta_\beta = \sum_{i=1}^{n} c_{\beta i}\, \eta_{\mu+1,i} & (\beta = 1, 2, \ldots n) \end{cases}$$

die zwischen den Punkten $a_{\mu+1}$ und ∞ vermittelnden Uebergangssubstitutionen der Differentialgleichungen (A) beziehungsweise (A'), dann ist

$$S_\mu^{(\alpha,\beta)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{\alpha i}\, c_{\beta j} \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} U y_{\mu+1,i}(x)\,\eta_{\mu+1,j}(z)\,dx\,dz,$$

also mit Rücksicht auf (20)

$$(22)\quad S_\mu^{(\alpha,\beta)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{\alpha i}\, c_{\beta j} \lim_{\substack{\xi=c\\ \zeta=c}} \left\{ D_{x=\xi}\left(y_{\mu+1,i}(x),\ \int_\zeta^{b'} \frac{\eta_{\mu+1,j}(z)\,dz}{x-z}\right) \right.$$
$$\left. + D_{z=\zeta}\left(\int_{a'}^{\xi} \frac{y_{\mu+1,i}(x)\,dx}{z-x},\ \eta_{\mu+1,j}(z)\right)\right\}$$

Die Berechnung des Doppelintegrales (18) ist somit auf die Berechnung des auf der rechten Seite unter dem Summenzeichen auftretenden Grenzwerthes zurückgeführt. Herr Fuchs findet, dass dieser Grenzwerth verschwindet, wenn i von j verschieden ist, und dass er für $i = j$ den Werth

$$(-1)^n \frac{\pi e^{-\pi r_{\mu+1,i}\sqrt{-1}}}{\sin \pi r_{\mu+1,i}}$$

annimmt. Wir versagen es uns, die überaus feine und eigenartige Rechnung, durch welche Herr Fuchs dieses einfache Resultat erzielt, hier wiederzugeben, verweisen vielmehr auf die Abhandlung von Herrn Fuchs im 76. Bande des Crelle'schen Journals, wo diese Rechnung in den Nummern 13—19 auf S. 195—206 durchgeführt ist. Auf Grund dieses Ergebnisses findet Herr Fuchs somit die Gleichung

$$(23) \qquad S_\mu^{(\alpha,\beta)} = \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} U y_\alpha(x) \eta_\beta(z)\, dx\, dz = \sum_{i=1}^{n} (-1)^n \pi b_{\alpha i} c_{\beta i} \frac{e^{-\pi r_{\mu+1,i}\sqrt{-1}}}{\sin \pi r_{\mu+1,i}},$$

die wir als zweite Fuchs'sche Gleichung bezeichnen und der ersten in der Form

$$(24) \qquad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} U y_\alpha(x) \eta_\beta(z)\, dx\, dz = 0$$

geschriebenen Gleichung (17) an die Seite stellen.

259. Bedeutung der Fuchs'schen Gleichungen als Relationen zwischen den Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen und gewissen bestimmten Integralen.

In einer späteren Arbeit hat Herr Fuchs die rechte Seite seiner zweiten Gleichung noch etwas umgeformt und aus beiden Gleichungen noch einige weitere Consequenzen gezogen, die wir hier darlegen wollen.

Da nach dem Theoreme der Nr. 23 (Bd. I, S. 65, 66) die Substitutionen, welche zwei adjungirte Paare von Fundamentalsystemen in einander überführen, zu einander reciprok sind, so haben wir für die Coefficienten der Substitutionen (21) die Beziehungen

$$\sum_{i=1}^{n} b_{\alpha i} c_{\beta i} = \delta_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots n),$$

wo $\delta_{\alpha\beta}$ in gewöhnlicher Weise Null oder Eins bedeutet, je na α von β verschieden ist oder nicht. Bezeichnen wir also mit B zu dem Elemente $b_{\alpha\iota}$ gehörige Subdeterminante der Determinant

$$\Delta = \left| b_{\alpha\iota} \right| \qquad (\alpha, \iota = 1, 2, \cdots n)$$

und setzen

$$(25) \qquad b_{\alpha\iota} c_{\beta\iota} = \frac{b_{\alpha\iota} B_{\beta\iota}}{\Delta} = A_\iota^{(\alpha\beta)},$$

$$(26) \qquad e^{2\pi r_{\mu+1,\iota}\sqrt{-1}} = \lambda_\iota,$$

so nimmt die Gleichung (23) die Form an

$$(27) \qquad \int\limits_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} \int\limits_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} U y_\alpha(x) \eta_\beta(z)\, dx\, dz = (-1)^n 2\pi\sqrt{-1} \sum_{\iota=1}^{n} \frac{A_\iota^{(\alpha\beta)}}{\lambda_\iota - 1}.$$

Die Grössen λ_ι sind die Wurzeln der zu $x = a_\varkappa$ gehörigen I mentalgleichung der Differentialgleichung (A), also lautet (vergl. I Bd. I, S. 101) die Fundamentalsubstitution, die das Fundamentals $[y_\alpha]$ von (A) bei einem Umlaufe um $a_{\mu+1}$ erleidet,

$$A_{\mu+1} = B\Omega B^{-1},$$

wenn wir setzen

$$B = (b_{\alpha\iota}), \quad \Omega = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot\cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$
$$(\alpha, \iota = 1, 2, \cdots n)$$

Wenn die Substitution $A_{\mu+1}$ bekannt ist, so sind die $\lambda_1, \lambda_2,$ nach Auflösung einer Gleichung n^{ten} Grades ebenfalls bekannt, u Coefficienten der Substitution B ergeben sich (vergl. Nr. 33) Auflösung eines Systems linearer Gleichungen. Also sind die r Seiten der Gleichungen (27) für

$$\alpha, \beta = 1, 2, \cdots n$$

wohlbestimmte algebraische Functionen der Coefficienten der Subst $A_{\mu+1}$, d. h.:

Die Gleichungen (27) repräsentiren für

$$\alpha, \beta = 1, 2, \cdots n$$

n^2 Gleichungen für die Coefficienten der Fundamentals tution $A_{\mu+1}$, die das Fundamentalsystem $[y_\alpha]$ von (A einem Umlaufe um den singulären Punkt $a_{\mu+1}$ erleidet.

Die linken Seiten der Gleichungen (24) und (27) lassen wenn man für U seinen Ausdruck (10) einsetzt, als Aggrega den Integralen

$$(28)\qquad \begin{cases} J_{\alpha\lambda}^{(\mu)} = \int\limits_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} x^\lambda y_\alpha(x)\,dx, \\ K_{\beta\lambda}^{(\mu)} = \int\limits_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} x^\lambda \eta_\beta(x)\,dx \end{cases}$$

darstellen. Denken wir uns die Curve l als einen Querschnitt und bezeichnen das eine Ufer desselben als das positive, das gegenüberliegende als das negative, so haben wir die Integrale (28) längs eines bestimmten dieser Ufer, z. B. längs des positiven zu erstrecken Wir fügen nun den Integralen (28), für $\mu = 1, 2, \cdots m-1$, noch die beiden Systeme von Integralen

$$J_{\alpha\lambda}^{(m)} = \int\limits_{a_m}^{a_1} x^\lambda y_\alpha(x)\,dx,$$

$$K_{\alpha\lambda}^{(m)} = \int\limits_{a_m}^{a_1} x^\lambda \eta_\beta(x)\,dx$$

hinzu, in welchen die Integration jetzt längs des negativen Ufers von l zu vollziehen ist. Dann ist die Gesammtheit der hintereinander durchlaufenen Integrationswege

$$(a_1 \cdots a_2),\ (a_2 \cdots a_3), \cdots (a_{m-1} \cdots a_m),\ (a_m \cdot a_1)$$

aequivalent einem geschlossenen Umlaufe um den Punkt $x = \infty$ und die Punkte $b_1, b_2, \cdots b_\varrho$; wir haben also

$$(29)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{\mu=1}^{m} J_{\alpha\lambda}^{(\mu)} = g_{\alpha\lambda}, \\ \sum\limits_{\mu=1}^{m} K_{\alpha\lambda}^{(\mu)} = h_{\alpha\lambda}, \end{cases}$$

wo die $g_{\alpha\lambda}$, $h_{\alpha\lambda}$ bestimmte Constanten bedeuten

Nun ist zufolge der Lagrange'schen Beziehung (Nr 24, Bd. I, S. 69, Gleichung (30)) für das Integral y_α von (A)

$$-y_\alpha D_x'(x^\lambda) = \frac{d}{dx} D_x(y_\alpha, x^\lambda),$$

also, gemäss den über die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen gemachten Voraussetzungen,

(30) $$\int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} y_\alpha(x) D_x'(x^\lambda)\,dx = 0,$$

und analog folgt

(31) $$\int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} \eta_\beta(x) D_x(x^\lambda)\,dx = 0.$$

Die Ausdrücke

$$D_x(x^\lambda), \quad D_x'(x^\lambda)$$

sind ganze rationale Functionen von x vom Grade

$$n(m+\varrho-1)+\lambda;$$

setzen wir also in (30) und (31) successive

$$\lambda = 0, 1, 2, \cdot \quad ,$$

so erkennen wir, dass die Integrale $J_{\alpha\lambda}^{(\mu)}$ und $K_{\beta\lambda}^{(\mu)}$ sich durch

$$J_{\alpha 0}^{(\mu)}, \ J_{\alpha 1}^{(\mu)}, \ \cdot\cdot\ J_{\alpha, n(m+\varrho-1)-1}^{(\mu)}$$

beziehungsweise

$$K_{\beta 0}^{(\mu)}, \ K_{\beta 1}^{(\mu)}, \ \cdot\cdot\ K_{\beta, n(m+\varrho-1)-1}^{(\mu)}$$

homogen linear darstellen lassen mit Coefficienten, die von den in den Coefficienten der Differentialgleichung (A) auftretenden constanten Parametern rational abhängen.

Es sind also die Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen $A_{\mu+1}$ mit den Grössen

(32) $$J_{\alpha\lambda}^{(\mu)}, \ K_{\alpha\lambda}^{(\mu)} \qquad (\alpha = 1, 2, \quad n, \ \lambda = 0, 1, \quad n(m+\varrho-1)-1)$$

und den in den Coefficienten der Differentialgleichung auftretenden Parametern durch die Gleichungen (27) algebraisch verknüpft, während zwischen den Grössen (32) und den Parametern der Differentialgleichung die Gleichungen (24) bestehen. Ueberdies befriedigen die Grössen (32) für $\mu = 1, 2, \cdots m$ noch die Gleichungen (29).

Man wird mit diesem Ergebnisse einerseits die Resultate der Nummern 207 (S. 302) und 225 (S. 381, 382), andererseits die in der Nr. 242 (S. 455) erwähnten Beziehungen zwischen den Coefficienten der Uebergangssubstitutionen in Verbindung zu setzen haben.

Nachträge und Berichtigungen

zum ersten Bande.

S. 3, Zeile 9 v o. ist statt „elliptischen“ besser zu setzen „doppeltperiodischen“.

S. 15, Zeile 1 v o lies (2) statt (3).

S 23, Zeile 15 v o. lies (2) statt (6).

S. 23, Zeile 2 v. u. lies (6) statt (5).

S. 27 am Kopfe lies 10 statt 11.

S 54, Gleich (1) und S. 55, Gleich. (B) auf der rechten Seite, S. 69, Gleich. (31) auf der linken und in der zweiten Gleichung von (32) auf der rechten Seite, ist am Fusse des ersten Summenzeichens zu setzen $\varkappa = 1$ statt $\varkappa = 0$.

S 63 ist hinter der ersten Gleichung von (19) zu setzen

$$\varkappa = 0, 1, \cdot \cdot (n-2) \quad \text{statt} \quad \varkappa = 0, 1, \cdot \cdot (n-1)$$

S. 95, Zeile 14 v. u. Die reciproke Substitution müsste genauer in der Form

$$(\bar{\alpha}'_{h\varkappa}) \qquad (h, \varkappa = 1, 2, \quad n)$$

geschrieben werden, wo

$$\bar{\alpha}'_{h\varkappa} = \alpha'_{\varkappa h}$$

ist. Ebenso müsste die Gleichung in Zeile 9 v u. lauten

$$(\bar{\alpha}'_{h\varkappa})^{-1} = (\bar{\alpha}_{h\varkappa}),$$

wo

$$\bar{\alpha}_{h\varkappa} = \alpha_{\varkappa h}$$

gesetzt wurde. Der einfacheren Schreibweise wegen wurde aber hier ebenso wie auch oft im Folgenden die aus einer Substitution

$$(\alpha_{h\varkappa}) \qquad (h, \varkappa = 1, 2, \quad n)$$

durch Transposition hervorgehende Substitution schlechtweg durch

$$(\alpha_{\varkappa h}) \qquad (h, \varkappa = 1, 2, \quad n)$$

bezeichnet.

S. 102, Zeile 9 v. u. lies „Nr. 30 (S. 93)“ statt Nr. 31.

S 103. Für den Zeile 6 v. o erwähnten Determinantensatz vergl. die Nr. 167 (S. 127 ff. des vorliegenden Bandes).

S 113, Zeile 20 v. o ist zwischen „etwa" und „Functionen" einzuschalten „linear unabhängige"

S. 127, Zeile 8 v o ist zwischen „Rangzahlen" und „bilden" einzuschalten „von n subtrahirt"; Zeile 14 v. o. und 5 v. u lies „Minuendus" statt „Subtrahendus".

S. 133 ff. Riemann bezeichnet eine Stelle, die nach unserer Terminologie ein ϱ-facher Windungspunkt genannt wird, als einen $(\varrho - 1)$-fachen Windungspunkt.

S. 140, Zeile 12 v. u. lies „keine negativen" statt „nur positive".

S. 142, Zeile 7 v. o ist auf der rechten Seite der Gleichung dem Gliede $x^{r+1}f_{\lambda 1}$ der Factor $\log^{\lambda} x$ hinzuzufügen.

Zu Nr. 53 (Bd. I, S 184 ff.):

Das auf S. 185 (Bd. I) angegebene allgemeine Kriterium für die Existenz einer zum Exponenten $r_\varkappa$ gehörigen Reihe $g(x, r_\varkappa)$, wonach der Rang des Systems (37) mit dem Range des Systems

$$(0) = (a_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \quad (r_0 - r_\nu))$$

übereinstimmen muss, führt auch leicht auf ein von Herrn Heffter aufgestelltes Verfahren zur Entscheidung der in Rede stehenden Frage. Wir bezeichnen kurz die Elemente $a_{\alpha\alpha}$ des Systems (37) als die Diagonalglieder. Multiplicirt man dann die Elemente der nicht verschwindende Diagonalglieder enthaltenden (Vertical-)Reihen des Systems (37) mit geeigneten Constanten und addirt dieselben zu den Elementen der vorhergehenden Reihen hinzu, so kann man das System (37) in ein anderes umformen, in welchem alle Elemente, die nicht Diagonalglieder sind oder in einer der Zeilen

$$s_{\varkappa-1}, \; s_{\varkappa-2}, \; \cdots \; s_0$$

stehen, verschwinden. Multiplicirt man ferner die Elemente der nicht verschwindende Diagonalglieder enthaltenden Zeilen mit geeigneten Constanten und addirt sie zu den Elementen der folgenden Zeilen hinzu, so kann man zu einem Systeme

$$(37a) \qquad (\bar{a}_{\alpha\beta}) \qquad \begin{pmatrix} \alpha = \;\; 1, 2, \; \cdot \; s_0, \\ \beta = 0, 1, 2, \;\; s_0 \end{pmatrix}$$

gelangen, in welchem auch noch diejenigen Elemente der Zeilen $s_{\varkappa-1}, s_{\varkappa-2}, \cdot s_0$ verschwinden, die nicht in einer der Reihen

$$0, \; s_{\varkappa-1}, \; s_{\varkappa-2}, \; \cdots \; s_1$$

stehen. Von dem so erhaltenen Systeme (37a) ist zunächst evident,

dass sein Rang mit dem Range von (37), und dass ebenso der Rang des Systems

$$(\bar{a}_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \quad s_0)$$

mit dem des Systems (0) übereinstimmt.

Bezeichnet man durch

(I) $$\Sigma_{\iota, \alpha, \beta, \quad \gamma} \qquad (\alpha, \beta, \quad \gamma = 0, 1, \quad \varkappa)$$

die Determinante, welche aus Σ_ι (Bd. I, S. 187) hervorgeht, indem man die Zeilen und (Vertical-)Reihen $s_\alpha, s_\beta, \cdot\cdot\ s_\gamma$ weglässt, und setzt

$$s_\varkappa = 0, \quad \Sigma_0 = (s_0), \quad \Sigma_\varkappa = 1,$$

so ist klar, dass die sämmtlichen Determinanten (I) ebenso wie die Σ' selbst, gebildet aus den Elementen des Systems (37), denselben Werth haben, wie die entsprechenden Determinanten, gebildet aus den Elementen von (37a). Für das letztere System übersieht man aber unmittelbar, dass

(II) $$\Sigma_{\iota-1} = \pm\, \bar{a}_{s_{\varkappa-\iota}, s_{\varkappa-\iota+1}} A_{\iota-1} \Sigma_\iota,$$

(III) $$\Sigma_{\lambda;\, \varkappa-\lambda-1, \cdot\ \varkappa-\mu+1} = \pm\, \bar{a}_{s_{\varkappa-\mu}, s_{\varkappa-\lambda}} A_\lambda \cdots A_{\mu-1} \Sigma_\mu$$

ist. Bei Entscheidung der Frage, ob sich für $g_0(r_\varkappa)$ ein von Null ver schiedener Werth ergiebt, kommen aber offenbar diejenigen Zeilen und Reihen, die abgesehen von dem Diagonalgliede aus lauter Nullen bestehen, nicht in Betracht. Wir können also das System (37) beziehungsweise (37a) durch das System

(37b) $$(\bar{a}_{\alpha\beta}) \qquad \begin{pmatrix} \alpha = \quad s_{\varkappa-1}, s_{\varkappa-2}, \quad s_0, \\ \beta = 0, s_{\varkappa-1}, s_{\varkappa-2}, \quad s_0 \end{pmatrix}$$

ersetzen. Nun muss jedenfalls die Determinante Σ_0 verschwinden; wenn (vergl. (α), Bd I, S. 188)

$$\Sigma_{i-1} = 0, \quad \Sigma_i \neq 0$$

ist, so folgt aus (III)

$$\bar{a}_{s_{\varkappa-\iota}, s_{\varkappa-i+1}} = 0, \quad \bar{a}_{s_\lambda, s_{\lambda+1}} \neq 0 \qquad (\lambda = \varkappa - i - 1, \varkappa - \iota - 2, \quad 0)$$

und wir können offenbar das System (37b) noch weiter reduciren, indem wir die Zeilen, welche den Werthen

$$\alpha = s_{\varkappa-\iota-1}, s_{\varkappa-\iota-2}, \cdots s_0$$

entsprechen, weglassen, so dass also das System

(37c) $$(\bar{a}_{\alpha\beta}) \qquad \begin{pmatrix} \alpha = \quad s_{\varkappa-1}, \quad s_{\varkappa-i}, \\ \beta = 0, s_{\varkappa-1}, \quad s_{\gamma-i} \end{pmatrix}$$

verbleibt, dessen Rang mit dem Range des Systems

(IV) $$(\bar{a}_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = s_{\varkappa-1}, \cdot\ s_{\varkappa-i})$$

übereinstimmen muss. Hierfür ist nothwendig

(V) $$\bar{a}_{s_{\varkappa-1},0} = 0,$$

und stets hinreichend

$$\bar{a}_{s_{\varkappa-\mu},0} = 0 \qquad (\mu=1,2, \quad i)$$

Die letzteren Gleichungen besagen nichts Anderes, als dass die Determinanten (β) (Bd. I, S. 188) sämmtlich verschwinden. In der That folgt z. B. aus (III) und aus der Gleichung

$$\Sigma_{0,\,\varkappa-1,\varkappa-2, \quad \varkappa-\mu+1} = \begin{pmatrix} s_0, & s_{\varkappa-1}, & s_{\varkappa-2}, & \cdots & s_{\varkappa-\mu+1} \\ & s_{\gamma-1}, & s_{\varkappa-2}, & \cdots & s_{\varkappa-\mu+1} \end{pmatrix}$$
$$= h_{s_{\varkappa-\mu}}(r_\varkappa)_{s_{\varkappa-1},s_{\varkappa-2}, \quad s_{\varkappa-\mu+1}} \Sigma_\mu$$

(vergl Bd I, S. 188, wo diese Gleichung für $\mu = i$ angegeben ist*)) unmittelbar

$$h_{s_{\varkappa-\mu}}(r_\varkappa)_{s_{\varkappa-1},s_{\varkappa-2}, \quad s_{\varkappa-\mu+1}} = \pm\, \bar{a}_{s_{\varkappa-\mu},0} A_0 A_1 \cdots A_{\mu-1}.$$

Damit ist zunächst die auf S. 189 (Bd. I) angegebene stets hinreichende (nur im Falle, wo das System (0) vom Range $r_0 - r_\varkappa - i$ ist, auch nothwendige) Bedingung unmittelbar in Evidenz gesetzt.

Nimmt man die stets nothwendige Bedingung (V) als erfüllt an, so kann man das System (37c) durch

$$(\bar{a}_{\alpha\beta}) \qquad \begin{pmatrix} \alpha = & s_{\varkappa-2}, & s_{\varkappa-i}, \\ \beta = 0, & s_{\varkappa-1}, & s_{\varkappa-i+1} \end{pmatrix}$$

ersetzen, welches jetzt genau dieselbe Beschaffenheit besitzt wie das ursprüngliche (37). Reducirt man dasselbe auf die für (37) angegebene Weise, so kommt man wieder auf eine stets nothwendige und eine Gruppe stets hinreichender Bedingungen. Setzt man die nothwendige Bedingung als erfüllt voraus, so hat das reducirte System wieder die Form von (37), und man kann diese Reduction so lange wiederholen, bis ein System erscheint, welches aus einem einzigen Elemente besteht Dieses Element muss dann verschwinden.

S. 195, Zeile 9 v. u ist das specielle Kriterium (Bd. I, S 189) gemeint Die Zeile 9—16 v. o für $r_\varkappa$ gemachte Bemerkung gilt natürlich auch für jedes r_α $(\alpha = 1, 2, \quad \varkappa)$, da offenbar die zu den Exponenten $r_0, r_1, \cdot\ r_\alpha$ gehörigen Reihen in der Form

$$x^{r_\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(r_\alpha) x^\nu$$

---

*) Daselbst ist auf der rechten Seite $r_\varkappa$ an die Stelle von r zu setzen.

darstellbar sind. Darum liefert das specielle Kriterium eben für jedes $\alpha = 1, 2, \cdots \varkappa$ die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen.

S. 210, Zeile 1, 2 v o. ist in den Gleichungen ξ statt x als unabhängige Variable der Differentialquotienten zu schreiben, also

$$\frac{d^n y}{d\xi^n}, \frac{d^{n-1} y}{d\xi^{n-1}}, \cdots \text{ statt } \frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}, \cdots$$

S. 218. Die $m \cdot n$ Functionen $y_{\varkappa\iota}$ brauchen (vergl Thomé, Crelle's Journal, Bd. 115, S. 138 ff.) im Allgemeinen nicht linear unabhängig zu sein. Sind nur $l < mn$ derselben, etwa

$$y_1, y_2, \cdots y_l,$$

von einander linear unabhängig, so befriedigen alle $y_{\iota\varkappa}$ die lineare Differentialgleichung l^{ter} Ordnung

$$\frac{D(y, y_1, y_2, \cdots y_l)}{D(y_1, y_2, \cdots y_l)} = 0,$$

von der ebenso wie a a O. für die Differentialgleichung (3) folgt, dass ihre Coefficienten rationale Functionen von x sind.

S. 222, Zeile 15 v. u., unter dem Σ-Zeichen lies $g_\nu(\varrho)$ statt $g_0(\varrho)$.

S. 244, Zeile 11 v. u. lautet der Coefficient von $\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}}$ nicht q_0, sondern q_1.

S 257, Zeile 10 v. o., in der Formel, lies im Nenner $\beta - 1$ statt $\beta + 1$.

S. 288, Zeile 3 v. o. muss es im Coefficienten von $z^{(n-2)}$ heissen

$$-\frac{n-1}{2n} p_1^2 \quad \text{statt} \quad +\frac{n-1}{2n} p_1^2.$$

S. 307, Nr. 86. Wenn in der Differentialgleichung (A) der Coefficient der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung nicht verschwindet, so besitzt die aus den Coefficienten der Recursionsformel gebildete unendliche Determinante nicht mehr die Normalform (Nr. 77, Bd. I, S. 276), man kann aber die Convergenz derselben erweisen, indem man sich des folgenden von Herrn Helge von Koch (Comptes Rendus, 1893[I], S 179 ff.) aufgestellten Satzes bedient

Herr von Koch definirt (a. a. O) die Convergenz einer unendlichen Determinante, indem er von der Darstellung III (Nr. 78, Bd. I, S. 278) ausgeht Die unendliche Determinante

$$D = [a_{\iota\varkappa}] \qquad (\iota, \varkappa = -\infty, \cdots +\infty)$$

wird also convergent genannt, wenn das Product $\prod_\iota a_{\iota\iota}$ unbedingt convergent ist, und die Summe der Producte

$$\sum \pm \prod_{\iota} a_{\iota\iota}$$

einen endlichen Werth besitzt. Als Verallgemeinerung des (Poincaré-schen) Satzes (Nr 77, Bd. I, S. 276), dass die unendliche Determinante convergirt, wenn die Reihen

$$\sum |\alpha_{\iota\iota}|, \quad \sum_{\iota} \sum_{\varkappa} |\alpha_{\iota\varkappa}|$$

convergent sind, ergiebt sich dann der gedachte Satz:

Die unendliche Determinante D ist convergent, wenn die Reihen

$$\sum_{i} |\alpha_{ii}|, \quad \sum_{i} \sum_{j} \sum_{\varkappa} |\alpha_{ij} \alpha_{j\varkappa}|, \quad \sum_{i} \sum_{j} \sum_{\varkappa} \sum_{l} |\alpha_{ij} \alpha_{j\varkappa} \alpha_{\varkappa l}|$$

convergent sind.

S 311 muss Zeile 2, 3, 4 v. o. lauten: „so ist nach dem Multiplicationstheoreme der unendlichen Determinanten die aus den $\partial_{\nu\mu}$ gebildete Determinante convergent und gleich dem Producte von $\Delta(\varrho)$ und $\mathsf{H}(\varrho)$, d. h. wir haben“.

Zu den Nummern 95, 96 (Bd. I, S 339 ff.):

S. 340, Gleichung (10) lautet der Factor von D_r auf der rechten Seite nicht r, sondern v; Gleichung (11) lautet der Nenner im letzten Gliede der linken Seite $x^{2\varkappa}$ und nicht x^2.

S. 341 ff. ist es vielleicht zweckmässig, deutlicher hervortreten zu lassen, dass die Darstellbarkeit der Function w in der Form

$$w = c_0 + c_1 \xi + c_2 \xi^2 + \cdots,$$

d. h. die Convergenz der Reihe auf der rechten Seite, ausdrücklich gefordert wird. Es möge darum

S. 341, Zeile 5—7 v. o. lauten: „der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) darstellt, und wenn, falls wir setzen

$$v = x^{\varkappa} w, \quad \frac{1}{x} = \xi,$$

die so definirte Function w von ξ in der Form“.

S. 342, Zeile 10 v. u. ist an Stelle von „Differentialgleichung“ besser zu setzen „Gleichung“. Die auf S. 342 definirten w_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots n)$ sind natürlich von den auf S. 341 eingeführten w_r auseinander zu halten.

S 343 am Schlusse der Nr. 95 wäre noch Folgendes hinzuzufügen: Im Allgemeinen ist für $\varkappa > 0$ eine Entwickelung der Function

$$w = \frac{v}{x^{\varkappa}}$$

nach positiven ganzen Potenzen von ξ nicht möglich, sondern die Ent-

wickelung von w nach Potenzen von ξ enthält noch unendlich viele negative Potenzen. Die Bestimmung der w_λ, v_λ, z_λ ist aber gleichwohl auf die angegebene Weise möglich, diese Grössen stellen jedoch keine Lösungen der Gleichungen (11), (12), ($\mathfrak{A}$) dar, wir können vielmehr nur sagen: In

$$w_\lambda^n + \psi_{n-1}(\xi) w_\lambda^{n-1} + \cdots + \psi_0$$

fallen die $\varkappa + 1$ niedrigsten Potenzen von ξ und folglich in

$$v_\lambda^n + \varphi_\varkappa v_\lambda^{n-1} + \cdots + \varphi_{n\varkappa}$$

die $\varkappa + 1$ höchsten Potenzen von x weg. Es ist also

$$(14\text{a}) \qquad v_\lambda^n + \varphi_\varkappa v_\lambda^{n-1} + \cdots + \varphi_{n\varkappa} = B_\lambda x^{(n-1)\varkappa - 1} + \cdots,$$

wo B_λ eine einfach zu bestimmende Constante bedeutet.

Die Bedingungen dafür, dass die z_λ wirkliche Lösungen der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) darstellen, ergeben sich mit Rücksicht auf den Umstand, dass die für w angesetzte Reihe

$$w = c_0 + c_1 \xi + c_2 \xi^2 + \cdots,$$

falls sie convergent ist, mit der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenz von ξ abbrechen muss, in der Form, dass die Coefficienten

$$c_{\varkappa+1}, \ c_{\varkappa+2}, \cdots$$

verschwinden müssen.

S 343, in der Gleich. (15) sind im Coefficienten von u die Glieder

$$v_\lambda^n + D_{\lambda,n} + \varphi_\varkappa (v_\lambda^{n-1} + D_{\lambda,n-1}) + \cdots + \varphi_{(n-1)\varkappa}(v_\lambda + D_{\lambda,1}) + \varphi_{n\varkappa}$$

hinzuzufügen; entsprechend ist

S. 344 in der ersten Gleichung oben im Factor von u der Coefficient von $x^{(n-1)(\varkappa+1)}$ statt $b_{n-1,1} c_{0\lambda}^{n-1}$ gleich

$$B_\lambda + b_{n-1,1} c_{0\lambda}^{n-1}$$

zu nehmen, und auch (Zeile 11 v. o.) in dem Ausdrucke für die determinirende Function das Glied $+ B_\lambda$ hinzuzufügen, wo B_λ die durch die Gleichung (14a) definirte Grösse bedeutet.

S. 346, Zeile 12 v. u. ist hinter „von x" hinzuzufügen „mit einer endlichen Anzahl von Potenzen mit positivem Exponenten".

S 347, Zeile 11 v o. ist hinter „dass" einzuschalten „seine logarithmische Ableitung für $x = \infty$ von endlicher Ordnung unendlich wird und überdies"

S. 402 in der Gleichung (31) hat man, da $\psi_p = 1$ zu nehmen ist, für $\nu > 0$

$$\gamma_{\nu,p} = 0.$$

S. 404, Zeile 6 v. u. und S. 405, Zeile 1 v. o. lies $H_{,,}$ statt $H_{,,}$.

S. 409, Nr. 114 ist stillschweigend die Voraussetzung gemacht, dass $\varphi_1(z)$, $\varphi_0(z)$ keinen gemeinsamen Theiler besitzen. Wäre etwa $(z - a)^\lambda$ ein gemeinsamer Theiler dieser beiden ganzen Functionen, so besässe (A_1) offenbar die Lösungen

$$e^{ax},\ xe^{ax},\ \cdots\ x^{\lambda-1}e^{ax}.$$

S. 410, Zeile 13 v. u. soll lauten

$$l_{a,b} = s_a s_b s_a^{-1} s_b^{-1}.$$

S. 421 oben. Die Definition von $\Gamma(\varrho)$ durch das sogenannte Euler'sche Integral zweiter Gattung

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\varrho-1}\, dt = \Gamma(\varrho)$$

gilt natürlich nur für Werthe von ϱ, deren realer Theil positiv ist. Für ein beliebiges ϱ hat eben die Gleichung

$$\int e^{-t} t^{\varrho-1}\, dt = \Gamma(\varrho)$$

als Definition von $\Gamma(\varrho)$ zu gelten, wo die Integration längs des S. 420, Zeile 6—3 v. u. (Bd. I) beschriebenen Weges zu erstrecken ist.

Dem Litteraturnachweis ist hinzuzufügen

bei Nr. 16: Appell, a. a. O. S. 404;

bei Nrn. 18, 19: Weinstein, Grunert's Archiv, Theil 49, S. 225 ff.;

bei Nrn. 19, 21—23: Grünfeld, Crelle's Journal, Bd. 98, S. 333 ff.;
Günther, ebenda, Bd. 117, S. 168,

bei Nr. 39: Hamburger, Crelle's Journal, Bd. 83, S. 204 ff.;

bei Nr. 42: Koehler, Zeitschrift für Math. u. Phys., Bd. 33, S. 231 ff.;

bei Nr. 90: v. Koch, Acta Mathem., Bd. 18, S. 337 ff.